ムーア・立川多様体と 4D/2D 双対性

荒川　知幸

1. イントロダクション

1.1. 頂点作用素代数 (VOA), あるいは[1]頂点代数 (VA) は Borcherds[Bor86] によって二次元のカイラル共型場理論の数学的記述を与える代数系として導入された. VOA は Borcherds によるムーンシャイン予想の解決や, 曲線のモジュライ理論, 幾何学的 Langlands 予想などに応用された. 一方, もともと二次元の場の理論から生まれた代数系であるため, 三次元以上の場の理論に VOA が登場することは想定されていなかった. ところが, 最近になってさまざまなところで高次元の場の理論に VOA が現れることが観察されており, 素粒子論におけるホットなトピックの一つとなっている. そのような, 高次元の場の理論と VOA の関係を与える理論の一つに Beem 等物理学者のグループ [BLL$^+$15] が発見した **4D/2D 双対性**がある.

1.2. Beem 等 [BLL$^+$15] は, 任意の四次元の $\mathcal{N}=2$ 超対称性を持つ超共型場理論 (4D $\mathcal{N}=2$ SCFT) $\mathcal{T}$ の不変量として, VOA$\mathbb{V}(\mathcal{T})$ を構成した:

$$\mathbb{V}:\{\text{4D } \mathcal{N}=2 \text{ SCFTs}\}\to\{\text{VOAs}\},\quad \mathcal{T}\mapsto\mathbb{V}(\mathcal{T}). \tag{1}$$

さらに, $\mathbb{V}(\mathcal{T})$ は単に四次元理論の不変量というだけではなく, 次の性質を満たすことを示した.

$$Schur(\mathcal{T})=\chi_{\mathbb{V}(\mathcal{T})}(q). \tag{2}$$

ここで, 左辺の $Schur(\mathcal{T})$ は **Schur 指標**と呼ばれる四次元の $\mathcal{N}=2$ SCFT の不変量（観測可能量）であり, $\chi_V(q)$ は VOA V の (正規化された）指標である ((12) 参照). つまり, 写像 $\mathbb{V}$ により, 四次元理論の Schur 指標を, 対応する VOA の表現論を用いて計算することが可能になった.

1.3. Beem 等の写像 $\mathbb{V}$ は理論の次元を二つ落とすことによって得られる. そのように聞くと, 情報が相当失われるのではないかと思いがちだが, 研究が進むにつれ, $\mathbb{V}(\mathcal{T})$ が四次元 $\mathcal{N}=2$ SCFT の非常に良い不変量であることが分かってきた. 現在, 専門家の間では, $\mathbb{V}(\mathcal{T})$ が 4D $\mathcal{N}=2$ SCFT の完全不変量であると期待されているようである.

1.4. 四次元の $\mathcal{N}=2$ SCFT は非常に豊かな理論であり, 従って上記 4D/2D 双対性により, 四次元理論に対応する興味深い VOA が大量に存在していることになる. 一方で, 四次元理論から現れる VOA は, これまでに中心的に研究されてきた VOA とは趣が異なる. 理由の一つは以下の事実による ([BLL$^+$15]):

$$c_{2d}=-12c_{4d}. \tag{3}$$

ここで, c_{4d}, c_{2d} はそれぞれ四次元の $\mathcal{N}=2$ SCFT 及び対応する VOA の中心電荷である. 中心電荷はユニタリーな理論では正の値をとるが, 物理模型は当然ユニタリー

本研究は JSPS 科研費 No. 20340007 and No. 23654006 の助成を受けたものです.

[1]厳密には VOA は VA の特別な場合になるが, ここでは両者を明確には区別しないことにする.

である. 従って c_{4d} は正, 故に c_{2d} は負, よって $\mathbb{V}(\mathcal{T})$ は決してユニタリーとはならない[2]. また $\mathbb{V}(\mathcal{T})$ は有理的とも限らない.

四次元理論から得られる VOA がどのように特徴付けされるのか, またそれらがどのような性質をもつのかは非常に興味深い問題だか, 現時点では完全な回答は得られていない.

1.5. さて, 四次元の $\mathcal{N}=2$ SCFT には Schur 指数の他にも重要な数学的不変量（観測可能量）が複数存在する. その一つが**ヒッグス枝**と呼ばれる幾何学的不変量である. ヒッグス枝はその非特異部分が hyperkähler 構造を持つ, アフィン代数多様体である. 一方, VOA V に対し, **随伴多様体**と呼ばれるアフィンポアソン代数多様体 X_V をその不変量として定義することができる ([A12]).

予想 1 (Beem-Rastelli[BR18])**.** 任意の四次元の $\mathcal{N}=2$ SCFT $\mathcal{T}$ に対し, 次が成立する.

$$Higgs(\mathcal{T}) \cong X_{\mathbb{V}(\mathcal{T})}.$$

つまり, 次の次の可換図式が成立する.

$$\begin{tikzcd}
\{4\mathrm{D}\ \mathcal{N}=2\ \mathrm{SCFTs}\} \arrow[rr, "\mathbb{V}"] \arrow[dr, "\text{Higgs 枝}"'] & {} \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \{\mathrm{VOAs}\} \arrow[dl, "\text{随伴多様体}"] \\
& \{\text{ アフィンポアソン代数多様体 }\} &
\end{tikzcd}$$

VOA の随伴多様体は一般には単にポアソン多様体なのだが, Beem-Rastelli 予想によれば四次元理論から得られる VOA は「**その随伴多様体がハイパーケーラー錐である**」という, 著しい性質を持つことになる.

1.6. 例えば, 良く知られているハイパーケーラー錐として, **冪零軌道**の閉包, より一般に, **冪零 Slodowy 横断片**がある. ここで, 冪零 Slodowy 横断片とは, 単純リー環の $\mathfrak{g}$ の冪零軌道の閉包 $\overline{\mathbb{O}}$ と Slodowy 横断片 $S_f = f + \mathfrak{g}^e$ との交わり $\overline{\mathbb{O}} \cap S_f$ をいう ([松 03, FJLS17] 参照). ここで, $\{e, h, f\}$ は $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{sl}_2$ トリプル, $\mathfrak{g}^e = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, e] = 0\}$.

これまでに, 冪零 Slodowy 横断片[3] が **Argyres-Douglas 理論** ([AD95]) と呼ばれる四次元の $\mathcal{N}=2$ SCFT の Higgs 枝として現れ, 対応する VOA は **W 代数** ([FF90, KRW03]) となることが知られている[4]([XYY, WX, XYb, XYa19]).

1.7. 本稿では, 上記 Argyres-Douglas 理論とは異なる, **クラス $\mathcal{S}$ 理論** ([Gai12, GMN13]) と呼ばれる四次元の $\mathcal{N}=2$ SCFT の場合を取り扱う. クラス $\mathcal{S}$ 理論に関しては, Moore-立川 [MT12] がある数学的予想 (**Moore-立川予想**) の下で, ヒッグス枝の（シンプレクティック代数多様体としての）数学的定式化を与えた. Moore-立川予想は最近 Braverman-Finkelberg-中島 [BFN19] によって解決されたため, クラス $\mathcal{S}$ 理論のヒッグス枝には数学的定義が存在する.

クラス $\mathcal{S}$ 理論のヒッグス枝として現れるシンプレクティック代数多様体を **Moore-立川多様体**と呼ぶ.

1.8. 一方, クラス $\mathcal{S}$ 理論の $\mathbb{V}$ による像として得られる VOA を**クラス $\mathcal{S}$ のカイラル代数**と呼ぶ ([BPRvR15]). Beem 等 [BPRvR15] は, クラス $\mathcal{S}$ のカイラル代数も Moore-立川多様体と同様な数学的定式化を持つことを予想した.

---

[2] 4D/2D 対応に限らず, 高次元の場の理論に現れる VOA はどうやら非ユニタリーになるようである.

[3] 全てではない. 分類については予想がある ([XYa19].

[4] これらの W 代数の随伴多様体が冪零 Slodowy 横断片となることは, 数学的な定理である [A15].

1.9. 論文 [A18] において, クラス $\mathcal{S}$ のカイラル代数に関する Beem 等 [BPRvR15] の予想が肯定的に解決され, さらにクラス $\mathcal{S}$ 理論に対する Beem-Rastelli 予想 (予想 1) も肯定的に解決された．これら結果の解説が, 本稿の目的である.

1.10. 謝辞. この原稿は第 17 回岡シンポジウムで行った講演に基づいています．講演の機会を与えて下さった組織委員の方々、特に松澤淳一先生と吉川謙一先生に感謝します．また、原稿の提出が大幅に遅れてしまったことを, この場をお借りしてお詫びいたします.

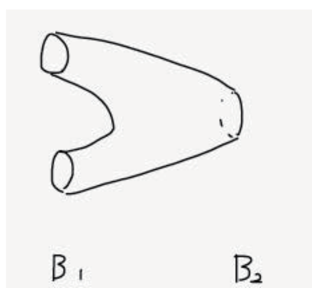
2. ムーア・立川シンプレクティック多様体

通常の**二次元の位相的場の理論** (2dTQFT) ではベクトル空間をターゲットとする ([Ati88]) が, Moore-立川 [MT12] は正則シンプレクティック多様体をターゲットとする 2dTQFT が存在することを予想した．この予想は最近 Braverman-Finkelberg-中島 [BFN19] によって肯定的に解決された．ムーア・立川シンプレクティック多様体とは, この 2dTQFT のターゲットとして現れるシンプレクティック多様体を言う.

2.1. 2-bordisms の圏. $\mathbb{B}_2$ を 2-bordisms の圏, すなわち, 次の対象と射を持つ圏とする (詳しくは, 例えば [Koc04] を参照のこと）.

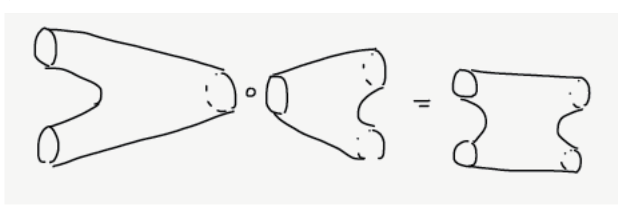
- **対象:** コンパクトな向き付けされた一次元多様体（つまり, いくつかの S^1 の disjoint sum).
- **射:** $\mathrm{Hom}(B_1, B_2) = \{$ コンパクトな向き付けされた一次元多様体Σであって$\partial\Sigma = B_1 \cup -B_2$をみたすもの $\}/\sim$

例えば, B_1 を二つの S^1 の disjoint sum として, $B_2 = S^1$ とすると,

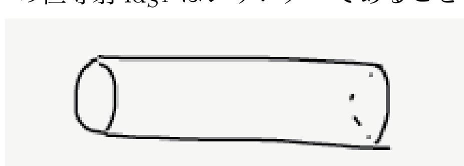


は B_1 から B_2 の射を与える.

圏 $\mathbb{B}_2$ での射の合成は自然に定義される.



また, S^1 から S^1 への恒等射 id_{S^1} はシリンダーであることに注意する.



disjoint union をテンソル積と見ることにより, 」, $\mathbb{B}_2$ には対称モノイダル圏の構造が入る.

2.2. 複素シンプレクティック多様体のなす圏. $\mathbb{S}$ を次の対象と射を持つ圏とする ([MT12]).

対象: 複素半単純リー群の同型類.
射: $\mathrm{Hom}(G_1, G_2) = \{G_1 \times G_2 \times \mathbb{C}^*$が作用するシンプレクティック代数多様体 $X \mid$ $G_1 \times G_2$ の作用はハミルトニアン, $t.\omega = t^2\omega,\ t \in \mathbb{C}^*\}/\sim$.

ここで, ω は X のシンプレクティック形式.

圏 $\mathbb{S}$ での二つのシンプレクティック多様体 $X \in \mathrm{Hom}(G_1, G_2)$, $Y \in \mathrm{Hom}(G_2, G_3)$ の合成 $X \circ Y$ は, G_2 の対角作用に関する $X \times Y$ のシンプレクティック商として定義される[5].

$$X \circ Y := (X \times Y)///\Delta(G_2) = \{(x, y) \in X \times Y \mid \mu_X(x) = \mu_Y(y)\}/\Delta(G_2).$$

ここで, $\mu_X : X \mapsto \mathfrak{g}_2^*$, $\mu_Y : Y \mapsto \mathfrak{g}_2^*$ は G_2 の作用に関するモーメント写像である.

圏 $\mathbb{S}$ での G から G への恒等射 id_G は余接束 T^*G である. 実際, T^*G のモーメント写像は単に射影 $T^*G = G \times \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ であるので,

$$T^*G \circ Y = \{(g, x, y) \in G \times \mathfrak{g}^* \times Y \mid x = \mu_Y(y)\}/G = G \times Y/G \cong Y$$

となる. ここで, $\mu_Y : Y \to \mathfrak{g}^*$ は Y のモーメント写像.

圏 $\mathbb{S}$ もまた, 積をテンソル積とみなすことで対称なモノイダル圏の構造が入る.

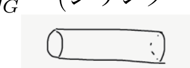
2.3. Moore-立川予想. 次の定理は, Moore と立川 [MT12] によって予想され, Braverman-Finkelberg-中島によって証明された.

定理 2.1 ([BFN19]). 各半単純群 G について, 以下の条件を満たすモノイダル関手

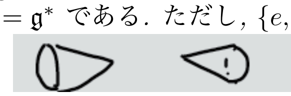
$$\eta_G^{BFN} : \mathbb{B}_2 \longrightarrow \mathbb{S}$$

が存在する.

(i) $\eta_G^{BFN}(S^1) = G$,
(ii) η_G^{BFN}(シリンダー) $= T^*G$,

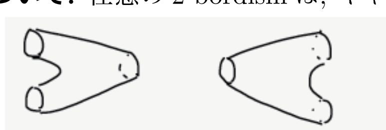


(iii) η_G^{BFN}(キャップ) $= G \times \mathcal{S}$. ここで, $\mathcal{S}$ は *Kostant-Slodowy* の横断片 $e + \mathfrak{g}^f \subset \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^*$ である. ただし, $\{e, f, h\}$ は $\mathfrak{g}$ の正則な $\mathfrak{sl}_2$ トリプルである.



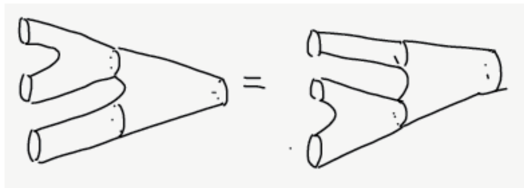
関手 η_G^{BFN} の 2-bordism の像として得られるシンプレクティック多様体を **Moore-立川多様体**と呼ぶ.

2.4. 定理 2.1 の証明について. 任意の 2-bordism は, キャップ, シリンダー, パンツ



の合成で表すことができる. 従って, 定理 2.1 を示すには, η_G^{BFN}(パンツ) を与え, 整合性条件

[5] 本来は Derived シンプレクティック商を考えなければならないが ([Cal14]), (少なくとも対応するリーマン面の種数が零のときは）実は問題なく定義されることがあとから分かる.



を示せば十分である. 特に, 2-bordism の種数が零の場合を考えれば良い.

定理 2.2 ([BFN19]). 各半単純群 G と $r \geq 1$ について, 同変コホモロジー群

$$H^*_{\check{G}[[t]]}(\mathrm{Gr}_{\check{G}}, i^!(\mathcal{A}_R^{\boxtimes r}))$$

には可換環の構造が入る. ここで, $\check{G}$ は G の *Langlands* 双対群, $\mathrm{Gr}_{\check{G}}$ はアフィングラスマニアン $\check{G}((t))/\check{G}[[t]]$, $\mathcal{A}_R$ は幾何学的佐竹対応 ([MV07]) によって G の正則表現 $\mathbb{C}[G]$ に対応する $\mathrm{Gr}_{\check{G}}$ の偏屈層, $i : \mathrm{Gr}_{\check{G}} \to \mathrm{Gr}_{\check{G}} \times \cdots \times \mathrm{Gr}_{\check{G}}$ は対角な埋め込み. そこで,

$$\mathrm{MT}_r := \mathrm{Spec}(H^*_{\check{G}[[t]]}(\mathrm{Gr}_{\check{G}}, i^!(\mathcal{A}_R^{\boxtimes r}))$$

と定めると, 以下が成立する.

(i) MT_r は G^r によるハミルトニアン作用を持つ（一般には特異性を持つ）シンプレクティック多様体である.
(ii) $\mathrm{MT}_2 = T^*G$.
(iii) $\mathrm{MT}_1 = G \times \mathcal{S}$.
(iv) $(\mathrm{MT}_r \times \mathrm{MT}_s)/\!/\!/\Delta(G) \cong \mathrm{MT}_{r+s-2}$.

定理 2.2 から, 種数が零で境界が r 個の S^1 である連結な 2-bordismB_r に対し,

$$\eta_G^{BFN}(B_r) = \mathrm{MT}_r$$

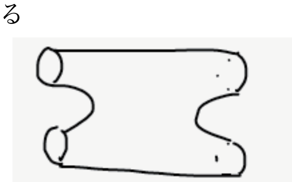
定めれば, η_G^{BFN} は　定理 2.1 の条件を満たす関手 $\eta_G^{BFN} : \mathbb{B}_2 \longrightarrow \mathbb{S}$ に拡張されることが分かる.

2.5. Moore-立川多様体の例 ([MT12, BFN19]). 最も簡単な $G = SL_2$ 場合を考える. まず, $r = 3$ の場合は

$$\mathrm{MT}_3 = \eta_{SL_2}^{BFN}(\text{パンツ}) = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$$

となる. ただし, $(\mathbb{C}^2)^{\otimes 3}$ には $\mathbb{C}^2$ の自然なシンプレクティック構造から誘導されるンプレクティック構造を入れる. SL_2 の $\mathbb{C}^2$ への自然なハミルトニアン作用は, $SL_2 \times SL_2 \times SL_2$ の $(\mathbb{C}^2)^{\otimes 3}$ へのハミルトニアン作用を誘導する.

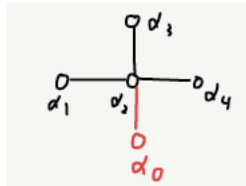
次に, $r = 4$ の場合を考える



と,

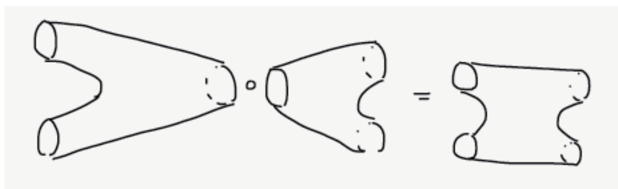
$$\mathrm{MT}_4 = \eta_{SL_2}^{BFN}(B_4) = \overline{\mathbb{O}_{min}} \quad \text{in } D_4$$

となる. ここで, $\mathbb{O}_{min}$ は $D_4 = \mathfrak{so}_8$ の極小冪零軌道である. そのザリスキー閉包 $\overline{\mathbb{O}_{min}}$ に $SL_2 \times SL_2 \times SL_2 \times SL_2$ の作用が入ることは, D_4 の拡大 Dynkin 図形から見て取ることができる.



ここで, $\overline{\mathbb{O}_{min}}$ が特異点を持つ代数多様体であることと, $G = SL_2$ の場合を考えているのにも関わらず, D_4 が出てきていることに注意したい.

$\mathbb{B}_2$ の中では恒等式



が成立するので, $\mathbb{S}$ の中では同型

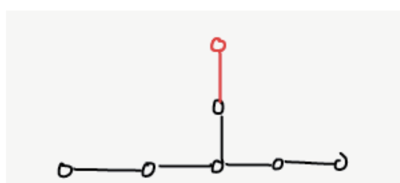
$$(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2) \circ (\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2) \cong \overline{\mathbb{O}_{min}}$$

が成立する (上の (iv) の $r = s = 3$ の場合に対応). この非自明な同型は, D_4 の極小冪零軌道の閉包の ADHM 構成法として物理学者にはよく知られている.

次に, $G = SL_3$ の場合を考えると,

$$\eta^{BFN}_{SL_3}(パンツ) = \overline{\mathbb{O}_{min}} \text{ in } E_6$$

となる. E_6 の極小冪零軌道の閉包に $SL_3 \times SL_3 \times SL_3$ が作用することはやはり E_6 の拡大 Dynkin 図形から見て取ることができる.



しかし, 一般の Moore-立川多様体に対しては簡易な記述は知られていない.

2.6. クラス $\mathcal{S}$ 理論のヒッグス枝としての Moore-立川多様体. イントロダクションで述べたように, 四次元の $\mathcal{N} = 2$ SCFT にはクラス $\mathcal{S}$ 理論と呼ばれる理論が存在する. ここで, $\mathcal{S}$ は six を表す. つまり, クラス $\mathcal{S}$ 理論とは, さらに高次元の, 六次元の理論を, 点付きリーマン面 Σ 上で「コンパクト化」して得られる四次元の理論である. この様にして得られる理論は, コンパクト化するのに用いた点付きリーマン面 Σ と, flavor symmetry group と呼ばれる半単純リー群 G をパラメータに持ち, $S_G(\Sigma)$ と表される.

Σ を連結な点付きリーマン面とし, B を連結な, Σ と同じ種数を持ち, Σ の点の数と同じだけの境界を持つ 2-bordism とする.

Moore-立川 [MT12] によると, クラス $\mathcal{S}$ 理論のヒッグス枝について次が成立する.

$$Higgs(S_G(\Sigma)) = \eta^{BFN}_G(B). \tag{4}$$

故に, Braverman-Finkelberg-中島 [BFN19] の結果により, クラス $\mathcal{S}$ 理論のヒッグス枝の数学的定義が与えられたことになる.

2.7. 三次元理論のクーロン枝としての Moore-立川多様体. 四次元の $\mathcal{N}=2$ SCFT $\mathcal{T}$ の「S^1 コンパクト化」を行い, 三次元の $\mathcal{N}=2$ ゲージ理論 $\mathcal{T}_{3D}$ を得ることができる. このとき, $\mathcal{T}$ の四次元理論としてのヒッグス枝 $Higgs(\mathcal{T})$ は, $\mathcal{T}_{3D}$ の三次元理論としてのヒッグス枝 $Higgs(\mathcal{T}_{3D})$ に一致する[6]. さらに, 三次元ミラー対称性より, $Higgs(\mathcal{T}_{3D})$ は $\mathcal{T}_{3D}$ のミラーの理論 $\check{\mathcal{T}}_{3D}$ のクーロン枝 $Coulomb(\check{\mathcal{T}}_{3D})$ と一致する:

$$Higgs(\mathcal{T}) = Higgs(\mathcal{T}_{3D}) = Coulomb(\check{\mathcal{T}}_{3D}). \tag{5}$$

三次元理論のクーロン枝の数学的定義は最近 Braverman-Finkelberg-中島によって与えられたが ([Nak18] 参照), $G = SL_N$ の時は $Higgs(S_G(\Sigma))$ は星形の箙に対応した三次元理論ゲージ理論のクーロン枝と一致することが知られている ([BFN19]).

3. クラス $\mathcal{S}$ カイラル代数と Beem-Rastelli 予想

節 (2.6) で、クラス $\mathcal{S}$ 理論のヒッグス枝の数学的定義を与えた. この章の目的は, これを VOA の場合にアップグレードすることである.

3.1. 頂点代数. 頂点代数 (VA) とは, ベクトル空間 V であって, 真空ベクトルと呼ばれるベクトル $|0>\in V$, translation operator と呼ばれる作用素 $T \in \mathrm{End}(V)$, 頂点作用素と呼ばれる線形写像

$$\begin{array}{ccc} V & \to & (\mathrm{End}\, V)[[z, z^{-1}]] \\ a & \mapsto & Y(a,z) = a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{(n)} z^{-n-1} \end{array}$$

を持ち, 以下の公理を満たすものをいう.

(i) 任意の $a, b \in V$ に対して, $Y(a,z)b \in V((z))$, すなわち, 十分大きな n に対し $a_{(n)}b = 0$.
(ii) $Y(|0\rangle, z) = \mathrm{id}_V$. また任意の $a \in V$ に対して, $Y(a,z)|0\rangle \in a + V[[z]]z$.
(iii) 任意の $a \in V$ に対して, $[T, Y(a,z)] = Y(Ta, z) = \partial_z Y(a,z)$.
(iv) (局所性) 任意の $a, b \in V$ に対して, 非負整数 N が存在して,

$$(z-w)^n [Y(a,z), Y(b,w)] = 0 \quad (n \geq N). \tag{6}$$

3.2. Borcherds の関係式. 上の公理のうち, 局所性 (6) は次の交換関係と同値である.

$$[a_{(m)}, b_{(n)}] = \sum_{j\geq 0} \binom{m}{j} (a_{(j)}b)_{(m+n-j)}. \tag{7}$$

また, V が頂点代数のとき, 次が成立する.

$$(a_{(m)}b)_{(n)} = \sum_{j\geq 0} (-1)^j \binom{m}{j} \left(a_{(m-j)} b_{(n+j)} - (-1)^m b_{(m+n-j)} a_{(j)} \right). \tag{8}$$

$(a, b \in V,\ m, n \in \mathbb{Z})$. (7), (10) を Borcherds の関係式という.

[6]物理の話です. 理解して書いているわけではありません.

3.3. 頂点代数の表現. ベクトル空間 M が頂点代数 V の表現であるとは, 線形写像

$$\begin{array}{ccc} V & \to & (\operatorname{End} V)[[z,z^{-1}]] \\ a & \mapsto & Y_M(a,z)=a^M(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a^M_{(n)} z^{-n-1} \end{array}$$

が存在し, $Y_M(a,z)m\in M((z))$ $(a\in V,\, m\in M)$, $Y_M(|0\rangle,z)=\mathrm{id}_M$,

$$[a^M_{(m)},b^N_{(n)}]=\sum_{j\geq 0}\binom{m}{j}(a_{(j)}b)^M_{(m+n-j)}, \tag{9}$$

$$(a_{(m)}b)^M_{(n)}=\sum_{j\geq 0}(-1)^j\binom{m}{j}\left(a^M_{(m-j)}b^M_{(n+j)}-(-1)^m b^M_{(m+n-j)}a^N_{(j)}\right). \tag{10}$$

を満たすことを言う.

勿論, V 自身は V の表現である.

N を T の作用で不変な V の真の部分加群とすると, V/N には商頂点代数の構造が入る. これは, 頂点代数には次の関係式 (skew-symmetry) が成立することから分かる.

$$Y(a,z)b=e^{zT}Y(b,-z)a \quad (a,b\in V). \tag{11}$$

3.4. 例 (普遍アフィン頂点代数). $\mathfrak{g}$ をリー環, κ を $\mathfrak{g}$ 上の不変対称双一次形式とするとき, 対応する Kac-Moody 代数を

$$\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa=\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}]\oplus\mathbb{C}\mathbf{1}$$

で定義される. ただし, 交換関係は

$$[x\otimes t^m,y\otimes t^n]=[x,y]\otimes t^{m+n}+m\kappa(x,y)\mathbf{1},\quad [\mathbf{1},\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa]=0$$

で与えられる. ここで,

$$V^\kappa(\mathfrak{g})=U(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa)\otimes_{U(\mathfrak{g}[t]\oplus\mathbb{C}\mathbf{1})}\mathbb{C}$$

と定める. ここで, $\mathbb{C}$ を $\mathfrak{g}[t]$ が自明に, $\mathbf{1}$ が 1 で作用する $\mathfrak{g}[t]\oplus\mathbb{C}\mathbf{1}$ の自明表現とみなしている.

以下では, 埋め込み $\mathfrak{g}\ni x\mapsto (x\otimes t^{-1})1\otimes 1\in V^\kappa(\mathfrak{g})$ により, $\mathfrak{g}$ を $V^\kappa(\mathfrak{g})$ の部分空間とみなす.

$V^\kappa(\mathfrak{g})$ には $|0\rangle=1\otimes 1$ を真空ベクトルとし,

$$Y(x,z)=x(z):=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(x\otimes t^n)z^{-n-1}\quad (x\in\mathfrak{g})$$

となる唯一の頂点代数の構造が入る. $V^\kappa(\mathfrak{g})$ を $(\mathfrak{g},\kappa)$ に付随した普遍アフィン頂点代数という.

普遍アフィン頂点代数 $V^\kappa(\mathfrak{g})$ の表現 M には, $x\otimes t^n\mapsto x^M_{(n)}$ により, 滑らかな $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$ 加群の構造が入る. ここで, $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$ の表現 M が滑らかであるとは, $x(z)m\in M((z))$ $(x\in\mathfrak{g},\, m\in M)$ を満たすことを言う. 逆に, M が滑らかな $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$ 加群であれば, M には $Y^M(x,z)=x(z)$ $(x\in\mathfrak{g})$ となる唯一の $V^\kappa(\mathfrak{g})$ 加群の構造が入る. 従って, $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$ 加群とは滑らかな $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$ 加群に他ならない.

3.5. 例 (普遍 Virasoro 頂点代数). $\mathcal{L} = \bigoplus_{z\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}L_n \oplus \mathbb{C}C$ を Virasoro 代数, すなわち交換関係

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{m^3-m}{24}\delta_{m+n,0}C, \quad [C, \mathcal{L}] = 0$$

で定義される無限次元リー環とする. $\mathcal{L}_{\geq -1} = \bigoplus_{z\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}L_n \oplus \mathbb{C}c \subset \mathcal{L}$ とし, $c \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\mathrm{Vir}^c = U(\mathcal{L}) \otimes_{U(\mathcal{L}_{\geq -1})} \mathbb{C}_c$$

と定める. ここで, $\mathbb{C}_c$ は L_n $(n \geq -1)0$ が自明に, C が c で作用する $\mathcal{L}_{\geq -1}$ の一次元表現である.

Vir^c には $|0\rangle = 1\otimes 1$ を真空ベクトルとし,

$$Y(L_{-2}|0\rangle, z) = L(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2} \quad (x \in \mathfrak{g}),$$

$T = L_{-1}$ となる唯一の頂点代数の構造が入る. Vir^c を中心電荷 c の普遍 Virasoro 頂点代数と呼ぶ.

Vir^c 加群とは中心電荷 c の滑らかな $\mathcal{L}$ 加群に他ならない.

3.6. コンフォーマル頂点代数. 頂点代数の準同型写像 $\phi : V_1 \to V_2$ とは, $\phi(|0\rangle) = |0\rangle$, $\phi \circ T = T \circ \phi$, $\phi(a_{(n)}b) = \phi(a)_{(n)}\phi(b)$ $(a, b \in V,\ n \in \mathbb{Z})$ を満たす線形写像のことである.

頂点代数の準同型写像 $\mathrm{Vir}^c \to V$ が存在し, V 上で L_0 が半単純に作用し, $T = L_{-1}$ となるとくき, V を (中心電荷 c の) コンフォーマル頂点代数と呼ぶ.

V が中心電荷 c のコンフォーマル頂点代数のとき, 分解 $V = \bigoplus_{d\in\mathbb{C}} V_d$, $V_d = \{v \in V \mid L_0 v = dv\}$ が存在する. 全ての V_d が有限次元の時, 形式的冪級数

$$\chi_V(q) = q^{-c/24}\sum_d (\dim V_d) q^d \tag{12}$$

が定義される. これを V の**正規化された指標**と言う.

3.7. 可換な頂点代数. 頂点代数 V が可換であるとは,

$$[Y(a,z), Y(b,w)] = 0 \quad (a, b \in V)$$

を満たすことをいう. これは

$$[a_{(m)}, b_{(n)}] = 0 \quad (a, b \in V,\ m, n \in \mathbb{Z})$$

と同値であり, さらに

$$a_{(n)}b = 0 \qquad (a, b \in V,\ m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

とも同値である.

可換な頂点代数 V には

$$a \cdot b = a_{(-1)}b$$

によって T を微分作用素する**微分代数** (differential algebra)[7]の構造が入り, 逆に微分代数には自然な可換な頂点代数を入れることができる ([Bor86]). これにより, 可換な頂点代数と微分代数を同一視することが出来る.

[7]微分代数とは微分作用素付きの可換な $\mathbb{C}$ 代数のことである.

3.8. アーク空間. 有限型スキーム X に対し, $J_\infty X$ を X のアーク空間とする. $J_\infty X$ は,

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(A), J_\infty X) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}\, A[[t]], X)$$

(A は $\mathbb{C}$ 代数) で特徴付けされるスキームである. X がアフィンスキームのとき, $\mathcal{O}(J_\infty X)$ には微分代数の構造が入り, 従って可換な頂点代数である ([EM09] など)[8].

対応 $X \rightsquigarrow J_\infty X$ は functorial であり, 自然な同型

$$J_\infty(X \times Y) \cong J_\infty X \times J_\infty Y$$

は頂点代数の構造と整合的である.

注意 3.1. X がアフィンスキームのとき, $\mathcal{O}(J_\infty X)$ の頂点代数としての加群と微分代数としての加群は異なる. 実際, $\mathcal{O}(J_\infty X)$ の頂点代数としての加群とは滑らかな $\mathcal{O}(LX)$ 加群に他ならない. ここで, LX は X の**ループ空間**, すなわち,

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(LX), A) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{O}(X), A((t)))$$

を満たす ind スキームである.

3.9. 例 (G 上の cdo). G をアフィン群スキーム, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, κ を $\mathfrak{g}$ 上の対称不変双一次形式とする. このとき, $J_\infty G = G[[t]]$ であり, $J_\infty G$ のリー環は $J_\infty \mathfrak{g} = \mathfrak{g}[[t]]$ である.

さて,

$$\mathcal{D}^{ch}_{G,\kappa} = U(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa) \otimes_{U(\mathfrak{g}[t] \oplus \mathbb{C}\mathbf{1})} \mathcal{O}(J_\infty G)$$

と定める. ここで, $\mathcal{O}(J_\infty G)$ に $\mathfrak{g}[t] \subset \mathfrak{g}[[t]]$ は左不変ベクトル場として作用し, $\mathbf{1}$ は 1 で作用する. このとき, $\mathcal{D}^{ch}_{G,\kappa}$ には次を満たす頂点代数の構造が唯一定まる ([MSV99, BD04, AG02, GMS01]).

埋め込み

$$\mathcal{O}(J_\infty G) \hookrightarrow \mathcal{D}^{ch}_{G,\kappa} \quad f \mapsto 1 \otimes f, \tag{13}$$

$$V^\kappa(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathcal{D}^{ch}_{G,\kappa} \quad u|0\rangle \mapsto u \otimes \mathrm{id}_{J_\infty G}, \tag{14}$$

は頂点代数の射であり,

$$[x_{(m)}, f_{(n)}] = (x_L f)_{(m+n)} \quad (x \in \mathfrak{g},\ f \in \mathcal{O}(G) \subset \mathcal{O}(J_\infty G),\ m, n \in \mathbb{Z}).$$

ここで, x_L は x に対応する左不変ベクトル場.

頂点代数 $\mathcal{D}^{ch}_{G,\kappa}$ は G 上の**カイラル微分作用素** (cdo) と呼ばれる.

3.10. 頂点代数の特異台と随伴多様体. 任意の頂点代数 V に対し, フィルター付け

$$V = F^0 V \supset F^1 V \supset F^2 V \supset \dots,$$

が

$$F^p V = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{a^1_{(-n_1-1)} a^2_{(-n_1-2)} \dots a^r_{(-n_r-1)}|0\rangle \mid a^i \in V,\ n_i \geq 0,\ \sum_i n_i \geq p\}$$

---

[8], X がアフィンポアソンスキームのときは（つまり $\mathcal{O}(X)$ がポアソン代数のとき）, $\mathcal{O}(J_\infty X)$ には自然にポアソン頂点代数の構造が入る ([A12]).

と置くことで定まり, 付随する次数付けされたベクトル空間 $\mathrm{gr}\,V = \bigoplus_p F^pV/F^{p+1}V$ には可換な頂点代数の構造が入る[9]([Li05]). 特に, $\mathrm{gr}\,V$ は可換環であるので, V の**特異台** $SS(V)$ を

$$SS(V) = \mathrm{Spec}(\mathrm{gr}\,V)$$

で定義するができる.

一方, $\mathrm{gr}\,V$ のポアソン頂点代数の構造を部分空間

$$R_V = V/F^1(V) \subset \mathrm{gr}\,V$$

に制限すると, R_V には次で記述されるポアソン代数の構造が入る ([Zhu96]).

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = \overline{a_{(-1)}b}, \quad \{\bar{a},\bar{b}\} = \overline{a_{(0)}b} \quad (a,b\in V).$$

R_V を **Zhu の C_2 代数**という. V の**随伴スキーム** $\tilde{X}_V$, **随伴多様体** X_V はそれぞれ次で定義される ([A12]).

$$\tilde{X}_V = \mathrm{Spec}(R_V), \quad X_V = \mathrm{Specm}(R_V). \tag{15}$$

命題 3.2 ([Li05])**.** 次のが成立する.

$$SS(V) \subset J_\infty \tilde{X}_V.$$

すなわち, 頂点代数の全射 $\mathcal{O}(J_\infty\tilde{X}_V) \twoheadrightarrow \mathrm{gr}\,V$ が存在する.

命題 3.2 から次が分かる.

補題 3.3 ([A12])**.** $SS(V)$ が零次元であることと, X_V が零次元であることは同値.

3.11. 随伴多様体の例. V が $V^\kappa(\mathfrak{g})$ の商の時,

$$R_V = V/t^{-2}\mathfrak{g}[t^{-1}]V$$

である. 対応

$$x_1x_2\dots x_r \mapsto (x_1\otimes t^{-1})(x_2\otimes t^{-1})\dots(x_r\otimes t^{-1})|0\rangle + t^{-2}\mathfrak{g}[t^{-1}]V \quad (x_i\in\mathfrak{g}0$$

は $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] = S(\mathfrak{g})$ から $R_V =$ へのポアソン代数の全射を定める. 従って, この写像の核を I と書くと $R_V = \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]/I$ となり,

$$X_V = \{\lambda\in\mathfrak{g}^* \mid p(\lambda) = 0 \quad p\in I\}.$$

特に, X_V は $\mathfrak{g}^*$ の G 不変な錘となる.

例えば, $V = V^\kappa(\mathfrak{g})$ のとき, $I = 0$ なので $X_{V^\kappa(\mathfrak{g})} = \mathfrak{g}^*$ である.

$\mathfrak{g}$ が単純のとき, $k\in\mathbb{C}$ で $V^k(\mathfrak{g})$ で $\kappa = k\kappa_{\mathfrak{g}}/2h^\vee$ の普遍頂点代数 $V^{k\kappa_{\mathfrak{g}}/2h^\vee}(\mathfrak{g})$ を表し, $L_k(\mathfrak{g})$ でその唯一の単純商を表す. ここで, $h^\vee$ は $\mathfrak{g}$ の双対 Coxeter 数. k が generic のとき, $L_k(\mathfrak{g}) = V^k(\mathfrak{g})$ なので

$$X_{L_k(\mathfrak{g})} = \mathfrak{g}^*.$$

一方, 次が成立する.

定理 3.4 ([Zhu96, DM06])**.** 次は同値

(i) $\dim X_{L_k(\mathfrak{g})} = 0$.
(ii) $L_k(\mathfrak{g})$ は可積分表現 *(* $\iff k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$*)*.

G 上の cdo に対しては次が成立する.

$$X_{\mathcal{D}^{ch}_{G,\kappa}} \cong T^*G (= \mathrm{MT}_2). \tag{16}$$

[9]実際にはさらに強く, ポアソン頂点代数 [FBZ04] の構造が入る ([Li05]).

3.12. 例 (Drinfeld-Sokolov 簡約). $\mathfrak{g}$ を半単純とする. $\mathrm{KL}(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa)$ を, $t\mathfrak{g}[t]$ が局所冪零で, $\mathfrak{g}$ が半単純で作用する加群からなる滑らかな $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$ 加群の充満部分圏とする. $V^\kappa(\mathfrak{g})$ やその商は $\mathrm{KL}(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa)$ の対象である.

$\mathrm{KL}(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa)$ の**頂点代数的対象**とは, 頂点代数の準同型

$$V^\kappa(\mathfrak{g}) \to V$$

を持つ頂点代数 V であって, $\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa$ 加群としては $\mathrm{KL}(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa)$ に属するものを言う. 例えば, $V^\kappa(\mathfrak{g})$ や $\mathcal{D}^{ch}_{G,\kappa}$ は $\mathrm{KL}(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa)$ の頂点代数的対象である.

$\mathrm{KL}(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa)$ の頂点代数的対象 V に対して, その Drinfeld-Sokolov 簡約 $H^0_{DS}(V)$ が頂点代数として定義される ([FF90]).

とする.

定理 3.5 (Ara09b)**.** *$\mathrm{KL}(\widehat{\mathfrak{g}}_\kappa)$ の頂点代数的対象 V に対して次が成立する.*

$$X_{H^0_{DS}(V)} \cong X_V \times_{\mathfrak{g}^*} \mathcal{S}.$$

($\mathcal{S}$ は Kostant-Slodowy の横断片).

定理 3.5 と (16) から特に,

$$X_{H^0_{DS}(\mathcal{D}^{ch}_{G,\kappa})} \cong T^*G \times_{\mathfrak{g}^*} \mathcal{S} \cong G \times \mathcal{S} (= \mathrm{MT}_1) \tag{17}$$

となることが分かる.

注意 3.6. Kostant-Slodowy の横断片を一般の Slodowy の横断片に代えることにより, 一般の冪零元の付随した Drinfeld-Sokolov 簡約 [KRW03] についても定理 3.5 の主張は成立する ([A15]).

3.13. 主定理. 半単純リー環 $\mathfrak{g}$ のキリング形式を $\kappa_\mathfrak{g}$ とし,

$$\kappa_c = -\frac{1}{2}\kappa_\mathfrak{g}$$

とおく. すると $\widehat{\mathfrak{g}}_{\kappa_c}$ は臨界レベルのアフィンリー環となる.

節 2.2 で導入したシンプレクティック多様体の圏 $\mathbb{S}$ の代わりに, 次で定義される頂点代数の圏 $\mathbb{VA}$ を考える.

- **対象:** 複素半単純リー群の同型類（$\mathbb{S}$ の対象と同じ).
- **射:** $\mathrm{Hom}(G_1, G_2) = \{\mathrm{KL}((\widehat{\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2})_{\kappa_c})$ の頂点代数的対象 $\}/\sim$. ここで, $\mathfrak{g}_i = \mathrm{Lie}(G_i)$.

圏 $\mathbb{VA}$ において, $V_1 \in \mathrm{Hom}(G_1, G_2)$, $V_2 \in \mathrm{Hom}(G_2, G_3)$ の合成 $V_1 \circ V_2 \in \mathrm{Hom}(G_1, G_3)$ は次の双対 semi-infinite cohomology で定義される.

$$V_1 \circ V_2 = H^{\infty/2+\bullet}(\widehat{(\mathfrak{g}_2)}_{-\kappa_{\mathfrak{g}_2}}, \mathfrak{g}_2, V_1 \otimes V_2).$$

次の結果は Beem 等によって予想された ([BPRvR15], [Tac] も参照のこと) .

定理 3.7 ([A18])**.** *任意の複素半単純リー群 G について, 次を満たす唯一モノイダル関手*

$$\eta_G : \mathbb{B}_2 \to \mathbb{VA}$$

が存在する.

(i) $\eta_G(S^1) = G$,
(ii) $\eta_G^{BFN}(\text{シリンダー}) = \mathcal{D}^{ch}_{G,\kappa_c}$,
(iii) $\eta_G(\text{キャップ}) = H^0_{DS}(\mathcal{D}^{ch}_{G,\kappa_c})$.

さらに, 任意の 2-*cobordism* B に対して

$$\eta_G^{BFN}(B) \cong X_{\eta_G(B)}.$$

すなわち, 次の可換図式が成立する.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{B}_2 \arrow[rr, "\eta_G"] \arrow[dr, "\eta_G^{BFN}"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{VA} \arrow[dl, "随伴多様体"] \\
 & \mathbb{S} &
\end{tikzcd}$$

3.14. 定理 3.7 の証明について. 定理 2.1 の場合と同様に, 定理 3.7 は次の定理から従う.

定理 3.8 ([A18])**.** 複素半単純リー群 G と $r \geq 1$ について, 次の満たす頂点代数の族 $\{V_r \mid r \geq 1\}$ が唯一存在する.

(i) V_r は $\mathrm{KL}(\widehat{(\mathfrak{g}^{\oplus r})}_{\kappa_c})$ の頂点代数的対象である.
(ii) $V_2 = \mathcal{D}^{ch}_{G,\kappa_c}$.
(iii) $V_1 = H^0_{DS}(\mathcal{D}^{ch}_{G,\kappa_c})$.
(iv) $H^{\infty/2+i}(\widehat{\mathfrak{g}}_{-\kappa_c}, \mathfrak{g}, V_r \otimes V_s) \cong \delta_{i,0} V_{r+s-2}$.

さらに,

(i) 各 V_r は単純かつコンフォーマル. 中心電荷は

$$\begin{aligned}
&\dim(\mathrm{MT}_r) - 24(r-2)(\rho|\rho^\vee) \\
&= r\dim\mathfrak{g} - (r-2)\,\mathrm{rk}\,\mathfrak{g} - 24(r-2)(\rho|\rho^\vee).
\end{aligned}$$

で与えられる. ここで, $\rho = 1/2\sum_{\alpha\in\Delta_+}\alpha$, $\rho^\vee = 1/2\sum_{\alpha\in\Delta_+}\alpha^\vee$, Δ_+ は $\mathfrak{g}$ の正ルートの集合.

(ii) T を G の極大トーラスとすると, $(z_1, \ldots, z_r) \in T^r$ について,

$$\mathrm{tr}_{V_r}(q^{L_0} z_1 z_2 \ldots z_r) = \sum_{\lambda \in P_+} \left(\frac{q^{\langle \lambda, \rho^\vee \rangle} \prod_{k=1}^\infty (1-q^j)^{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}}}{\prod_{\alpha\in\Delta_+}(1 - q^{\langle \lambda+\rho, \alpha^\vee\rangle})} \right)^{r-2} \prod_{k=1}^r \mathrm{tr}_{\mathbb{V}_\lambda}(q^{-D} z_k)$$

ここで, $\mathbb{V}_\lambda$ は最高ウエイト λ の $\widehat{\mathfrak{g}}_{\kappa_c}$ のワイル加群: $\mathbb{V}_\lambda = U(\widehat{\mathfrak{g}}_{\kappa_c}) \otimes_{U(\mathfrak{g}[t] \oplus \mathbb{C}K)} E_\lambda$, E_λ は最高ウエイト λ の $\mathfrak{g}$ の既約表現, D は *Kac-Moody* 代数の標準的な *degree* 作用素.

(iii) 各 r について,

$$X_{V_r} \cong \mathrm{MT}_r\,.$$

定理 3.8 から, η_G^{BFN} の場合と同様に、種数が零で境界が r 個の S^1 である連結な 2-bordismB_r に対し,

$$\eta_G(B_r) = V_r$$

定めれば, η_G は定理 3.7 の条件を満たす関手 $\eta_G : \mathbb{B}_2 \longrightarrow \mathbb{VA}$ に拡張されることが分かる.

3.15. クラス $\mathcal{S}$ のカイラル代数と Beem-Rastelli 予想. クラス $\mathcal{S}$ 理論の $\mathbb{V}$ による像として得られる頂点代数は, **クラス $\mathcal{S}$ のカイラル代数**と呼ばれる ([BPRvR15]). Beem 等 [BPRvR15] によると, クラス $\mathcal{S}$ のカイラル代数について次が成立する.

$$\mathbb{V}(S_G(\Sigma)) = \eta_G(B).$$

ただし, 節 2.6 の場合と同様に, Σ は連結な点付きリーマン面としたとき, B を連結な, Σ と同じ種数を持ち, Σ の点の数と同じだけの境界を持つ 2-bordism.

従って、定理 3.7 の最後の主張により, Beem-Rastelli 予想 (予想 1) がクラス $\mathcal{S}$ 理論に対して証明されたことになる.

3.16. クラス $\mathcal{S}$ のカイラル代数の例. $G = SL_2$ 場合を考える. まず, $r = 3$ の場合は

$$\mathrm{MT}_3 = \eta^{BFN}_{SL_2}(\text{パンツ}) = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$$

であったが,

$$V_3 = \eta_{SL_2}(\text{パンツ}) = \beta\gamma(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$$

となる. ここで, $\beta\gamma(M)$ はシンプレクティックベクトル空間 M に付随する $\beta\gamma$ 系 (= ワイル代数の自然なアフィン化). $X_{V_3} \cong \mathrm{MT}_3$ はすぐに確かめられる.

次に, $r = 4$ の場合は

$$\mathrm{MT}_4 = \eta^{BFN}_{SL_2}(B_4) = \overline{\mathbb{O}_{min}} \quad \text{in } D_4$$

であったが,

$$V_4 = \eta_{SL_2}(B_4) = L_{-2}(D_4)$$

となる. 定理 3.8 によると

$$X_{L_{-2}(D_4)} \cong \overline{\mathbb{O}_{min}} \quad \text{in } D_4$$

が成立するが, これは先に [AM18] によって証明された事実の別証明を与える.

次に, $G = SL_3$ の場合は,

$$\eta^{BFN}_{SL_3}(\text{パンツ}) = \overline{\mathbb{O}_{min}} \text{ in } E_6$$

であったが,

$$V_3 = \eta_{SL_3}(\text{パンツ}) = L_{-3}(E_6)$$

となる. 随伴多様体の同型

$$X_{L_{-3}(E_6)} \cong \overline{\mathbb{O}_{min}} \quad \text{in } E_6$$

は, 先に [AM18] によって証明された事実の別証明を与える.

一般のクラス $\mathcal{S}$ のカイラル代数に対しては簡易な記述は知られていない.

References

[AD95] Philip C. Argyres and Michael R. Douglas. New phenomena in SU(3) supersymmetric gauge theory. *Nuclear Phys. B*, 448(1-2):93–126, 1995.

[AG02] Sergey Arkhipov and Dennis Gaitsgory. Differential operators on the loop group via chiral algebras. *Int. Math. Res. Not.*, (4):165–210, 2002.

[A12] Tomoyuki Arakawa. A remark on the C_2 cofiniteness condition on vertex algebras. *Math. Z.*, 270(1-2):559–575, 2012.

[A15] Tomoyuki Arakawa. Associated varieties of modules over Kac-Moody algebras and C_2-cofiniteness of W-algebras. *Int. Math. Res. Not.*, 2015:11605–11666, 2015.

[A18] Tomoyuki Arakawa. Chiral algebras of class $\mathcal{S}$ and Moore-Tachikawa symplectic varieties. *arXiv:1811.01577 [math.RT].*

[AM18] Tomoyuki Arakawa and Anne Moreau. Joseph ideals and Lisse minimal W-algebras. *J. Inst. Math. Jussieu*, 17(2):397–417, 2018.

[Ati88] Michael Atiyah. Topological quantum field theories. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (68):175–186 (1989), 1988.

[BD04] Alexander Beilinson and Vladimir Drinfeld. *Chiral algebras*, volume 51 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[BFN19] Alexander Braverman, Michael Finkelberg, and Hiraku Nakajima. Ring objects in the equivariant derived Satake category arising from Coulomb branches. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 23(2):253–344, 2019. Appendix by Gus Lonergan.

[BLL+15] Christopher Beem, Madalena Lemos, Pedro Liendo, Wolfger Peelaers, Leonardo Rastelli, and Balt C. van Rees. Infinite chiral symmetry in four dimensions. *Comm. Math. Phys.*, 336(3):1359–1433, 2015.

[BPRvR15] Christopher Beem, Wolfger Peelaers, Leonardo Rastelli, and Balt C. van Rees. Chiral algebras of class $\mathcal{S}$. *J. High Energy Phys.*, (5):020, front matter+67, 2015.

[BR18] Christopher Beem and Leonardo Rastelli. Vertex operator algebras, Higgs branches, and modular differential equations. *J. High Energy Phys.*, (8):114, front matter+70, 2018.

[Bor86] Richard E. Borcherds. Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 83(10):3068–3071, 1986.

[Cal14] Damien Calaque. Three lectures on derived symplectic geometry and topological field theories. *Indag. Math. (N.S.)*, 25(5):926–947, 2014.

[DM06] Chongying Dong and Geoffrey Mason. Integrability of C_2-cofinite vertex operator algebras. *Int. Math. Res. Not.*, pages Art. ID 80468, 15, 2006.

[EM09] Lawrence Ein and Mircea Mustaţă. Jet schemes and singularities. In *Algebraic geometry—Seattle 2005. Part 2*, volume 80 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 505–546. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[FF90] Boris Feigin and Edward Frenkel. Quantization of the Drinfel′d-Sokolov reduction. *Phys. Lett. B*, 246(1-2):75–81, 1990.

[FBZ04] Edward Frenkel and David Ben-Zvi. *Vertex algebras and algebraic curves*, volume 88 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2004.

[FJLS17] Baohua Fu, Daniel Juteau, Paul Levy, and Eric Sommers. Generic singularities of nilpotent orbit closures. *Adv. Math.*, 305:1–77, 2017.

[Gai12] Davide Gaiotto. $N = 2$ dualities. *J. High Energy Phys.*, (8):034, front matter + 57, 2012.

[GMN13] Davide Gaiotto, Gregory W. Moore, and Andrew Neitzke. Wall-crossing, Hitchin systems, and the WKB approximation. *Adv. Math.*, 234:239–403, 2013.

[GMS01] Vassily Gorbounov, Fyodor Malikov, and Vadim Schechtman. On chiral differential operators over homogeneous spaces. *Int. J. Math. Math. Sci.*, 26(2):83–106, 2001.

[KRW03] Victor Kac, Shi-Shyr Roan, and Minoru Wakimoto. Quantum reduction for affine superalgebras. *Comm. Math. Phys.*, 241(2-3):307–342, 2003.

[Koc04] Joachim Kock. *Frobenius algebras and 2D topological quantum field theories*, volume 59 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[Li05] Haisheng Li. Abelianizing vertex algebras. *Comm. Math. Phys.*, 259(2):391–411, 2005.

[MSV99] Fyodor Malikov, Vadim Schechtman, and Arkady Vaintrob. Chiral de Rham complex. *Comm. Math. Phys.*, 204(2):439–473, 1999.

[MV07] Ivan Mirković and Kari Vilonen. Geometric Langlands duality and representations of algebraic groups over commutative rings. *Ann. of Math. (2)*, 166(1):95–143, 2007.

[MT12] Gregory W. Moore and Yuji Tachikawa. On 2d TQFTs whose values are holomorphic symplectic varieties. In *String-Math 2011*, volume 85 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 191–207. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012.

[Nak18] Hiraku Nakajima. Introduction to a provisional mathematical definition of Coulomb branches of 3-dimensional $\mathcal{N} = 4$ gauge theories. In *Modern geometry: a celebration of the work of Simon Donaldson*, volume 99 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 193–211. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2018.

[Tac] Yuji Tachikawa. On some conjectures on VOAs. http://member.ipmu.jp/yuji.tachikawa/transp/voaconj2.pdf.

[WX] Yifan Wang and Dan Xie. Codimension-two defects and Argyres-Douglas theories from outer-automorphism twist in 6d $(2,0)$ theories. *preprint*. arXiv:1805.08839[hep-th].

[XYb] Dan Xie and Wenbin Yan. Schur sector of argyres-douglas theory and W-algebra. *preprint*. arXiv:1904.09094 [hep-th].

[XYY] Dan Xie, Wenbin Yan, and Shing-Tung Yau. Chiral algebra of Argyres-Douglas theory from M5 brane. *preprint*. arXiv:1604.02155[hep-th].

[XYa19] Dan Xie and Wenbin Yan. 4d $\mathcal{N}=2$ SCFTs and lisse W-algebras. *arXiv:1910.02281 [hep-th]*.

[Zhu96] Yongchang Zhu. Modular invariance of characters of vertex operator algebras. *J. Amer. Math. Soc.*, 9(1):237–302, 1996.

[松 03] 松澤淳一. **特異点とルート系**. 朝倉書店, 2003.

京都大学 数理解析研究所 〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町
Email address: arakawa@kurims.kyoto-u.ac.jp