KAZHDAN'S PROPERTY (T) AND SEMIDEFINITE PROGRAMMING

第 18 回 岡シンポジウム （2019.11.30-12.01）

小沢登高 （おざわ なるたか）

始めに: Kazhdan の性質 (T) は従順性と並んで解析的群論において最も重要な性質である ([1, 9])．性質 (T) を持つ群の代表例として $\mathrm{SL}(n \geq 3, \mathbb{Z})$ などの高階数実 Lie 群の格子が挙げられる (Kazhdan 1967) が，性質 (T) を持つ無限群が存在すること自体が非自明な定理であり幾つもの応用が存在する重要な数学的事実である．この講演では与えられた群が性質 (T) を持つことを，半正定値計画問題（SDP）を利用して電子計算機により数学的に厳密に確認するためのアルゴリズムについて述べる ([14, 12, 4, 6])．特に，有限群の表現論を利用してアルゴリズムを高速化することで，幾何学的に興味深い幾つかの新しい例に対して性質 (T) を確認できたことを報告する ([7, 5])．自然に現れる群のなかで性質 (T) を持つものは希少・特別であるとこれまで考えられてきたが，実はそうでもないということが電子計算機により確かめられる日が来るかもしれない．特に自由群 F_n の自己同型群 $\mathrm{Aut}(F_n)$ が $n \geq 5$ の場合に性質 (T) 持つことが確認された．$\mathrm{Aut}(F_n)$ が性質 (T) を持つか否かは幾何学的群論における著名な未解決問題 ([1, 3, 9]) であり，専門家の見方が概ね否定的であったことを考えれば，この電子計算機によってもたらされた「神託」は驚きの結果であった．

この講演では数学の実験科学的側面についても述べたい．一般的に言って，自然科学では観察された事実が先にありそれを説明する理論が後に来るが，数学では理論が先にありその帰結として事実を得る．こうした転倒は数学的事実に至る手段が人間の精神活動による他ないから起きていると考えられる.（数学的事実というものが数学的に厳密に証明されたものとして定義されていることから起きているともいえる．物理学等に導かれた数学理論は数多く存在するが物理的事実は数学的理論・証明抜きには数学的事実をもたらさない.）しかし計算機科学の発展に伴い実験器具である計算機器・アルゴリズムが強力になるにつれ，今後は数学的事実がまず観察され，それを説明する理論が次に求められるということがより頻繁に起こることは間違いないものと思われる．その結果，四色問題のように人間に理解可能な証明が（見つから）ないということも多く起こるはずである．

Kazhdan の性質 (T) [1, 9]**:** 群 G が **Kazhdan の性質 (T)** を持つことを口語的に言うと，任意の直交表現 (π, H) に対して任意のほとんど G-不変なベクトル $v \in H$ が真に G-

Date: 2020/04/20.

不変なベクトルに近いときをいう．厳密には，

$$\exists S \Subset G\, \exists\kappa > 0 \text{ such that } \forall(\pi, H)\, \forall v \in H \quad d(v, H^G) \le \kappa^{-1} \max_{s\in S} \|v - \pi_s v\|$$

が成り立つときをいう．この条件は $\max_{s\in S} \|v - \pi_s v\| < \kappa\|v\|$ なる $v \in H$ が存在すれば G-不変ベクトルの成す部分空間 H^G が非零であるということを主張する（実は同値）．上の条件が成り立つとき，有限集合 S は G の生成系となる．さらに，G が性質 (T) を持つなら，任意の有限生成系 S に対して上の条件を満たす $\kappa = \kappa(S) > 0$ が存在し，**Kazhdan 定数**と呼ばれる．性質 (T) は商群及び有限指数部分群，有限指数拡大に遺伝するが，擬等長不変量ではないことが知られている．一方，群 G が**従順**であるとは，$\ell_2 G$ 上 $(\lambda_g v)(x) = v(g^{-1}x)$ で定義される正則表現がほとんど G-不変ベクトルを持つときをいう：$\exists v_n \in \ell_2 G$ such that $\|v_n\| = 1$ and $\forall g \in G \quad \|v_n - \lambda_g v_n\| \to 0$．従順群のクラスは可換群及び劣指数増大度を持つ群を含み，部分群，商群，拡大をとる操作に閉じている．特に任意の可解群は従順である．性質 (T) と従順性はともに有限群であることの無限群への一般化であるが，ちょうど正反対の方向への一般化であるため性質 (T) と従順群の両方を持つ群は有限群に限る．実際，従順性と性質 (T) を合わせると $\ell_2(G)$ に非零な G-不変ベクトルが存在することが容易に分かるが，これは G が有限であることを意味する．以上の考察により，性質 (T) を持つ群は有限生成かつ有限可換化を持つことが分かる．性質 (T) は局所コンパクト群に対しても同様に定義され，格子（離散部分群で余体積が有限なもの）に遺伝する．D. Kazhdan(1967) は高階数単純連結 Lie 群が性質 (T) を持つことを示すことにより，そのような群の任意の格子が有限生成かつ有限可換化を持つことを示した．

定理 (Kazhdan [8])

実階数 2 以上の単純連結 Lie 群（e.g., $\mathrm{SL}(n \ge 3, \mathbb{R})$）は性質 (T) を持つ．特にその格子（e.g., $\mathrm{SL}(n \ge 3, \mathbb{Z})$）も性質 (T) を持ち，有限生成かつ可換化有限である．

$\mathrm{Aut}(F_n)$ は可換化 $F_n \to \mathbb{Z}^n$ により，全射準同型 $\mathrm{Aut}(F_n) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^n) = \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ を得る．この全射の $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ の逆像である指数 2 の部分群 $\mathrm{SAut}(F_n)$ については後で詳しく説明する．Kazhdan の定理により，$\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ は $n \ge 3$ のときに性質 (T) を持つ．$\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ は自由群 F_2 を有限指数部分群として持つため性質 (T) を持たない．従って $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ を商群として持つ $\mathrm{Aut}(F_2)$ は性質 (T) を持たない．$\mathrm{Aut}(F_3)$ も，有限指数部分群で無限可換化を持つものが具体的に構成されているため ([11])，性質 (T) を持たない．$d \ge 4$ の場合についても $\mathrm{Aut}(F_n)$ は有限指数部分群で無限可換化を持つものが存在するであろうというのが大方の見方であった (cf. [2])．しかし，これから述べるように，現在では $d \ge 5$ の場合に $\mathrm{Aut}(F_n)$ は性質 (T) を持つということが判明している．（その結果，$d = 4$ のみ未解決として残されている．）

エクスパンダーグラフ [1, 9]: 性質 (T) の重要な応用に**エクスパンダーグラフ**の構成がある．エクスパンダーグラフは数学，計算機科学，工業などで幅広く使われている．性質 (T) を持つ群 $G = \langle S\rangle$ が有限集合 X に推移的に作用しているとする．このとき，辺集合を $\{\{x, sx\} : x \in X,\ s \in S\}$ で定めることにより X をグラフと見なせる（Schreier グ

ラフと呼ばれる）．各頂点の位数は X のサイズに依らず高々$|S|$ である．任意の $A \subset X$ に対して，ベクトル $|A^c|1_A - |A|1_{A^c} \in \ell_2 X \ominus (\ell_2 X)^G$ を考えれば，

$$|\partial A| \geq \frac{\kappa^2}{2}|A|(1 - \frac{|A|}{|X|})$$

が成り立つことが分かる．このようなグラフは $(|S|, \frac{\kappa^2}{2})$-エクスパンダーと呼ばれる．任意の部分集合 $A \subset X$ が与えられたとき，その k 近傍 $\mathcal{N}_k(A)$ のサイズは $\frac{|X|}{2}$ になるまで k について指数的に増大する（$\frac{|X|}{2}$ になった後はその余集合のサイズが指数的に減少する）．頂点の位数とエクスパンダー定数が一定で幾らでもサイズの大きいエクスパンダーが存在することは確率論的手法により古くから知られていたが，始めて具体的に構成したのは G. Margulis (1972) である．剰余有限群 $G = \mathrm{SL}(3, \mathbb{Z})$ が性質 (T) を持つことから，任意の生成系 S に対して，$\mathrm{SL}(3, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ がエクスパンダー列となる.（Margulis は実際には包含 $\mathbb{Z}^2 \leq \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2$ が包含に対する性質 (T) を持つことを利用して $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2 \curvearrowright (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$ のグラフがエクスパンダー列となることを示した．こちらの方がグラフをより具体的に記述できる.）

Product Replacement Algorithm [10]**:** 与えられた有限群から「ランダムな元」を選ぶことは，工業的応用上も重要である．例えば，置換 $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \mathfrak{S}(K)$（ここで K は巨大，n は固定の数）が与えられたときに生成される部分群 $\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_n \rangle$ の位数を（部分群を特定することなしに）推定する際に使われたりする．ランダムな元を得るために現在よく使われているアルゴリズムである **Product Replacement Algorithm** (PRA) について述べる．有限群 Γ と $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\Gamma(n) := \{(g_1, \ldots, g_n) \in \Gamma^d : \Gamma = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle\}$$

とおく．$\Gamma(n) \neq \emptyset$ を仮定する．$\Gamma(n)$ の元 $\underline{g} = (g_1, \ldots, g_n)$ に 4 種の基本変形

$$(*) \qquad \begin{aligned} R_{i,j}^{\pm} &\colon (g_1, \ldots, g_n) \mapsto (g_1, \ldots, \overbrace{g_i g_j^{\pm 1}}^{i\text{-th}}, \ldots, g_n) \\ L_{i,j}^{\pm} &\colon (g_1, \ldots, g_n) \mapsto (g_1, \ldots, g_j^{\pm 1} g_i, \ldots, g_n) \end{aligned}$$

をランダムに繰り返し m 回適用し，結果として得られた $\underline{g}$ の成分をランダムに一つ選ぶ試行 ν が PRA である．PRA は GAP や MAGMA といった群論を扱える数式処理プログラムに実装され，実用上とてもよい性能を示しているが，その数学的な裏付けは不明である．Lubotzky–Pak([10]) は $\mathrm{Aut}(F_n)$ が性質 (T) を持つならこの現象に説明がつくことを見抜いた．つまり，n に余裕があり，$\Gamma(n)$ の各連結成分（上述のの基本変形に関して）がエクスパンダーであるなら $m = O(\log|\Gamma|)$ でランダムな元が得られる（つまり，ν が Γ 上の一様分布に近い）ことが分かる．式 $(*)$ において $g_1, \ldots, g_n$ を階数 d の自由群 F_n の標準生成系と見なすとき，$R_{i,j}^{\pm}, L_{i,j}^{\pm}$ は自由群の自己同型と見なせる．$S = \{R_{i,j}^{\pm}, L_{i,j}^{\pm}\}$ は指数 2 の部分群 $\mathrm{SAut}(F_n) := \ker(\det\colon \mathrm{Aut}(F_n) \to \mathbb{Z}/2)$ を生成することが知られている．よって前節の議論により，$\mathrm{SAut}(F_n)$ が性質 (T) を持つなら，$\Gamma(n)$ の各連結成分が

$(4n(n-1), \kappa^2/2)$-エクスパンダーとなることがわかるのである．ここで重要なのは，エクスパンダー係数が有限群 Γ に依存しないことである．

$\mathrm{Aut}(F_n)$ が性質 (T) を持つことの応用は他にも幾何学的群論や組み合わせ論においていくつか存在する（[5, 7]）．数論における"super-strong approximation"への応用も提案されている ([3]).

非可換実代数幾何学 [13, 14]**:** 性質 (T) は群の関数解析学的側面における性質である．ここでは**非可換実代数幾何学**によって性質 (T) を純代数的に特徴づけることを考える．非可換実代数幾何学は実係数非可換代数における等式や**不等式**を扱う分野である．古典的な実代数幾何学の最初期のトピックとして，Hilbert の第 17 問題（E. Artin により肯定的に解決 1927）が挙げられる：「実係数 d 変数有理多項式 $f \in \mathbb{R}(x_1, \ldots, x_d)$ が $f(t) \geq 0\,\forall t \in \mathbb{R}^d$ を満たすなら，f は有理多項式の 2 乗和 $f = \sum_i g_i^2$ として表せるか？」非可換実代数幾何学で扱われる問題の典型例として，Hilbert の第 17 問題における有理多項式環を別の非可換代数に，指標 $t \in \mathbb{R}^d$ を Hilbert 空間上の（既約）表現に置き換えたものが挙げられる．Hilbert の第 17 問題は有理多項式環を完備化して連続関数環に置き換えれば解は解析的手法，つまり平方根，により trivial に解決する．こうして得た解をもとの多項式環に落とし込むところに理論の核心があるのだが，関数解析的手法ではもちろん最終的に Hahn–Banach の定理を利用することになる（そこで 2 乗関数の凸結合が必要となる）．一般の非可換代数の場合は適切な状況のもと完備化すると作用素環となり，そこでの問題解決に必要な解析的手法は当然作用素環論によるものとなる．

性質 (T) と半正定値計画問題: 性質 (T) の代数的特徴付けに関係するのは群 G の実群環 $\mathbb{R}[G]$ である．積は合成積を考える．また実群環 $\mathbb{R}[G]$ には対合 $(\sum_x f(x)x)^* = \sum_x f(x)x^{-1}$ が存在する．このとき G の直交表現 (π, H) と $\mathbb{R}[G]$ の Hilbert 空間 H 上の $*$-表現 π の間には自然な 1 対 1 対応が存在する．つまり，実群環 $\mathbb{R}[G]$ を完備化して得られる包絡代数は作用素環論で研究されている群 C*環 $\mathrm{C}^*[G]$ となる．実群環 $\mathbb{R}[G]$ の正錐

$$\Sigma^2\mathbb{R}[G] = \{\textstyle\sum_i f_i^* f_i : f_i \in \mathbb{R}[G]\} = \{\textstyle\sum_{x,y} P_{x,y} x^{-1} y : P \in \mathbb{M}_G^+(\mathbb{R})\}$$

を考える．ここで $\mathbb{M}_G^+(\mathbb{R})$ は G の元を添字とする半正定値行列で高々有限個の非零成分を持つものを意味する．群 G は有限生成であるとし，有限生成系 S で $S = S^{-1}$ を満たすものを考え，**組合せ論的 Laplacian** を次で定義する:

$$\Delta = \frac{1}{2}\sum_{s \in S}(1-s)^*(1-s) = |S| - \sum_{s \in S} s \in \Sigma^2\mathbb{R}[G].$$

このとき，Hilbert 空間 H 上の直交表現 π とベクトル $v \in H$ について

$$\langle \pi(\Delta)v, v\rangle = \frac{1}{2}\sum_{s \in S}\|v - \pi_s v\|^2$$

となるから，v が G-不変であることは $\pi(\Delta)v = 0$ と同値で，v がほとんど G-不変であることは $\pi(\Delta)v \approx 0$ と同値になる．自己共役作用素のスペクトル理論により，G が性

質 (T) を持つことと Δ の $\mathrm{C}^*[G]$ におけるスペクトラム $\mathrm{Sp}_{\mathrm{C}^*[G]}(\Delta)$ において 0 が孤立していることが同値であることが分かる：

$$G \text{ が性質 (T) を持つ} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\varepsilon > 0 \text{ such that } \mathrm{Sp}_{\mathrm{C}^*[G]}(\Delta) \subset \{0\} \cup [\varepsilon, \infty).$$

さらにスペクトル写像定理により，右辺は

$$\exists\varepsilon > 0 \text{ such that } \Delta^2 - \varepsilon\Delta \geq 0 \text{ in } \mathrm{C}^*[G]$$

と同値であることが容易に分かる．この事実をさらに推し進めたものが次の定理である．

定理 (Ozawa [14])

G が性質 (T) を持つ $\quad \Leftrightarrow \quad \exists\varepsilon > 0$ such that $\Delta^2 - \varepsilon\Delta \in \Sigma^2\mathbb{R}[G]$ (or $\mathbb{Q}[G]$).
さらに右が成り立つとき，$\kappa(S) \geq (2\varepsilon/|S|)^{1/2}$.

以下，$a, b \in \mathbb{R}[G]$ に対して，単に $a \geq b$ と書いたら $a - b \in \Sigma^2\mathbb{R}[G]$ を意味することにする．従って，性質 (T) の非可換実代数幾何学的な特徴づけは不等式

$$(\heartsuit) \qquad \Delta^2 - \varepsilon\Delta \geq 0$$

によって与えられることになる．

いま $E \Subset G$ を有限部分集合とし，**探索域を制限して** $P \in \mathbb{M}_G^+(\mathbb{R})$ から $P \in \mathbb{M}_E^+(\mathbb{R})$ にすると不等式 $(\heartsuit)$ は**半正定値計画問題**（SDP）

SDP ($\spadesuit$)

`maximize` ε
`subject to` $\exists P \in \mathbb{M}_E^+(\mathbb{R})$ `such that` $\Delta^2 - \varepsilon\Delta = \sum_{x,y\in E} P_{x,y} x^{-1} y$ `in` $\mathbb{R}[G]$

となる.（右辺の $\sum P_{x,y} x^{-1} y$ は $\sum P_{x,y}(1-x)^*(1-y)$ とした方が良いかもしれない.）このSDPの解が $\varepsilon > 0$ であれば性質 (T) を持つことが分かるが，探索域を制限しているためその逆が成り立つことは保証されない.（なお本稿では G の元を同定するための**語問題**は無視することにする.）実用上大抵は E として**半径 2 の球** $B(2) := S \cup S^2$ を使う．なぜなら半径 3 の球はほとんどの場合現在の計算機で実行可能でないからである．$|B(2)| \approx |S|^2$ であるから，解くべき SDP のサイズは次元 $\approx |S|^4$，制約条件 $|E^{-1}E| \approx |S|^4$ となる．これを実際に計算機で実行しようとすると，現時点では，$|S|$ が数十のときに限界があるようである．半径 2 の球というといかにも小さく感じるが，それでも幾つかの場合に性質 (T) が確認できるということは驚くべき**経験的事実**である（[12, 4, 6]）．計算機による証明からは新たなこと学ぶことができないという人も世の中にはいるが，なぜそれが正しいのかを学ぶことはできずとも，それが正しいことをどうやって確認するかを学ぶことができるのである．解答を求めるにあたってどこを探せばいいのかどうやって探せばいいのかといったことである．こうしたことも重要な数学的知見であろう．また計算機による証明は $\mathrm{SL}(3, \mathbb{Z})$ などの良く知られた群の Kazhdan 定数の人手による評価を大幅に更新することにもなった．

仮に計算機がSDP (♠) を実行した結果，

$$\Delta^2 - \varepsilon_0\Delta \approx \textstyle\sum_{x,y\in E} P_{x,y}x^{-1}y$$

という解 (P, ε_0) を見つけたとする．ここから厳密解の存在を保証するためには，任意の $f \in I[G]^h := \{f \in \mathbb{R}[G] : f = f^*,\ \sum_x f(x) = 0\}$ に対して，$\|f\|\Delta - f \in \Sigma^2\mathbb{R}[G]$ であることを使う．ここで $\|f\|$ は具体的に計算できる適当な重み付き ℓ_1 ノルムである．従って G が性質 (T) を持つことを示すには，$P \approx LL^T$ と近似した後，**精度保証付き計算**により

$$(\diamondsuit) \qquad \varepsilon_0 \gg \|\Delta^2 - \varepsilon_0\Delta - \textstyle\sum_z(\sum_x L_{x,z}x)^*(\sum_y L_{y,z}y)\|$$

であることを確認すればよいのである．一般的に言って，certificate (L, ε_0) を見つけることは難しくとも，与えられたcertificateの検証は（計算機的に）たやすい．

この手法により $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$, $n = 3, 4$, などの既に性質 (T) が示されている群について計算機による証明が得られた ([12, 4, 6]) が，$\mathrm{Aut}(F_n)$ のような「大きな」群に対しては計算機の能力不足により，アルゴリズムを完了することが出来なかった．

群対称 SDP: (G, S) の**対称群** $\Sigma := \{\sigma \in \mathrm{Aut}(G) : \sigma(S) = S\}$ は $E = B(2)$ にも自然に作用する．このときSDPの探索域を $P \in \mathbb{M}_E^+(\mathbb{R})$ から Σ の不動点環 $\mathbb{M}_E^+(\mathbb{R})^\Sigma$ に制限しても良く，Σ のサイズが大きければSDPの次元と制約条件を大幅に小さくできる．私はM. KalubaとP. Nowakとの共同研究 ([7]) で $G = \mathrm{SAut}(F_5)$ の場合を扱った．この場合，対称群 $\Sigma = (\bigoplus_{i=1}^5 \mathbb{Z}/2) \rtimes \mathfrak{S}_5$ が比較的大きいので（$|\Sigma| = 2^5 \cdot 5! = 3840$），群対称SDPにより計算量を数百分の一にすることができ，結果，$\mathrm{SAut}(F_5)$ が性質 (T) を持つことを確認できた．

定理 (Kaluba–Nowak–Ozawa [7])

$\mathrm{Aut}(F_5)$ は性質 (T) を持つ．

群対称SDPを実装するにあたり，Σ の表現論（有限次元 C^* 環 $\mathbb{M}_E(\mathbb{R})^\Sigma$ の既約分解を具体的に書き下すこと）を利用してもとのSDPを複数の小さいSDPに落とし込む手続きが必要とされたが，その実行に要求されるメモリが巨大であったため，ポーランドのスーパーコンピューター (それほどたいしたものじゃありませんが) を使わせてもらった．そうして得られたSDPを解くには大学のワークステーションクラスタにおける数週間の計算が必要であった．なお得られた解が実際に性質 (T) の条件 (♢) を満たすことを検証するのは市販のデスクトップコンピューター (with 32GB RAM) でも可能である．

以上のことは数学の将来について多くのことを示唆している．証明（あるいは解）を探すのに高価で特別な電子機器が使われ，さらにその検証にも同程度のものが要求されるという定理が出てくることはおそらく間違いないことである．つまり，証明も検証もどこかのラボで一度行われただけという数学の定理が幾つも出てくるような事態が目の前に迫っている．（四色定理も長らくそのような状態であったと理解している．）そのような定理を，その価値評価はともかく，数学的真理として認めないという態度を取り続けるのも難しいであろうから，数学証明における**厳密性**の概念が今後は実験科学の

それに近くなってゆくということが予想される．技術的な理由で厳密性が損なわれる可能性ももちろん大きい．プログラムコードあるいはそれに参照されているライブラリ，はてはそれらを実行するアプリケーションにバグがないことを確認するのは極めて困難である．今回の私の共同研究は，幸いにして検証が容易であったため，複数のプラットフォームで検証を受けることができた．(なおプログラミングには Julia という言語を使った．) 私は上の定理の証明にこれまでの人間の手による証明以上の確からしさがあると信じている．

無限系列 [5]**:** これまでに述べた一般的な手法では群が性質 (T) を持つことを一度に一つしか確認することができないため，$\mathrm{SAut}(F_n)$ といった無限系列の群すべてに対して性質 (T) を確認することができない．一方で $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ が性質 (T) を持つという事実から $\mathrm{SL}(n\geq 3,\mathbb{Z})$ が性質 (T) を持つことを示すのは比較的たやすい．しかし同様のことを $\mathrm{SAut}(F_n)$ で示すのは恐らく困難である．それにもかかわらず Kaluba–Kielak–Nowak ([5]) は，人間と計算機のより踏み込んだ協力により，$\mathrm{SAut}(F_n)$ が $n\geq 5$ の場合に性質 (T) を持つことの証明に成功した．

以下，$\Gamma_n := \mathrm{SAut}(F_n)$，$S_n := \{R_{i,j}^{\pm}, L_{i,j}^{\pm} : i\neq j\}$ とし，$\{1,\dots,n\}$ を頂点とするの無向完全グラフの辺集合を $\mathrm{E}_n := \{\{i,j\} : i\neq j\}$ とする．辺 e,f が片方の頂点のみ共有するとき $\mathrm{e}\sim\mathrm{f}$ と書き，互いに素であるとき $\mathrm{e}\perp\mathrm{f}$ と書くことにする．$\mathrm{e}\perp\mathrm{f}$ のとき，$\{R_{\mathrm{e}}, L_{\mathrm{e}}\}$ と $\{R_{\mathrm{f}}, L_{\mathrm{f}}\}$ は互いに可換である．Γ_n が一斉に性質 (T) を持つことを示すため，組み合わせ論的 Laplacian $\Delta_n = \sum_{s\in S_n} 1-s$ が $\varepsilon_n > 0$ に対して

$$\Delta_n - \varepsilon_n\Delta_n^2 \geq 0 \tag{$\heartsuit_n$}$$

を一斉に満たすことを見たい．このため，$n>m=5$ のとき，Δ_m についての知識から Δ_n について何が言えるかを考える．

$$\begin{aligned}\Delta_n &= \textstyle\sum_{\mathrm{e}\in\mathrm{E}_n}\Delta_{\mathrm{e}},\\ \Delta_n^2 &= \textstyle\sum_{\mathrm{e}}\Delta_{\mathrm{e}}^2 + \sum_{\mathrm{e}\sim\mathrm{f}}\Delta_{\mathrm{e}}\Delta_{\mathrm{f}} + \sum_{\mathrm{e}\perp\mathrm{f}}\Delta_{\mathrm{e}}\Delta_{\mathrm{f}}\\ &=: \quad \mathbf{Sq}_n \quad + \quad \mathbf{Adj}_n \quad + \quad \mathbf{Op}_n.\end{aligned}$$

において，$\mathbf{Sq}_n$ および $\mathbf{Op}_n$ は正であるが，$\mathbf{Adj}_n$ はそうとは限らない．非可換性ゆえ，正元の積は正になるとは限らない．これが問題の核心である．$n>m$ として，自然な埋め込み $S_m\subset S_n$，$\mathrm{SAut}(F_m)\subset\mathrm{SAut}(F_n)$，および自然な作用 $\mathfrak{S}_n \curvearrowright S_n$，$\mathfrak{S}_n\curvearrowright\mathrm{SAut}(F_n)$ を考える．このとき，

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\sigma(\Delta_m) &= m(m-1)\cdot(n-2)!\cdot\Delta_n\\ \textstyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\sigma(\mathbf{Op}_m) &= m(m-1)\cdot(n-2)!\cdot\mathbf{Op}_n\\ \textstyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\sigma(\mathbf{Adj}_m) &= m(m-1)(m-2)\cdot(n-3)!\cdot\mathbf{Adj}_n\\ \textstyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\sigma(\mathbf{Op}_m) &= m(m-1)(m-2)(m-3)\cdot(n-4)!\cdot\mathbf{Op}_n\end{aligned}$$

となる．右辺の係数の n についての増大度が異なることに注目すると，もし

$$\mathbf{Adj}_5 + \alpha\mathbf{Op}_5 - \varepsilon\Delta_5 \geq 0 \tag{$\clubsuit$}$$

が適当な $\varepsilon > 0$ と $\alpha > 0$ について成り立てば「目出度い」ことが分かる．実際，この不等式に $\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}$ を適用して計算すると，

$$0 \leq 60(n-3)!\bigl(\mathbf{Adj}_n + \tfrac{2\alpha}{n-3}\mathbf{Op}_n - \tfrac{n-2}{3}\varepsilon\Delta_n\bigr) \leq 60(n-3)!\bigl(\Delta_n^2 - \tfrac{n-2}{3}\varepsilon\Delta_n\bigr),$$

が $\frac{2\alpha}{n-3} \leq 1$ の条件のもと，それゆえ充分大きい n について，成り立つことが分かる．これは不等式 $(\heartsuit_n)$ を得るのに $\mathbf{Sq}_n$ が不要であることを意味し，成り立つことは極めて驚きである．しかし実際に，$\varepsilon = 0.1$ と $\alpha = 2$ に対して不等式 (♣) が成り立つことが計算機で群対称 SDP を解くことにより確認されている．これにより $n > 6$ で $\varepsilon_n > 0$ が示されたことになるが，$n = 6$ のときもアドホックな手法により $\mathrm{SAut}(F_n)$ が性質 (T) を持つことが示されている．

定理 (Kaluba–Kielak–Nowak [5])

$n > 5$ のとき $\mathrm{Aut}(F_n)$ は性質 (T) を持つ．

まとめ: $\mathrm{Aut}(F_d)$ が性質 (T) を持つか否かは前述の Lubotzky–Pak の論文 [10] の他にも Kazhdan の性質 (T) に関する標準的な教科書である [1, 7.1] や [9, 10.3] などに未解決問題として言及されていた有名未解決問題であった．$\mathrm{Aut}(F_d)$ は $d \leq 3$ のとき性質 (T) を持たないことが既に知られていた ([11]) が，今回の仕事 ([7, 5]) により $d \geq 5$ の場合に性質 (T) を持つことが分かった．$\mathrm{Aut}(F_4)$ については今回の手法では性質 (T) を確認できなかった．(これは恐らく解が半径 2 の球 $B(2)$ 上に存在しないことを意味する．) その他の群に対するアルゴリズムの挙動から推測するに，$\mathrm{Aut}(F_4)$ について予想を立てるためには半径 3 の球 $B(3)$ でアルゴリズムを実行する必要があると思われる．これには今回使った計算機の 100 倍程度の能力が必要なので 10 年ほど待つ必要がある．もしこの研究を 5 年前に始めていたら恐らく計算機の能力不足により $\mathrm{Aut}(F_5)$ についての結果を出すことができず，研究は何ら新成果を挙げられずに挫折したものと考えられる．逆にもしこの研究を 10 年後に始めていたら群対称 SDP を使うまでもなく簡単に結果を出せていたはずである．

計算機の発展はハード・ソフトともに著しい．囲碁や将棋の世界では既に人間をはるかに上回る能力を見せているが，私の生きているうちに数学においても同様のことが起きるとは私は考えていない．しかし，正しい枠組みさえ与えられれば計算機がとてつもない能力を発揮するのは確かなので，今後，人間と計算機のタッグによる数学がより頻繁に行われるようになるのは間違いないことであると思う．私は専門が作用素環論と関数解析的群論という抽象度の高い数学であることもあり，これまで研究に計算機を使う機会は一切なかった（論文・メイルの読み書き等も研究の本質的な一部分ではあるがこれは除く）．今回の共同研究（[7, 5]）で解決された問題も計算機に関わりがあるとはそれまで誰も考えていなかったことである．計算機の能力は時を追うごとに指数関数的に増大するので，ゴキブリの例えではないが，計算機で解ける問題が自分の周りに 1 つ見つかったということは実は既に３０は存在しているのだと思う．

最後に今回の共同研究から得た個人的な感想も記しておこう．私自身はプログラミングに不慣れであり，半正定値計画問題 (♠) を実装するにあたってポーランド共同研究者

の力を借りた．この共同研究 ([7]) では，これができれば性質 (T) が成り立つという明確な目標に向けて半正定値計画問題 (♠) を実装し $d = 5$ のときに成果を得た．しかし残念なことに，引き続く共同研究（[5]）に私は加わることができなかった．$d \geq 6$ に対する解決では，不等式 (♣) に辿り着くまでに計算機のうえでの膨大な試行錯誤があったのであり，理論側と実装側がゼロ距離で長期間付き合える環境が必要とされたのだ．不等式 (♣) はまさしく発見された数学的事実であり，この事実が何を意味するのか，なぜこのようなことが期待できるのかさえ一切不明である．このように，計算機のうえでの試行錯誤，あるいは手あたり次第の調査, さらには AI の提案により発見される（人間には意味不明な）数学的事実をもとに証明を組み立てるということは今後，より深いレベルで行われることになるのだろうと思う．

References

[1] B. Bekka, P. de la Harpe, and A. Valette; Kazhdan's property (T). *New Mathematical Monographs*, **11**. Cambridge University Press, Cambridge, 2008. xiv+472 pp.

[2] O. Bogopolski and R. Vikentiev; Subgroups of small index in $\mathrm{Aut}(F_n)$ and Kazhdan's property (T). *Combinatorial and geometric group theory*, 1–17, Trends Math., Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2010.

[3] J. S. Ellenberg; Superstrong approximation for monodromy groups. *Thin Groups and Superstrong Approximation*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **61**, 51–71. Cambridge University Press, Cambridge (2014).

[4] K. Fujiwara and Y. Kabaya; Computing Kazhdan constants by semidefinite programming. *Exp. Math.* **28** (2019), 301–312.

[5] M. Kaluba, D. Kielak, P. Nowak; On property (T) for $\mathrm{Aut}(F_n)$ and $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$. *Preprint.* arXiv:1812.03456

[6] M. Kaluba and P. Nowak; Certifying Numerical Estimates of Spectral Gaps. *Groups Complex. Cryptol.* **10** (2018), 33–41.

[7] M. Kaluba, P. Nowak and N. Ozawa; $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_5)$ has property (T). *Math. Ann.* **375** (2019), 1169–1191.

[8] D. Kazhdan; Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups. *Funct. Anal. and its Appl.* **1** (1967), 71–74.

[9] A. Lubotzky; Discrete groups, expanding graphs and invariant measures. *Progress in Mathematics*, **125**. Birkhäuser Verlag, Basel, 1994. xii+195 pp.

[10] A. Lubotzky and I. Pak; The product replacement algorithm and Kazhdan's property (T). *J. Am. Math. Soc.* **14** (2001), 347–363.

[11] J. McCool; A faithful polynomial representation of $\mathrm{Out}F_3$. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* **106** (1989), 207–213.

[12] T. Netzer and A. Thom; Kazhdan's property (T) via semidefinite optimization. *Exp. Math.* **24** (2015), 371–374.

[13] N. Ozawa; About the Connes Embedding Conjecture. *Jpn. J. Math.*, **8** (2013), 147–183.

[14] N. Ozawa; Noncommutative real algebraic geometry of Kazhdan's property (T). *J. Inst. Math. Jussieu* **15** (2016), 85–90.

E-mail address: `narutaka@kurims.kyoto-u.ac.jp`

京都大学数理解析研究所