WDVV 方程式の一般化と Painlevé VI 方程式[1]

東京農工大学
関口次郎

Abstract: Painlevé VI 方程式の代数関数から potential vector field を構成することを問題にする．[9] では，それまでに構成したものをまとめた．[14] にある 45 種類の代数関数解すべてに対して構成することを試みたが，残念ながら 30 種類程度のものしかできなかった．本稿では，まず問題の背景を説明して，多項式からなる potential vector field について説明する．次に代数関数解から，平坦座標，potential vector field を構成する方法の説明をする．[9] では別の構成法を説明しているが，本稿のものの方が強力である．potential vector field の具体形は別の機会に報告する予定である．

1 序文

本稿の前半は主に加藤満生，眞野智行氏との共同研究の紹介である（[8], [9], [10]）．後半は，最近の計算結果の報告である．

WDVV 方程式は conformal field theory 由来の連立非線型微分方程式である．[10] においてそれを一般化して，拡張 WDVV 方程式と呼んだ．WDVV 方程式の解は (pre)potential と呼ばれる．それにならって，拡張 WDVV 方程式の解を potential vector field と呼ぶ．3 変数の場合には，いくつかの条件のもとで，だいたい拡張 WDVV 方程式と Painlevé VI 方程式の間の対応が成り立つ．したがって，potential vector field を求めることができれば，Painlevé VI 方程式の解を構成できることになる．よく知られていることであるが，例外的な場合を除けば Painlevé VI 方程式の解は超越関数であり，具体的は表示を与えることはまだ知られていない．このことは，一般的には potential vector field の具体的な解の表示を与えることはあまり期待できないことを示唆している．一方では，Painlevé VI 方程式の代数関数解についての研究が進展して，それらの分類が完成した (cf. [14])．この結果をみると，いくつかの系列からなるものと，45 種類の散在的に存在するものとからなることが観察される．これらの 45 種類の代数関数に対応する potential vector field の具体形を決定することは挑戦するだけの価値のある問題であろう．議論は前後するが，B. Dubrovin は 3 変数の WDVV 方程式の解 (=prepotential) を調べるのに，まず多項式解を求めることを考え，それらが階数 3 の既約実鏡映群と対応すること，またそのときの変数が斎藤・矢野・関口 ([19]) で考えていた flat coordinate と一致することに気付いた．このことは，多項式成分の potential vector field を調べることも興味ある研究対象であることを示唆している．本稿ではこれらの二つの問題を扱う．

本稿の内容を簡単に紹介する．始めに拡張 WDVV 方程式の定義を述べ，次に大久保方程式系との関係に言及する．ここからは主に 3 変数の場合に限定する．まず，拡張 WDVV 方程式と実鏡映群，複素鏡映群との関係に言及する．§2 から §5 までは [10] に詳しく書いてある．§6 では，ひとつの目的である，多項式からなる potential vector field について議論する．これまでに構成されたものを列挙する．残念ながら，まだ理論的な意味づけはできていない．§6 の詳細は [9] にある．§7 以降では，Painlevé VI 方程式の代数関数解に対応する potential vector field を構成する問題に移る．§8.2 では共同研究者の加藤満生氏が提案された方法の説明をする．神保・三輪 ([7]) は 2 階線型微分方程式系の標準形を与え，それから Painlevé VI 方程式を導いて

[1] 16th Oka Symposium, 2017/12/2-12/3, 奈良女子大学

いる．この議論を逆にたどり，代数関数解から線型微分方程式を構成するというアイデアである．この種の 2 階線型微分方程式系を一般に構成できなかったことが [9] において，すべての場合に potential vector field を構成できなかったことの最大の理由である．これから先の議論は [10] にある middle convolution を適用するのだが，それは [9, §2] で説明している．

代数関数解の構成と分類については，言及しないがいくつかの重要な仕事があり，最終的に Lisovyy-Tykhyy [14] によって分類問題は解決した．代数関数解のうち散在的に存在する 45 種類のものに対応する potential vector field を構成することが最近の筆者の研究対象である．まだ確認していないが，本文で説明する方法によってこの課題を解決する見通しはついたようである．potential vector field は拡張 WDVV 方程式の解であるから，多くの代数関数成分の解を求めたことにもなるが，その応用があるのかどうか．また，代数関数解から自然に構成された自由因子の性質を調べることも面白い問題と思われる．

2　WDVV 方程式とその一般化

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を $\mathbf{C}^n$ の標準的な座標とする．また w_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ は $0 < w_1 \leq w_2 \leq \cdots \leq w_n$ である定数とする．

$$E = \frac{1}{w_n} \sum_{k=1}^{n} w_k x_k \partial_k,$$

をオイラー•ベクトル場とする．ここで $\partial_k = \partial/\partial x_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ とする．$h_1(x), h_2(x), \ldots, h_n(x)$ は

$$E h_j = (\frac{w_j}{w_n} + 1) h_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$h_j = \begin{cases} x_j x_n + H_j(x_1, \ldots, x_{n-1}) & (j = 1, 2, \ldots, n-1), \\ \frac{1}{2} x_n^2 + H_n(x_1, \ldots, x_{n-1}) & (j = n) \end{cases}$$

を満たすような荷重斉次式とする．ここで $H_j(x_1, \ldots, x_{n-1})$ は $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ の関数である．$h_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ から $\gamma_{ij} = \partial_i h_j$ を定める．すると $n \times n$ 行列 $C = (\gamma_{ij})$ が得られる．$\gamma_{nj} = x_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ は明らか．次に C を使って行列

$$\tilde{B}^{(p)} = \partial_p C \quad (p = 1, 2, \ldots, n).$$

を定める．$b_{ij}^{(p)}$ を $\tilde{B}^{(p)}$ の (i, j) 成分とする．$\tilde{B}^{(p)}$ $(p = 1, 2, \ldots, n)$ の基本的な性質をまとめておく :

1. $\partial_p \tilde{B}^{(q)} = \partial_q \tilde{B}^{(p)} \quad (\forall p,\ q)$,
2. $b_{pq}^{(r)} = b_{rq}^{(p)} \quad (\forall p,\ q,\ r)$,
3. $b_{nq}^{(p)} = \delta_{pq} \quad (\forall p,\ q)$,
4. $\tilde{B}^{(n)} = I_n$,
5. $\partial_n \tilde{B}^{(p)} = O \quad (p = 1, 2, \ldots, n-1)$,

ここで δ_{pq} はクロネッカーのデルタで I_n は単位行列.

Definition 1 $\tilde{B}^{(p)} \tilde{B}^{(q)} = \tilde{B}^{(q)} \tilde{B}^{(p)}$ $(\forall p,\ q = 1, 2, \ldots, n)$ が成り立つとき，$\vec{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ を *potential vector field* という．また座標 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を「平坦座標」という．

J を (i,j)-成分が $\delta_{i,n-j+1}$ である $n\times n$ 行列とする．もし CJ が対称行列になれば，荷重斉次関数 $P(x)$ で

$$\partial_i P = h_{n-i+1} \quad (i=1,2,\ldots,n).$$

が成り立つものが存在する．このとき P を prepotential あるいはpotentialという．(pre)potential P が存在するとき，行列 $\tilde{B}^{(p)}$ $(p=1,2,\cdots,n)$ が可換，すなわち，$\tilde{B}^{(p)}\tilde{B}^{(q)} = \tilde{B}^{(q)}\tilde{B}^{(p)}$ $(\forall p,\, q)$ が成り立つが，この等式から行列成分をとればいくつかの非線型微分方程式が得られる．したがって P に対する非線形微分方程式系が導かれる．この系を「WDVV 方程式」という．(詳しくは [5], [16] 参照)

CJ が対称行列にならないとき，potential は存在しない．この場合には， 行列 $\tilde{B}^{(p)}$ $(p=1,2,\cdots,n)$ の可換性から potential vector field の成分はある非線型微分方程式系の解になる．この意味で，$\tilde{B}^{(p)}\tilde{B}^{(q)} = \tilde{B}^{(q)}\tilde{B}^{(p)}$ $(\forall p,\, q)$ あるいはその行列成分から得られる非線型微分方程式全体を「拡張 WDVV 方程式」という．

3 potential vector field から構成される自由因子

$\vec{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ を potential vector field とする．$n\times n$ 行列 $T=(T_{ij})$ を

$$T = \frac{1}{w_n}\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \partial_j C = \frac{1}{w_n}\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \tilde{B}^{(j)}$$

で定義する．さらに $F(x) = \det T$ とおく．仮定より

$$F(x) = x_n^n + p_1(x')x_n^{n-1} + \cdots + p_{n-1}(x')x_n + p_n(x')$$

となる．(ここで，$p_j(x')$ $(j=1,2,\cdots,n)$ は x' の関数である．)

T_{ij} を T の (i,j) 成分として，V_i を

$$V_i = \sum_{j=1}^{n} T_{ij}\partial_j \quad (i=1,2,\ldots,n)$$

で定まるベクトル場とする．

超曲面 $\mathcal{S}_F = \{x\in \mathbf{C}^n;\ F(x)=0\}$ には著しい性質がある．まず次が成り立つ．

Proposition 2

$$V_i F = w_n(\mathrm{tr}\tilde{B}^{(i)})F \quad (i=1,2,\ldots,n).$$

これから次の定理はただちにしたがう．

Theorem 3 $F(x)$ が *reduced* であれば， $\mathcal{S}_F$ は自由因子である．

自由因子については [18] 参照.
ここで例を説明する．

Example 4 多項式 P を

(5) $\quad P = \frac{1}{2}(x_1x_3^2 + x_2^2x_3) + \frac{1}{4}x_1^2x_2^2 + \frac{1}{60}x_1^5$

で定めると，P は *prepotential* である．これは次のようにして確かめられる．まず $(w_1, w_2, w_3) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1)$ である．したがって $P = \frac{1}{4}(2x_1\partial_{x_1} + 3x_2\partial_{x_2} + 4x_3\partial_{x_3})$ はオイラー・ベクトル場である．F の偏微分を計算することで

$$\begin{array}{rcl} h_1 &=& x_1x_3 + \frac{1}{2}x_2^2, \\ h_2 &=& x_2x_3 + \frac{1}{2}x_1^2x_2, \\ h_3 &=& \frac{1}{2}x_3^2 + \frac{1}{2}x_1x_2^2 + \frac{1}{12}x_1^4 \end{array}$$

がわかる．次に C を求める．結果は

$$C = \begin{pmatrix} x_3 & x_1x_2 & \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{3}x_1^3 \\ x_2 & x_3 + \frac{1}{2}x_1^2 & x_1x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

である．これから

$$\tilde{B}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & x_2 & x_1^2 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}^{(3)} = I_3$$

が得られる．$\tilde{B}^{(1)}\tilde{B}^{(2)} = \tilde{B}^{(2)}\tilde{B}^{(1)}$ は簡単にわかるから，P は *potential* である．$T = EC$ であるから，

$$T = \begin{pmatrix} x_3 & \frac{5}{4}x_1x_2 & \frac{3}{4}x_2^2 + \frac{1}{2}x_1^3 \\ \frac{3}{4}x_2 & x_3 + \frac{1}{2}x_1^2 & \frac{5}{4}x_1x_2 \\ \frac{1}{2}x_1 & \frac{3}{4}x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

がわかる．すると

$$\det(T) = x_3^3 + \frac{1}{2}x_1^2x_3^2 - \left(\frac{9}{4}x_2^2 + \frac{1}{4}x_1^3\right)x_1x_3 + \frac{27}{64}x_2^4 + \frac{7}{8}x_1^3x_2^2 - \frac{1}{8}x_1^6.$$

4 次式 $Q(t) = t^4 + y_1t^2 + y_2t + y_3$. の判別式との関係に言及する．$y_1 = -x_1$, $y_2 = \frac{1}{2}x_2$, $y_3 = -\frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{8}x_1^3$, とすれば，$Q(t)$ の判別式は定数倍を除いて $\det(T)$ に一致することが確かめられる．一般に n 次式の判別式は自由因子になる．*Theorem3* はこの事実の一般化といえる．

4 多変数大久保型微分方程式系

これまでに導入した記号は説明なしに使う．$\vec{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ は potential vector field とする．すると定義より，$\tilde{B}^{(p)}\tilde{B}^{(q)} = \tilde{B}^{(q)}\tilde{B}^{(p)}$ が成り立つ．$r \in \mathbf{C}$ を定数として，対角行列 $B_\infty^{(n)}$ を $B_\infty^{(n)} = \mathrm{diag}(r + w_1, r + w_2, \ldots, r + w_n)$ で定義する．このとき

(6)　$B^{(p)} = -T^{-1}\tilde{B}^{(p)}B_\infty^{(n)}$

によって $n \times n$ 行列 $B^{(p)}$ $(p = 1, 2, \ldots, n)$ を定め，

(7)　$\partial_p Y = B^{(p)}Y \quad (p = 1, 2, \ldots, n)$

によって Y についての微分方程式系を定義する．1-form $\Omega = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} B^{(p)}dx_p$ を使えば，(7) は次のようになる：

(8)　$dY = \Omega Y.$

Theorem 9 $\vec{h}$ が *potential vector field* であれば，微分方程式系 *(8)* は積分可能である．逆に *(8)* が積分可能であれば，$\vec{h}$ は *potential vector field* である．

$B^{(p)}$ を任意にとっても系 (8) が積分可能になるわけではない．$\tilde{B}^{(p)}$ $(p = 1, 2, \cdots, n)$ が可換になること，すなわち $\vec{h}$ が potential vector field になることに帰着される．

$T_0 = x_n I_n - T$ とおく．$T - x_n I_n$ は x_n によらず，また $B^{(n)} = -T^{-1} B_\infty^{(n)}$ であるから，微分方程式

(10) $\partial_n Y = B^{(n)} Y$

は

(11) $(x_n I_n - T_0)\partial_n Y = -B_\infty^{(n)} Y$

になる．(11) を変数 x_n の常微分方程式とみると，大久保型微分方程式である．この意味で系 (8) は大久保型微分方程式の多変数への一般化のひとつである．(11) は x_n についての微分方程式であり，$x' = (x_1, \cdots, x_{n-1})$ をパラメータとみなせる．このように見れば，(8) は (11) の変形方程式とみなせる．

5 実鏡映群，複素鏡映群との関係

B. Dubrovin が行った考察をたどる形で，WDVV 方程式と鏡映群の関係を説明する．さらに，拡張 WDVV 方程式への一般化について言及する．

Dubrovin は WDVV 方程式の実体を知るために，$n = 3$ の場合に多項式である (pre)potential を求めることにした．(もちろん，$n = 2$ の場合はそれほど難しくはない．) その結果，斉次式にならないものが 3 種類あることを示した．それらは

$$\begin{aligned} A_3 \text{ case}: \quad P &= \tfrac{x_1x_3^2 + x_2^2x_3}{2} + \tfrac{x_1^2x_2^2}{4} + \tfrac{x_1^5}{60}, \\ B_3 \text{ case}: \quad P &= \tfrac{x_1x_3^2 + x_2^2x_3}{2} + \tfrac{x_1x_2^3}{6} + \tfrac{x_1^3x_2^2}{6} + \tfrac{x_1^7}{210}, \\ H_3 \text{ case}: \quad P &= \tfrac{x_1x_3^2 + x_2^2x_3}{2} + \tfrac{x_1^2x_2^3}{6} + \tfrac{x_1^5x_2^2}{20} + \tfrac{x_1^{11}}{3960} \end{aligned}$$

である．A_3 case とあるのは前節の例で取り上げたものである．これらの場合に $\det(T)$ を計算すると次のようになる：

$$\begin{aligned} \Delta_{A_3} &= \tfrac{1}{64}(-8x_1^6 + 56x_1^3x_2^2 + 27x_2^4 - 16x_1^4x_3 - 144x_1x_2^2x_3 + 32x_1^2x_3^2 + 64x_3^3), \\ \Delta_{B_3} &= -\tfrac{1}{27}(x_1^3 - 3x_1x_2 + 3x_3)(x_1^6 + 6x_1^4x_2 + 3x_1^2x_2^2 + 8x_2^3 - 18x_1x_2x_3 - 9x_3^2), \\ \Delta_{H_3} &= \tfrac{1}{1000}(-x_1^{15} - 10x_1^{12}x_2 + 80x_1^9x_2^2 + 20x_1^6x_2^3 + 920x_1^3x_2^4 + 216x_2^5 - 10x_1^{10}x_3 - 1200x_1^4x_2^2x_3 \\ &\quad -1800x_1x_2^3x_3 + 100x_1^5x_3^2 + 1000x_1^2x_2x_3^2 + 1000x_3^3). \end{aligned}$$

これらはそれぞれ A_3 型，B_3 型，H_3 型の実鏡映群の判別式とみなせる．その場合，不変式環の生成元をうまくとる必要がある．文献を調べてみると，実はその生成系から得られる $\mathbf{C}^3$ の座標を [19], [18] では「平坦座標」と呼んでいたことがわかった．以上のようにして，WDVV 方程式と実鏡映群との結びつきが明らかになった．これが Dubrovin の成果のひとつである．彼はそれに基づいて WDVV 方程式と [18] の成果を統合して Frobenius 多様体構造を定式化した．さらに C. Hertling は，多項式になるような (pre)potential は既約実鏡映群の判別式と対応するものしかないことを証明した．

次に potential vector field の場合に Dubrovin のアイデアを適用するとどうなるかを説明する．

$$\begin{aligned}
64\Delta_{A_3}|_{x_1=0} &= 27x_2^4 + 64x_3^3, \\
27\Delta_{B_3}|_{x_1=0} &= 3x_3(-8x_2^3 + 9x_3^2), \\
1000\Delta_{H_3}|_{x_1=0} &= 27x_2^5 + 125x_3^3
\end{aligned}$$

が成り立つ．これらの等式の右辺はそれぞれ E_6 型，E_7 型，E_8 型単純特異点の定義多項式である．したがって，A_3 型，B_3 型，H_3 型の実鏡映群の判別式は曲線の E_6 型，E_7 型，E_8 型単純特異点の 1 パラメータ変形族との対応があることが観察される．

この観察から，平面曲線の特異点の 1 パラメータ変形族と自由因子との間の関係の存在が示唆される．単純特異点ではないアーノルドの意味での 14 個の例外特異点の場合に適用してみる．計算による試行錯誤の末に，これらのうちで関係のあるのは

$$E_{12} : x^7 + y^3,\ E_{13} : y(x^5 + y^2),\ E_{14} : x^8 + y^3$$

であることがわかった．これらの場合，potential vector field を求めることができた．以下にその結果を与える．

(I) $\underline{E_{12}\ \text{case}}$

$$\begin{aligned}
h_1 &= \tfrac{1}{3}(-x_1^3x_2 + 9x_2^3 + 3x_1x_3), \\
h_2 &= \tfrac{1}{45}(x_1^5 + 45x_1^2x_2^2 + 45x_2x_3), \\
h_3 &= \tfrac{1}{126}(-4x_1^7 + 189x_1^4x_2^2 + 1134x_1x_2^4 + 63x_3^2)
\end{aligned}$$

とおく．すると $\vec{h} = (h_1, h_2, h_3)$ は potential vector field であり，$F(x) = \det T$ は自由因子になる．ここで

$$\begin{aligned}
F(x) = \tfrac{1}{3087}(&1344x_1^9x_2 - 3843x_1^6x_2^3 + 260820x_1^3x_2^5 + 157464x_2^7 + 448x_1^7x_3 - 22491x_1^4x_2^2x_3 \\
&-142884x_1x_2^4x_3 + 3087x_1^2x_2x_3^2 + 3087x_3^3).
\end{aligned}$$

定義より $F(0, x_2, x_3) = \frac{17496}{343}x_2^7 + x_3^3$ は明らか．また，Gordan と F. Klein による 7 次方程式の解法，Klein の平面 4 次曲線の研究以来よく知られていることと比較することによって，$F(x)$ は複素鏡映群 ST24 の判別式とみなせることがわかる．

(II) $\underline{E_{13}\ \text{case}}$

$$\begin{aligned}
h_1 &= -\frac{x_1^6}{30} - \frac{x_1^4x_2}{2} + \frac{x_1^2x_2^2}{2} + \frac{x_2^3}{3} + x_1x_3, \\
h_2 &= \frac{5x_1^7}{6} + \frac{x_1^5x_2}{2} + \frac{5x_1^3x_2^2}{2} - \frac{5x_1x_2^3}{6} + x_2x_3, \\
h_3 &= -\frac{21x_1^{10}}{8} + 5x_1^8x_2 + \frac{35x_1^6x_2^2}{4} + \frac{35x_1^2x_2^4}{8} - \frac{7x_2^5}{20} + \frac{x_3^2}{2}
\end{aligned}$$

とおく．すると $\vec{h} = (h_1, h_2, h_3)$ は potential vector field であり，$F(x) = \det T$ は自由因子になる．ここで

$$\begin{aligned}
F(x) &= \tfrac{1}{1000}x_1(15925x_1^{14} + 92250x_1^{12}x_2 - 91875x_1^{10}x_2^2 + 41500x_1^8x_2^3 + 97275x_1^6x_2^4 + 82866x_1^4x_2^5 \\
&\quad -11165x_1^2x_2^6 + 6720x_2^7) + \tfrac{3}{100}(405x_1^{10} - 800x_1^8x_2 - 1450x_1^6x_2^2 - 775x_1^2x_2^4 + 64x_2^5)x_3 \\
&\quad +\tfrac{3}{10}x_1(x_1^4 + 10x_1^2x_2 - 5x_2^2)x_3^2 + x_3^3
\end{aligned}$$

定義より，$F(0, x_2, x_3) = \frac{48}{25}x_2^5x_3 + x_3^3$ は明らか．また，$F(x)$ は複素鏡映群 ST27 の判別式とみなせる．

(III) $\underline{E_{14}\ \text{case}}$

$$\begin{aligned}
h_1 &= \tfrac{5}{9}x_1^9 - \tfrac{28}{3}x_1^6x_2 - \tfrac{70}{3}x_1^3x_2^2 + \tfrac{140}{9}x_2^3 + x_1x_3, \\
h_2 &= \tfrac{140}{11}x_1^{11} - 15x_1^8x_2 + 84x_1^5x_2^2 + 70x_1^2x_2^3 + x_2x_3, \\
h_3 &= -\tfrac{3680}{3}x_1^{16} - \tfrac{216160}{39}x_1^{13}x_2 + \tfrac{30016}{3}x_1^{10}x_2^2 - \tfrac{2240}{3}x_1^7x_2^3 + \tfrac{39200}{3}x_1^4x_2^4 + \tfrac{7840}{3}x_1x_2^5 + \tfrac{1}{2}x_3^2
\end{aligned}$$

とおく．すると $\vec{h}=(h_1,h_2,h_3)$ は potential vector field であり， $F(x)=\det T$ は自由因子になる．ここで

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \tfrac{1}{6}(-1596125x_1^{24}+9079000x_1^{21}x_2+20771940x_1^{18}x_2^2+28214984x_1^{15}x_2^3-52694110x_1^{12}x_2^4\\
&\quad +43717800x_1^9x_2^5+10941700x_1^6x_2^6+12691000x_1^3x_2^7+385875x_2^8)\\
&\quad +2x_1(2875x_1^{15}+13510x_1^{12}x_2-25326x_1^9x_2^2+1960x_1^6x_2^3-35525x_1^3x_2^4-7350x_2^5)x_3\\
&\quad -2x_1^2(5x_1^6-56x_1^3x_2-70x_2^2)x_3^2+x_3^3
\end{aligned}
$$

定義より $F(0,x_2,x_3)=\frac{128625}{2}x_2^8+x_3^3$ は明らか．ところで，変数の重みをみると対応する複素鏡映群は存在しない．

このことは，拡張 WDVV 方程式の場合，C. Hertling の結果の類似は成り立たないことを示している．

実でない階数 3 の既約な複素鏡映群は系列になる場合を除くと，ST24, ST25, ST26, ST27 の 4 種類存在する．ST25, ST26 の場合には判別式をみる限り A_3 型，B_3 型鏡映群と同じになる．ST24, ST27 は上で説明したとおりである．階数が 4 以上の場合にも potential vector field は計算した．(正確には"well-generated" な複素鏡映群という条件が必要である．)

6 3 次元の場合の多項式からなる potential vector field について

$n=3$ の場合に，拡張 WDVV 方程式を H_1,H_2,H_3 についての微分方程式として書いてみると

$$
(12)\quad \begin{cases}
\partial_{x_1}^2 H_3 &= (\partial_{x_1}\partial_{x_2}H_1-\partial_{x_2}^2H_2)\cdot\partial_{x_1}^2H_2+(\partial_{x_1}\partial_{x_2}H_2-\partial_{x_1}^2H_1)\cdot\partial_{x_1}\partial_{x_2}H_2,\\
\partial_{x_1}\partial_{x_2}H_3 &= -\partial_{x_1}\partial_{x_2}H_1\cdot\partial_{x_1}\partial_{x_2}H_2+\partial_{x_2}^2H_1\cdot\partial_{x_1}^2H_2,\\
\partial_{x_2}^2H_3 &= (\partial_{x_1}\partial_{x_2}H_1-\partial_{x_2}^2H_2)\cdot\partial_{x_1}\partial_{x_2}H_1+(\partial_{x_1}\partial_{x_2}H_2-\partial_{x_1}^2H_1)\cdot\partial_{x_2}^2H_1,\\
E_oH_j &= (w_j/w_3+1)H_j\ (j=1,2,3)
\end{cases}
$$

となることがわかる．ここで $E_o=\frac{1}{w_3}(w_1x_1\partial_{x_1}+w_2x_2\partial_{x_2})$ である．

これらの方程式から H_3 を消去して H_1,H_2 の微分方程式を求めると

$$
(13)\quad \begin{cases}
H_{1,20}H_{2,12}-2H_{2,11}H_{2,12}+H_{2,03}H_{2,20}-2H_{1,11}H_{2,21}+H_{2,02}H_{2,21}+H_{1,02}H_{2,30}=0,\\
H_{1,12}H_{1,20}-2H_{1,11}H_{1,21}+H_{1,02}H_{1,30}+H_{1,21}H_{2,02}-2H_{1,12}H_{2,11}+H_{1,03}H_{2,20}=0,\\
E_oH_j=(w_j/w_3+1)H_j\ (j=1,2)
\end{cases}
$$

が得られる．ここで簡単のため $H_{j,pq}=\partial_{x_1}^p\partial_{x_2}^qH_j\ (i=1,2)$ とした．

Remark 14 *(13)* はわかりにくいので少し書き直してみる．(x_1,x_2) の関数 $f=f(x_1,x_2)$ に対して

$$
\mathcal{S}(f)=\begin{pmatrix}\partial_{x_1}^2 f & \sqrt{-1}\partial_{x_1}\partial_{x_2}f\\ \sqrt{-1}\partial_{x_1}\partial_{x_2}f & \partial_{x_2}^2 f\end{pmatrix}
$$

とおく．また $J=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ とする．このとき，*(13)* は次のようになる：

$$
(15)\quad \begin{cases}
\mathrm{Tr}[\mathcal{S}(H_1)J\mathcal{S}(\partial_{x_1}H_2)J+\mathcal{S}(H_2)J\mathcal{S}(\partial_{x_2}H_2)J]=0,\\
\mathrm{Tr}[\mathcal{S}(H_1)J\mathcal{S}(\partial_{x_1}H_1)J+\mathcal{S}(H_2)J\mathcal{S}(\partial_{x_2}H_1)J]=0,\\
E_oH_j=(w_j/w_3+1)H_j\ (j=1,2).
\end{cases}
$$

WDVV 方程式の場合の Dubrovin の接近法をみると次は基本的である．

Problem 16 H_1, H_2 がともに多項式である *(15)* の解を分類せよ．

このままではどう取り扱えばよいかわからないので，$w_1 = 1, w_2 = d$ とする．簡単のため d は正整数とする．そして

$$
(17) \quad \begin{cases} H_1 &= x_1^{k_1} \sum_{j=0}^{m_1} a_j x_1^{jd} x_2^{m_1-j}, \\ H_2 &= x_1^{k_2} \sum_{j=0}^{m_1} b_j x_1^{jd} x_2^{m_2-j}, \end{cases}
$$

の形にかける解を求めることにする．すると

$$
k_1 + dm_1 = 1 + w_3, \quad k_2 + dm_2 = d + w_3
$$

問題は,「(15) が成り立つように定数 a_j, b_j を定めることができるか？」となる．r_1, k_2, m_1, m_2, d が以下の表にある場合には potential vector field を決定できた．具体形はそのあとに書いた．これらの potential vector field から Painlevé VI 方程式の代数関数解が求まるが，その代数関数解を Lisoyyy-Tykhyy[14] にあるリストに Solution n とあるものを LTn とした．d が整数ではなく有理数の場合にも多項式成分の potential vector field は存在する．例えば，§4 の (I) E_{12} case に与えたものである．

	k_1	k_2	m_1	m_2	d
1	1	0	5	6	3
2	0	1	3	3	2
3	1	0	3	4	4
4	0	1	4	4	2
5	1	0	4	5	6
6	1	0	4	5	5
7	1	0	3	4	5
8	1	0	5	6	2
9	0	1	3	3	2
10	0	2	3	3	3
11	1	0	3	4	14

1. **Solution 20 obtained by P. Boalch (LT1)**

$$
w_1 = \frac{1}{15},\ w_2 = \frac{1}{5},\ w_3 = 1
$$

$$
\begin{aligned}
h_1 &= \tfrac{1}{13} x_1 (5x_1^{12} x_2 + 130 x_1^6 x_2^3 - 351 x_2^5 + 13 x_3), \\
h_2 &= \tfrac{1}{102} (5x_1^{18} - 255 x_1^{12} x_2^2 - 3825 x_1^6 x_2^4 + 459 x_2^6 + 102 x_2 x_3), \\
h_3 &= \tfrac{1}{58} (10 x_1^{30} + 1450 x_1^{24} x_2^2 - 8700 x_1^{18} x_2^4 + 234900 x_1^{12} x_2^6 + 587250 x_1^6 x_2^8 \\
&\quad + 23490 x_2^{10} + 29 x_3^2),
\end{aligned}
$$

2. **Solution by Kitaev (LT2)**

$$
w_1 = \frac{1}{5},\ w_2 = \frac{2}{5},\ w_3 = 1
$$

$$
\begin{aligned}
h_1 &= \tfrac{1}{60} (x_1^6 + 30 x_1^2 x_2^2 + 20 x_2^3 + 60 x_1 x_3), \\
h_2 &= \tfrac{1}{20} x_2 (3x_1^5 + 10 x_1^3 x_2 + 10 x_1 x_2^2 + 20 x_3), \\
h_3 &= \tfrac{1}{480} (x_1^{10} + 60 x_1^6 x_2^2 + 120 x_1^4 x_2^3 + 180 x_1^2 x_2^4 + 24 x_2^5 + 240 x_3^2).
\end{aligned}
$$

3. **Solution by Kitaev (LT5)**

$$w_1 = \frac{1}{12},\ w_2 = \frac{1}{3},\ w_3 = 1$$

$$\begin{aligned}
h_1 &= \tfrac{1}{78}x_1(40x_1^{12} + 858x_1^4x_2^2 - 715x_2^3 + 78x_3),\\
h_2 &= \tfrac{1}{12}x_2(128x_1^{12} - 528x_1^8x_2 + 528x_1^4x_2^2 - 11x_2^3 + 12x_3),\\
h_3 &= \tfrac{1}{184}(2048x_1^{24} + 97152x_1^{16}x_2^2 - 259072x_1^{12}x_2^3 + 400752x_1^8x_2^4 - 133584x_1^4x_2^5\\
&\quad +2783x_2^6 + 92x_3^2)
\end{aligned}$$

4. **Klein solution of P. Boalch (LT8)**

$$w_1 = \frac{1}{7},\ w_2 = \frac{2}{7},\ w_3 = 1$$

$$\begin{aligned}
h_1 &= \tfrac{1}{840}(15x_1^8 + 56x_1^6x_2 - 210x_1^4x_2^2 + 35x_2^4 + 840x_1x_3),\\
h_2 &= \tfrac{1}{840}(-175x_1^9 + 180x_1^7x_2 + 126x_1^5x_2^2 + 420x_1^3x_2^3 + 105x_1x_2^4 + 840x_2x_3),\\
h_3 &= \tfrac{1}{54600}(-225x_1^14 + 31395x_1^12x_2 - 5733x_1^10x_2^2 - 17745x_1^8x_2^3 + 26845x_1^6x_2^4\\
&\quad +6825x_1^4x_2^5 + 6825x_1^2x_2^6 + 325x_2^7 + 27300x_3^2).
\end{aligned}$$

5. **Octahedral solution 9 by P. Boalch (LT10)**

$$w_1 = \frac{1}{24},\ w_2 = \frac{1}{4},\ w_3 = 1$$

$$\begin{aligned}
h_1 &= -\tfrac{1}{552}x_1^{25} + \tfrac{1}{19}x_1^{19}x_2 + \tfrac{1}{2}x_1^{13}x_2^2 - \tfrac{2}{3}x_1^7x_2^3 - \tfrac{7}{4}x_1x_2^4 + x_1x_3,\\
h_2 &= -\tfrac{2}{145}x_1^{30} - \tfrac{1}{23}x_1^{24}x_2 - 4x_1^{12}x_2^3 + 8x_1^6x_2^4 + \tfrac{1}{5}x_2^5 + x_2x_3,\\
h_3 &= -\tfrac{531}{99452}x_1^{48} - \tfrac{6}{23}x_1^{42}x_2 + \tfrac{12}{23}x_1^{36}x_2^2 + \tfrac{122}{23}x_1^{30}x_2^3 + \tfrac{395}{23}x_1^{24}x_2^4 - 24x_1^{18}x_2^5 + 164x_1^{12}x_2^6\\
&\quad -88x_1^6x_2^7 + \tfrac{11}{8}x_2^8 + \tfrac{1}{2}x_3^2.
\end{aligned}$$

6. **Solution 25 by P. Boalch (LT12)**

$$w_1 = \frac{1}{20},\ w_2 = \frac{1}{4},\ w_3 = 1$$

$$\begin{aligned}
h_1 &= \tfrac{1}{114}x_1^{21} - x_1^{11}x_2^2 - \tfrac{2}{3}x_1^6x_2^3 + \tfrac{1}{2}x_1x_2^4 + x_1x_3,\\
h_2 &= \tfrac{2}{5}x_1^{25} + \tfrac{51}{38}x_1^{20}x_2 - 2x_1^{15}x_2^2 + 7x_1^{10}x_2^3 - \tfrac{3}{10}x_2^5 + x_2x_3,\\
h_3 &= \tfrac{366}{361}x_1^{40} - \tfrac{96}{7}x_1^{35}x_2 - \tfrac{440}{19}x_1^{30}x_2^2 - \tfrac{192}{19}x_1^{25}x_2^3 + \tfrac{1740}{19}x_1^{20}x_2^4 - 32x_1^{15}x_2^5 + 56x_1^{10}x_2^6\\
&\quad +\tfrac{2}{7}x_2^8 + \tfrac{1}{2}x_3^2.
\end{aligned}$$

7. **Solution 27 by P. Boalch (LT13)**

$$w_1 = \frac{1}{15},\ w_2 = \frac{1}{3},\ w_3 = 1$$

$$\begin{aligned}
h_1 &= -\tfrac{1}{11}x_1^{11}x_2 - \tfrac{1}{3}x_1x_2^3 + x_1x_3,\\
h_2 &= -\tfrac{5}{76}x_1^{20} + \tfrac{3}{2}x_1^{10}x_2^2 + \tfrac{1}{4}x_2^4 + x_2x_3,\\
h_3 &= \tfrac{10}{87}x_1^{30} + 2x_1^{20}x_2^2 - 6x_1^{10}x_2^4 + \tfrac{2}{15}x_2^6 + \tfrac{1}{2}x_3^2.
\end{aligned}$$

8. **Solution 29 by P. Boalch (LT18)**

$$w_1 = \frac{1}{10},\ w_2 = \frac{1}{5},\ w_3 = 1$$

$$
\begin{aligned}
h_1 &= -x_1(5x_1^6x_2^2 - 14x_2^5 - 2x_3)/2,\\
h_2 &= (5x_1^{12} + 275x_1^6x_2^3 - 55x_2^6 + 33x_2x_3)/33,\\
h_3 &= (-100x_1^{18}x_2 + 2550x_1^{12}x_2^4 + 12750x_1^6x_2^7 + 595x_2^{10} + 9x_3^2)/18.
\end{aligned}
$$

9. **Solution 38 by P. Boalch (LT26)**

$$w_1 = \frac{1}{5},\ w_2 = \frac{2}{5},\ w_3 = 1$$

$$
\begin{aligned}
h_1 &= -\frac{x_1^6}{30} - \frac{x_1^4x_2}{2} + \frac{x_1^2x_2^2}{2} + \frac{x_2^3}{3} + x_1x_3,\\
h_2 &= \frac{5x_1^7}{6} + \frac{x_1^5x_2}{2} + \frac{5x_1^3x_2^2}{2} - \frac{5x_1x_2^3}{6} + x_2x_3,\\
h_3 &= -\frac{21x_1^{10}}{8} + 5x_1^8x_2 + \frac{35x_1^6x_2^2}{4} + \frac{35x_1^2x_2^4}{8} - \frac{7x_2^5}{20} + \frac{x_3^2}{2}.
\end{aligned}
$$

10. **Octahedral solution 13 by P. Boalch (LT30)**

$$w_1 = \frac{1}{8},\ w_2 = \frac{3}{8},\ w_3 = 1$$

$$
\begin{aligned}
h_1 &= \tfrac{5}{9}x_1^9 - \tfrac{28}{3}x_1^6x_2 - \tfrac{70}{3}x_1^3x_2^2 + \tfrac{140}{9}x_2^3 + x_1x_3,\\
h_2 &= \tfrac{140}{11}x_1^{11} - 15x_1^8x_2 + 84x_1^5x_2^2 + 70x_1^2x_2^3 + x_2x_3,\\
h_3 &= -\tfrac{3680}{3}x_1^{16} - \tfrac{216160}{39}x_1^{13}x_2 + \tfrac{30016}{3}x_1^{10}x_2^2 - \tfrac{2240}{3}x_1^7x_2^3 + \tfrac{39200}{3}x_1^4x_2^4 + \tfrac{7840}{3}x_1x_2^5 + \tfrac{1}{2}x_3^2.
\end{aligned}
$$

11. **The solution by P. Boalch (LT32)**

$$w_1 = \frac{1}{42},\ w_2 = \frac{1}{3},\ w_3 = 1$$

$$
\begin{aligned}
h_1 &= \tfrac{90}{43}x_1^{43} + \tfrac{1230}{29}x_1^{29}x_2 - \tfrac{369}{2}x_1^{15}x_2^2 - \tfrac{410}{3}x_1x_2^3 + x_1x_3,\\
h_2 &= -\tfrac{369}{2}x_1^{56} - 324x_1^{42}x_2 - 2214x_1^{28}x_2^2 + 3321x_1^{14}x_2^3 + 123x_2^4 + x_2x_3,\\
h_3 &= -\tfrac{35459514}{83}x_1^{84} + 3234654x_1^{70}x_2 + 6687756x_1^{56}x_2^2 + 1680426x_1^{42}x_2^3 + 16702416x_1^{28}x_2^4\\
&\quad -6263406x_1^{14}x_2^5 + \tfrac{77326}{3}x_2^6 + \tfrac{1}{2}x_3^2.
\end{aligned}
$$

7 Painlevé VI 方程式との関係

Painlevé VI 方程式は

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2w}{dt^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} + \frac{1}{w-t}\right)\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{w-t}\right)\frac{dw}{dt}\\
&\quad + \frac{w(w-1)(w-t)}{2t^2(t-1)^2}\left((\theta_\infty - 1)^2 - \frac{\theta_x^2 t}{w^2} + \frac{\theta_y^2(t-1)}{(w-1)^2} + \frac{(1-\theta_z^2)t(t-1)}{(w-t)^2}\right)
\end{aligned}
\tag{18}
$$

で与えられる．t は独立変数，w は t の関数である．(18) は 4 個のパラメータ $\boldsymbol{\theta} = (\theta_x, \theta_y, \theta_z, \theta_\infty)$ を持つ．

以前に定義した (11) と (18) との関係を説明する．$h = \det T$ とおくと，h は x_3 の 3 次式であるから，$p_j(x')$ $(j = 1, 2, 3)$ を $h(x) = \prod_{i=1}^{3}(x_3 - p_i(x'))$ で定義する．ここで $x' = (x_1, x_2)$ である．いま generic な x' に対して，$p_1(x'), p_2(x'), p_3(x')$ は互いに等しくならないとする．定義

より，$i \neq j$ であれば，$hB^{(3)}$ の (i,j) 成分は x_3 の 1 次関数である．したがってこの 1 次関数が $x_3 - p_{ij}(x')$ で割り切れるような x' の関数 $p_{ij}(x')$ が存在する．すると

$$p_{ij} = \left. \frac{\det(T)(T^{-1})_{ij}}{T_{ij}} \right|_{x_3=0}$$

が成り立つことを示せる．このとき

$$w_{ij} = \frac{p_{ij}(x') - p_1(x')}{p_2(x') - p_1(x')}, \quad t = \frac{p_3(x') - p_1(x')}{p_2(x') - p_1(x')}$$

とおけば，w_{ij} は t を変数とする Painlevé VI 方程式の解になることがわかる．これだけではパラメータの関係が不明瞭であるが，別の定式化から次の結果が得られる．

Theorem 19 *(Arsie-Lorenzoni) generic な一般化された WDVV 方程式全体と Painlevé VI 方程式の 4 パラメータ族とはほぼ 1 対 1 に対応する．*

WDVV 方程式の場合，対応する Painlevé VI 方程式には $\theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$ という条件がつく．

8 Painlevé VI 方程式の代数関数解から構成されるポテンシャル・ベクトル場

8.1 Painlevé VI 方程式の代数関数解

Painlevé VI 方程式の解は一般には超越関数になり，具体的な解の表示はできない．したがって，対応する potential vector field の具体形を求めるは困難だと思われる．一方では代数関数解についてはその可能性がある．また代数関数解の分類は Lisovyy-Tykhyy [14] によって成し遂げられている．代数関数解について，少し復習する．

t は変数で，w は Painlevé VI 方程式の解であり，さらに w, t はある代数方程式の解になっている．このとき，(w,t) を代数関数解という．代数関数解はパラメータを使って $w = w(s)$, $t = t(s)$ のように表示される．代数関数解のうちで，問題にするのは 45 種類のものである．§6 で説明したように，LT1....,LT45 と表すことにする．[14] の最後のリストをみると，これらの 45 種類の解は以下のような 3 種類に分類できることが観察される．

(a) w, t はともにパラメータ s の有理関数.

(b) $w = \dfrac{1}{2} + \dfrac{P_1(s)}{Q_1(s)u}$, $t = \dfrac{1}{2} + \dfrac{P_2(s)}{Q_2(s)u}$ の形に表せる．ここで，$P_i(s), Q_i(s)$ $(i = 1,2)$ は s の多項式，u は，ある重複度のない多項式 $F(s)$ が存在して，$u^2 = F(s)$ で定まる代数関数.

(c) $w = \dfrac{1}{2} + \dfrac{P_1(s) + R(s)uv}{Q_1(s)v}$, $t = \dfrac{1}{2} + \dfrac{P_2(s)}{Q_2(s)u}$ の形に表せる．ここで，$P_i(s), Q_i(s) (i = 1,2)$, $R(s)$ は s の多項式. また u, v は，ある重複度のない多項式 $F(s), G(s)$ が存在して，$u^2 = F(s), v^2 = G(s)$ で定まる代数関数.

(a)	LT1,...,LT12,LT15,...,LT19,LT21,LT25,LT30	20 種類
(b)	LT13,LT14,LT20,LT22,LT23,LT24,LT26,...,LT29,LT31,...,LT42	22 種類
(c)	LT43,LT44,LT45	3 種類

すでに [9] においていくつかの場合に potential vector field を計算した．扱っているのは次のものである．

LT1,...,LT21,LT26,LT27,LT30,...,LT34,LT39

(a) に属するもので [9] で扱われていなかったのはLT25のみである．これはgeneric icosahedral solution ([14]) と称されるものであるが，どうしても求めることができなかった．

8.2 ポテンシャル・ベクトル場を構成する方法—加藤のアイデア—

Painlevé VI 方程式は $\mathbf{P}^1$ 上で 4 つの確定特異点をもつ 2 階線型常微分方程式から構成される．この微分方程式は 1 つのパラメータを持ち，実際には 2 変数の偏微分方程式系とみなせる．その積分可能条件から Painlevé VI 方程式が構成される．このアイデアを逆にたどると，代数関数解から 2 変数の偏微分方程式系を構成できる．それから自由因子を結びつけることによって [9, §2] において重要な役割を果たした微分方程式系 [9, (2.6)] にあたるものが構成できる．そのあとは [9, §2] と同じような議論をすることでポテンシャル・ベクトル場も構成できる．本節で述べるこのアイデアは共同研究者の加藤満生氏によって提案された．それを説明する．

2 変数の偏微分方程式系の積分可能条件から Painlevé VI 方程式を構成する方法を説明することから議論を始める．2 変数で階数 2 のパッフ系

(20) $dZ = (A(x,t)dx + B(x,t)dt)Z,$

を考える．ここで

(21) $A(x,t) = \dfrac{A_0}{x} + \dfrac{A_1}{x-1} + \dfrac{A_t}{x-t}, \quad B(x,t) = -\dfrac{A_t}{x-t},$

であり，さらに A_0, A_1, A_t は成分が t だけの関数である 2×2 行列である．また

(22) $A_\infty = -A_0 - A_1 - A_\infty$

によって A_∞ を定める．

微分方程式系 (20) の積分可能条件は

(23) $\dfrac{dA_0}{dt} = \dfrac{1}{t}[A_t, A_0], \quad \dfrac{dA_1}{dt} = \dfrac{1}{t-1}[A_t, A_1], \quad \dfrac{dA_t}{dt} = \dfrac{1}{t}[A_0, A_t] + \dfrac{1}{t-1}[A_1, A_t]$

である．

(23) より，すぐにわかることだが，$\mathrm{tr}\, A_i$ $(i = 0,1,t)$ および A_∞ は t によらない．つまり $\mathrm{tr}\, A_i$ $(i = 0,1,t)$ は定数であり，A_∞ は定数行列である．A_∞ がさらに半単純であれば，初めから A_∞ は対角行列と仮定してよい．すると

$$\mathrm{tr}\, A_i = \theta_i \ (i = 0,1,t), \qquad A_\infty = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}$$

としたとき，$\theta_0, \theta_1, \theta_t, \kappa_1, \kappa_2$ は定数である．

A_i $(i = 0,1,t)$ に条件を付ける：

条件１： A_i $(i = 0,1,t)$ は階数 1 である．

条件１から出発する Jimbo-Miwa[7] の議論を復習する．条件 1 から A_i $(i = 0,1,t)$ は次のように表せる：

$$A_0 = \begin{pmatrix} z_0 + \theta_0 & -uz_0 \\ u^{-1}(z_0 + \theta_0) & -z_0 \end{pmatrix}, \ A_1 = \begin{pmatrix} z_1 + \theta_1 & -vz_1 \\ v^{-1}(z_1 + \theta_1) & -z_1 \end{pmatrix}, \ A_t = \begin{pmatrix} z_t + \theta_t & -wz_t \\ w^{-1}(z_t + \theta_t) & -z_t \end{pmatrix}.$$

さらに，A_∞ の表示から，次の関係式が得られる：

(24) $uz_0+vz_1+wz_t=0,\quad u^{-1}(z_0+\theta_0)+v^{-1}(z_1+\theta_1)+w^{-1}(z_t+\theta_t)=0.$

(25) $\kappa_1=-(z_0+\theta_0+z_1+\theta_1+z_t+\theta_t),\quad \kappa_2=z_0+z_1+z_t.$

(25) からは特に次が得られる：

(26) $\kappa_1+\kappa_2+\theta_0+\theta_1+\theta_t=0.$

(24) の第一の方程式から，$A(x,t)$ の $(1,2)$ 成分は

$$\frac{p(x)}{x(x-1)(x-t)}$$

の形にすると，$p(x)$ は x の 1 次式になることがわかる．より正確には $p(x)=(x-y)k$ となることがわかる．ここで k,y は

(27) $k=(t+1)uz_0+tvz_1+wz_t,\quad y=k^{-1}tuz_0$

と表される．

定義より，$A(x,t)$ の (1,1) 成分，(2,2) 成分はそれぞれ $(z_0+\theta_0)/x+(z_1+\theta_1)/(x-1)+(z_t+\theta_t)/(x-t)$，$-z_0/x-z_1/(x-1)-z_t/(x-t)$ と表されるが，これらの式において x を y に置き換えたものを $\tilde{z}$, $-\tilde{\tilde{z}}$ で表す．すなわち，$\tilde{z}$, $\tilde{\tilde{z}}$ を次で定義する：

(28) $\displaystyle \tilde{z}:=\frac{z_0+\theta_0}{y}+\frac{z_1+\theta_1}{y-1}+\frac{z_t+\theta_t}{y-t},\quad \tilde{\tilde{z}}:=\tilde{z}-\frac{\theta_0}{y}-\frac{\theta_1}{y-1}-\frac{\theta_t}{y-t}.$

行列 A_0,A_1,A_t は階数 1 であるという条件によって，u,v,w,z_0,z_1,z_t を定めたが，これらの u,v,w, z_0,z_1,z_t を使って $y,k,\tilde{z},\tilde{\tilde{z}}$ が定まる．すると，微分方程式系 (20) の積分可能条件 (23) は $y,k,\tilde{z},\tilde{\tilde{z}}$ の微分関係式で表される．具体的には次のようになる：

$$(29)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{y(y-1)(y-t)}{t(t-1)}\left(2\tilde{z}-\dfrac{\theta_0}{y}-\dfrac{\theta_1}{y-1}-\dfrac{\theta_t-1}{y-t}\right), \\ \dfrac{d\tilde{z}}{dt}=\dfrac{1}{t(t-1)}((-3y^2+2(1+t)y-t)\tilde{z}^2 \\ \qquad +((2y-1-t)\theta_0+(2y-t)\theta_1+(2y-1)(\theta_t-1))\tilde{z}-\kappa_1(\kappa_2+1)), \\ \dfrac{d}{dt}\log k=(\theta_\infty-1)\dfrac{y-t}{t(t-1)} \end{cases}$$

ここで $\theta_\infty:=\kappa_1-\kappa_2$ とおいた．さらに (29) の第一，第二の方程式から $\tilde{z}$ を消去すれば，y に対する微分方程式が求まる．このようにして Painlevé VI 方程式が得られる：

$$(30)\quad \begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2}= &\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y-t}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2-\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}+\frac{1}{y-t}\right)\frac{dy}{dt} \\ &+\frac{y(y-1)(y-t)}{t^2(t-1)^2}\left((\theta_\infty-1)^2-\frac{\theta_0^2t}{y^2}+\frac{\theta_1^2(t-1)}{(y-1)^2}+\frac{(1-\theta_t^2)t(t-1)}{(y-t)^2}\right). \end{aligned}$$

((18) と少し記号が異なる)

以上で Jimbo-Miwa [7] にある議論を終える．

逆をたどってみる．まず $\theta_i\ (i=0,1,t)$, κ_1,κ_2 を与える．それらは (25) は満たしているようにとる．また $\theta_\infty=\kappa_1-\kappa_2$ とおく．$y=y(t)$ は (30) の解とする．これらのデータから出発する．

(29) の第一式から $\tilde{z}$ を定め，第四式を積分して k を求める．次に (28) の第二の式から $\tilde{\tilde{z}}$ を定める．次に次式で z_0, z_1, z_t を定める．

$$\begin{aligned}
z_0 &= \frac{y}{t\theta_\infty}\Big(y(y-1)(y-t)\tilde{\tilde{z}}^2 + (\theta_1(y-t) + t\theta_t(y-1)\\
&\quad -2\kappa_2(y-1)(y-t))\tilde{\tilde{z}} + \kappa_2^2(y-t-1) - \kappa_2(\theta_1 + t\theta_t)\Big),\\
z_1 &= -\frac{y-1}{(t-1)\theta_\infty}\Big(y(y-1)(y-t)\tilde{\tilde{z}}^2 + ((\theta_1+\theta_\infty)(y-t) + t\theta_t(y-1)\\
&\quad -2\kappa_2(y-1)(y-t))\tilde{\tilde{z}} + \kappa_2^2(y-t) - \kappa_2(\theta_1 + t\theta_t) - \kappa_1\kappa_2\Big),\\
z_t &= \frac{y-t}{t(t-1)\theta_\infty}\Big(y(y-1)(y-t)\tilde{\tilde{z}}^2 + (\theta_1(y-t) + t(\theta_t+\theta_\infty)(y-1)\\
&\quad -2\kappa_2(y-1)(y-t))\tilde{\tilde{z}} + \kappa_2^2(y-1) - \kappa_2(\theta_1 + t\theta_t) - t\kappa_1\kappa_2\Big).
\end{aligned}$$

最後に

(31) $$u = \frac{ky}{tz_0},\quad v = -\frac{k(y-1)}{(t-1)z_1},\quad w = \frac{k(y-t)}{t(t-1)z_t},$$

で u, v, w を定める．このようにして定めた u, v, w, z_0, z_1, z_t が (24),(25),(27),(28) を満たすことは確かめられる．このようにして，Painlevé VI 方程式の解から微分方程式系 (20) を復元できたことになる．

Remark 32 この議論をみると，*Painlevé VI* 方程式の解 y をとれば，ほとんど代数的な演算によって u, v, w, z_0, z_1, z_t が求まるのだが，k だけは y を含む微分方程式を解く必要がある．k が $y, y', y'', \cdots$ と t を使った代数式で表示できるか？

これからが本論である．代数関数解の場合に，上記の議論を当てはめる．つまり Painlevé VI 方程式の代数関数解から微分方程式系 (20) を構成する．そしてそれから微分方程式系 [9, (2.9)] にあたるものを構成する．

(b) に属する LT13 を例にとって，加藤の方法を説明する．

$\boldsymbol{\theta} = (2/5, 2/5, 2/5, 2/3)$ がパラメータで

$$\begin{aligned}
t &= \frac{1}{2} + \frac{(8s+1)(25s^4 + 170s^3 + 42s^2 + 8s - 2)}{54s^2(5s+4)u_E},\\
w &= \frac{1}{2} + \frac{350s^3 + 63s^2 - 6s - 2}{30s(2s+1)u_E}
\end{aligned}$$

である．ここで u_E は

(33) $$u_E^2 = s(8s+1)(5s+4)$$

で定まる s の代数関数.

一般にパラメータが $\boldsymbol{\theta} = (\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty)$ であり，t が変数である Painlevé VI 方程式の解 $w = w(t)$ に対して，$t_a = 1 - 1/t$, $y_a = 1 - w/t$ とおけば，y_a は t_a を変数とする Painlevé VI 方程式の解であり，そのパラメータは $\boldsymbol{\theta}' = (\theta_t, \theta_0, \theta_1, \theta_\infty)$ である．

LT13 の場合に戻る．t_a, y_a を s で表すと次のようである：

(34) $$\begin{cases}
t_a = \dfrac{-2 - 8s + 106s^2 + 506s^3 + 1385s^4 + 200s^5 - 108s^2u_E - 135s^3u_E}{-2 - 8s + 106s^2 + 506s^3 + 1385s^4 + 200s^5 + 108s^2u_E + 135s^3u_E},\\[2ex]
y_a = \dfrac{2(-1+s)^2(5+4s)(1+5s)^2(-1+10s)}{5(1+2s)(-2 - 8s + 106s^2 + 506s^3 + 1385s^4 + 200s^5 + 108s^2u_E + 135s^3u_E)}
\end{cases}$$

また，この場合には $\boldsymbol{\theta}' = \boldsymbol{\theta}$ である．$\kappa_1 = -\frac{4}{15}$, $\kappa_2 = -\frac{14}{15}$ となる．(t_a, y_a) から $\tilde{z}$, $\tilde{\tilde{z}}$, z_0, z_1, z_t を構成することは複雑だがそれほどむずかしいことではない．k を求めるには

$$\frac{d}{dt_a}\log k = (\theta_\infty - 1)\frac{y_a - t_a}{t_a(t_a - 1)}$$

を解く必要がある．この方程式の意味は $\frac{d}{dt_a}\log k = \frac{d}{ds}\log k / \frac{dt_a}{ds}$ とみて，

$$\frac{d}{ds}\log k = (\theta_\infty - 1)\frac{y_a - t_a}{t_a(t_a - 1)}\frac{dt_a}{ds}$$

と解釈する．したがって，具体的には

$$\frac{1}{k}\frac{dk}{ds} = \frac{3(26s - 63s^2 - 350s^3) + 45(1+2s)su_E}{(-1+s)(1+2s)(1+5s)(1+8s)(-1+10s)}$$

となる．右辺を積分すればよいのだが，u_E は楕円関数であり，したがって楕円積分をする必要がある．ところがこの場合には t_a を定義した (34) の第一式の右辺の分母を使って簡単に積分できる．実際

$$t_{a1} = -2 - 8s + 106s^2 + 506s^3 + 1385s^4 + 200s^5 + 108s^2u_E + 135s^3u_E$$

とおいて $f(s) = t_{a1}^d f_1(s)$ とする．

$$\frac{f'}{f} = \frac{d(4 - 114s - 675s^2 + 2000s^3 - 135su)f_1 + (-1+s)(1+5s)(1+8s)(-1+10s)f_1'}{(-1+s)(1+5s)(1+8s)(-1+10s)f_1}$$

である．したがって $d = -\frac{1}{3}$ とおけば，

$$\frac{k'}{k} - \frac{f'}{f} = \frac{-3(2s+1)(8s+1)f_1' + 2(40s+11)f_1}{3(2s+1)(8s+1)f_1}$$

この式の右辺が 0 になるように f_1 を定める．つまり

$$f_1' = \frac{2(40s+11)}{3(2s+1)(3s+1)}\cdot f_1$$

となる f_1 をとれば，$\dfrac{k'}{k} = \dfrac{f'}{f}$ を得る．このようにして，$f_1 = p_0(2s+1)(8s+1)^{2/3}$（$p_0$ は定数），$k = t_{a1}^{-1/3}f_1$ としてよい．以下では，

$$k(s) = p_0 t_{a1}(s)^{-1/3}(2s+1)(8s+1)^{2/3}$$

（p_0 は定数）とする．

(35) $u = \dfrac{ky_a}{t_a z_0}$, $v = -\dfrac{k(y_a - 1)}{(t_a - 1)z_1}$, $w = \dfrac{k(y_a - t_a)}{t_a(t_a - 1)z_t}$,

で u, v, w を定める．

　ここからは当面の間，LT13 の場合でなくても成り立つような議論をする．

$$A_0 = \begin{pmatrix} z_0 + \theta_0 & -uz_0 \\ u^{-1}(z_0 + \theta_0) & -z_0 \end{pmatrix},\ A_1 = \begin{pmatrix} z_1 + \theta_1 & -vz_1 \\ v^{-1}(z_1 + \theta_1) & -z_1 \end{pmatrix},\ A_t = \begin{pmatrix} z_t + \theta_t & -wz_t \\ w^{-1}(z_t + \theta_t) & -z_t \end{pmatrix}$$

とおく．いずれも s の関数が成分の行列である．これらの A_0, A_1, A_t を使ったパッフ系 (20) を考える．つまり

(36) $dZ = (Adx + Bdt_a)Z,$

を考える．ここで

(37) $A = \dfrac{A_0}{x} + \dfrac{A_1}{x-1} + \dfrac{A_t}{x-t_a}, \quad B = -\dfrac{A_t}{x-t_a},$

である．t_a は s の関数だから，実際には A, B は (x,s) の関数を成分とする行列．また $dt_a = t'_a \cdot ds$ である．ここで，$t'_a = \frac{d}{ds}t_a$．(36) は (x,s) 空間のパッフ系である．

(38) $\Omega = Adx + Bdt_a (= Adx + Bt'_a\, ds)$

とおく．いま $s = \dfrac{x_2}{x_1}$ とおく．すると，

$$t_a|_{s=x_2/x_1} = \frac{t_{2x}(x_1,x_2)}{t_{1x}(x_1,x_2)}$$

と表せる．$t_{ix}(x_1,x_2)$ $(i=1,2)$ は (x_1,x_2) の斉次関数であり，より正確には t_a を

$$t_a = \frac{P(s)+Q(s)u_E}{P(s)-Q(s)u_E}$$

（$P(s)$, $Q(s)$ は s の多項式）と表示したとき，このとき，$t_{ix}(x_1,x_2)$ の斉次次数は $\max\{\deg(P), \deg(Q)\}$ である．$u_E^2 = F(s)$（$F(s)$ は s の多項式）のとき，$u_E^2 = F(x_2/x_1)$ として，u を (x_1,x_2) の関数とみる．具体的には

$$\begin{aligned} t_{1x} &= -2x_1^5 - 8x_1^4x_2 + 106x_1^3x_2^2 + 506x_1^3x_2^3 + 1385x_1^2x_2^4 + 200x_1x_2^5 + 27(4x_1+5x_2)x_1^2x_2^2u_E, \\ t_{2x} &= -2x_1^5 - 8x_1^4x_2 + 106x_1^3x_2^2 + 506x_1^3x_2^3 + 1385x_1^2x_2^4 + 200x_1x_2^5 - 27(4x_1+5x_2)x_1^2x_2^2u_E \end{aligned}$$

である．これで (x,s) 空間から (x_1,x_2,x) へと移行したが，さらに $x_3 = xt_{1x}(x_1,x_2)$ とおく．$x = \dfrac{x_3}{t_{1x}}$ だから

$$dx = \frac{dx_3}{t_{1x}} - \frac{x_3}{t_{1x}^2}\left(\frac{\partial t_{1x}}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial t_{1x}}{\partial x_2}dx_2\right)$$

である．(38) で定義した Ω を (x_1,x_2,x_3) 座標で表すと

(39) $\Omega = A\left\{\dfrac{dx_3}{t_{1x}} - \dfrac{x_3}{t_{1x}^2}\left(\dfrac{\partial t_{1x}}{\partial x_1}dx_1 + \dfrac{\partial t_{1x}}{\partial x_2}dx_2\right)\right\} + (Bt'_a|_{s=x_2/x_1})\left(-\dfrac{x_2}{x_1^2}\cdot dx_1 + \dfrac{dx_2}{x_1}\right)$

となる．(式 (39) の右辺にある A は式 (37) で定義した A に $x = x_3/t_{1x}, s = x_2/x_1$ を代入したものである．以下では，断りなくこれらを同一視をする．) したがって，この Ω を使えば，(x_1,x_2,x_3) 空間のパッフ系

(40) $dZ = \Omega Z$

が得られる．

ここで一言注意する．$x(x-1)(x-t) = \dfrac{x_3(x_3-t_{1x})(x_3-t_{2x})}{t_{1x}^3}$ であるが，(x_1,x_2,x_3) 空間の

$$x_3(x_3-t_{1x})(x_3-t_{2x}) = 0$$

で定まる超曲面は自由因子になる．(このことは，代数関数解のパラメータ s の取り方に依存するのかどうか不明だが，(a) に属する代数関数解のいずれの場合にも直接チェックして確認できる.)

対角行列 $D = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix}$ $(\rho_i = \rho_i(x_1, x_2)\,(i = 1, 2))$ をとり，$Y = D^{-1}Z$ とおく．そして (40) から Y についてのパッフ系

(41) $dY = \Big(\sum_{i=0}^{2} \Gamma^{(i)} dx_i\Big) Y$

を構成する．

$$\Omega = \tilde{A}_1 dx_1 + \tilde{A}_2 dx_2 + \tilde{A}_3 dx_3$$

と表示したとき，

$$dY = \left\{ D^{-1}\left(\tilde{A}_1 D - \frac{\partial D}{\partial x_1}\right) dx_1 + D^{-1}\left(\tilde{A}_2 D - \frac{\partial D}{\partial x_2}\right) dx_1 + D^{-1}\tilde{A}_3 D dx_3 \right\} Y$$

となる．これを

(42) $dY = \Big(\sum_{i=1}^{3} \Gamma^{(i)} dx_i\Big) Y$

と表示したとき，次の条件 (C1)-(C4) を満たすような ρ_1, ρ_2 を求める：

(C1) $\Gamma^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ は成分が x_1, x_2, x_3 の関数である 2×2 行列である．

(C2) $\Gamma^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ が

$$\Gamma^{(i)} = \sum_{j=0}^{2} \frac{\Gamma_j^{(i)}}{x_3 - z_j(x_1, x_2)}, \quad i = 1, 2, 3$$

の形になるような行列 $\Gamma_j^{(i)}$ が存在し，しかも $\Gamma_i^{(j)}$ は x_3 によらない．(ここで $z_0 = 0, z_j = t_{ix}\,(j = 1, 2)$.)

(C3) $\operatorname{rank} \Gamma_j^{(3)} = 1$ $(j = 0, 1, 2)$.

(C4) $\Gamma_\infty = -\sum_{j=0}^{2} \Gamma_j^{(3)}$ は対角行列で，成分は定数.

(39) をみれば，$\tilde{A}_3 = A/t_{1x}$ がわかり，したがって

$$\Gamma^{(3)} = D^{-1}\left(\frac{A_0}{x_3} + \frac{A_1}{x_3 - t_{1x}} + \frac{A_t}{x_3 - t_{2x}}\right) D$$

がわかる．

$$\Gamma_0^{(3)} = D^{-1} A_0 D, \quad \Gamma_1^{(3)} = D^{-1} A_1 D, \quad \Gamma_2^{(3)} = D^{-1} A_t D$$

である．ρ_1, ρ_2 を求める．(39) より，

$$\tilde{A}_1 = -A\frac{x_3}{t_{1x}^2} \cdot \frac{\partial t_{1x}}{\partial x_1} - (Bt'_a|_{s=x_2/x_1})\frac{x_2}{x_1^2}$$

である．

$$\begin{aligned} A\frac{x_3}{t_{1x}^2} &= \left(\frac{t_{1x}}{x_3}A_0+\frac{t_{1x}}{x_3-t_{1x}}A_1+\frac{t_{1x}}{x_3-t_{2x}}A_t\right)\frac{x_3}{t_{1x}^2} \\ &= \frac{1}{t_{1x}}\left(A_0+\frac{x_3}{x_3-t_{1x}}A_1+\frac{x_3}{x_3-t_{2x}}A_t\right) \\ &= \frac{1}{t_{1x}}\left(A_0+A_1+A_t+\frac{t_{1x}}{x_3-t_{1x}}A_1+\frac{t_{2x}}{x_3-t_{2x}}A_t\right) \\ &= \frac{1}{t_{1x}}\left(-A_\infty+\frac{t_{1x}}{x_3-t_{1x}}A_1+\frac{t_{2x}}{x_3-t_{2x}}A_t\right) \end{aligned}$$

であるから，

$$\tilde{A}_1=\left(\frac{1}{t_{1x}}A_\infty-\frac{1}{x_3-t_{1x}}A_1-\frac{t_{2x}}{t_{1x}(x_3-t_{2x})}A_t\right)\frac{\partial t_{1x}}{\partial x_1}+\frac{x_2t_{1x}t_a'}{x_1^2(x_3-t_{2a})}A_t$$

となる．$A_\infty=\mathrm{diag}[\kappa_1,\kappa_2]$ であることと条件 (C2) より

$$D^{-1}\frac{\partial D}{\partial x_1}=\frac{1}{t_{1x}}A_\infty$$

を得る．$\tilde{A}_2$ の計算からも

$$D^{-1}\frac{\partial D}{\partial x_2}=\frac{1}{t_{1x}}A_\infty$$

がわかる．これらの微分方程式を解くことによって，

$$\rho_1=t_{1x}^{\kappa_1},\quad \rho_2=t_{1x}^{\kappa_2}$$

とおけば条件 (C1)-(C4) が成り立つことがわかる．以上の計算によって，$\rho=\rho_1/\rho_2=t_{1x}^{\kappa_1-\kappa_2}$ とおけば，

$$\begin{aligned} \Gamma_1^{(3)} &= \begin{pmatrix} z_0+\theta_0 & -\rho^{-1}uz_0 \\ \rho u^{-1}(z_0+\theta_0) & -z_0 \end{pmatrix}, \\ \Gamma_2^{(3)} &= \begin{pmatrix} z_1+\theta_1 & -\rho^{-1}vz_1 \\ \rho v^{-1}(z_1+\theta_1) & -z_1 \end{pmatrix}, \\ \Gamma_3^{(3)} &= \begin{pmatrix} z_t+\theta_t & -\rho^{-1}wz_t \\ \rho w^{-1}(z_t+\theta_t) & -z_t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

がわかる．(C4) によって Γ_∞ を定めれば，

$$\Gamma_\infty=-(\Gamma_1^{(3)}+\Gamma_2^{(3)}+\Gamma_3^{(3)})=-(A_0+A_1+A_t)=A_\infty$$

となることに注意する．

これからの計算は [9, §2] にある議論と同じように進行する．ベクトル

$$\vec{b}_j=(b_{1j},b_{2j}),\ \vec{a}_j=(a_{j1},a_{j2})\ (j=1,2,3)$$

で，[9, (2.17)] を満たすものを求める．この場合

$$\begin{aligned} &\vec{b}_1=\begin{pmatrix}1\\ \rho u^{-1}\end{pmatrix},\quad \vec{b}_2=\begin{pmatrix}1\\ \rho v^{-1}\end{pmatrix},\quad \vec{b}_3=\begin{pmatrix}1\\ \rho w^{-1}\end{pmatrix}, \\ &\vec{a}_1=\begin{pmatrix}-\dfrac{z_0+\theta_0}{\kappa_1} & \dfrac{uz_0}{\kappa_2\rho}\end{pmatrix},\quad \vec{a}_2=\begin{pmatrix}-\dfrac{z_1+\theta_1}{\kappa_1} & \dfrac{vz_1}{\kappa_2\rho}\end{pmatrix},\quad \vec{a}_3=\begin{pmatrix}-\dfrac{z_t+\theta_t}{\kappa_1} & \dfrac{wz_t}{\kappa_2\rho}\end{pmatrix} \end{aligned} \tag{43}$$

とおけば，[9, (2.17)] と同じ等式

(44) $\Gamma_j^{(3)} = -\vec{b}_j^{\,t} \cdot \vec{a}_j \Gamma_\infty \quad (j=1,2,3)$

が成り立つ．このとき

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = I_2$$

が成り立つが，行列成分から得られる関係式は (24)，(25) になる．

次に

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = I_3$$

が成り立つような b_{31}, b_{32}, b_{33}, a_{13}, a_{23}, a_{33} を求める．(43) に注意すれば，次の連立方程式が得られる．

$$(45) \quad \begin{cases} a_{13}(\theta_0+z_0) + a_{23}(\theta_1+z_1) + a_{33}(\theta_t+z_t) = 0, \\ a_{13}vw(\theta_0+z_0) + a_{23}uw(\theta_1+z_1) + a_{33}uv(\theta_t+z_t) = 0, \\ b_{31}+b_{32}+b_{33} = 0, \\ b_{31}uz_0(\theta_1+z_1)(\theta_t+z_t) + b_{32}vz_1(\theta_0+z_0)(\theta_t+z_t) + b_{33}wz_t(\theta_0+z_0)(\theta_1+z_1) = 0, \\ -1 + a_{13}b_{31} + a_{23}b_{32} + a_{33}b_{33} = 0 \end{cases}$$

(45) の第一，第二式から a_{23}, a_{33} を解くと

$$\begin{aligned} a_{23} &= \frac{a_{13}v(w-u)(\theta_0+z_0)}{u(v-w)(\theta_1+z_1)}, \\ a_{33} &= \frac{a_{13}w(u-v)(\theta_0+z_0)}{u(v-w)(\theta_t+z_t)} \end{aligned}$$

が得られる．同様にして (45) の第三，第四式から

$$\begin{aligned} b_{32} &= \frac{b_{31}(\theta_1+z_1)(-\theta_t uz_0 + \theta_0 wz_t - uz_0z_t + wz_0z_t)}{(\theta_0+z_0)(\theta_t vz_1 - \theta_1 wz_t + vz_1z_t - wz_1z_t)}, \\ b_{33} &= -\frac{b_{31}(\theta_t+z_t)(-\theta_1 uz_0 + \theta_0 vz_1 - uz_0z_1 + vz_0z_1)}{(\theta_0+z_0)(\theta_t vz_1 - \theta_1 wz_t + vz_1z_t - wz_1z_t)} \end{aligned}$$

これらを (45) の第五式に代入すると

$$\begin{aligned} & a_{13}b_{31}\{w(u-v)(\theta_1 uz_0 - \theta_0 vz_1 + uz_0z_1 - vz_0z_1) \\ & +v(u-w)(\theta_t uz_0 - \theta_0 wz_t + uz_0z_t - wz_0z_t) \\ & +u(v-w)(\theta_t vz_1 - \theta_1 wz_t + vz_1z_t - wz_1z_t)\} \\ = \; & -u(v-w)(\theta_t vz_1 - \theta_1 wz_t + vz_1z_t - wz_1z_t) \end{aligned}$$

が得られる．この式から b_{31} を a_{13} で表せる．α, β を

(46) $a_{13} = \dfrac{\alpha u(v-w)}{\theta_0+z_0}, \quad b_{31} = \beta(\theta_0+z_0)(-\theta_t vz_1 + \theta_1 wz_t - vz_1z_t + wz_1z_t)$

が成り立つようにとる．すると

$$
(47)\quad \begin{cases}
(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -\kappa_1 u z_0/(\kappa_2\rho(\theta_0+z_0)) & \alpha u(v-w)/(\theta_0+z_0) \\ 1 & -\kappa_1 v z_1/(\kappa_2\rho(\theta_1+z_1)) & \alpha v(w-u)/(\theta_1+z_1) \\ 1 & -\kappa_1 w z_t/(\kappa_2\rho(\theta_t+z_t)) & \alpha w(u-v)/(\theta_t+z_t) \end{pmatrix} \\
(b_{ij}) = \begin{pmatrix} -(\theta_0+z_0)/\kappa_1 & -(\theta_1+z_1)/\kappa_1 & -(\theta_t+z_t)/\kappa_1 \\ -\rho(\theta_0+z_0)/(\kappa_1 u) & -\rho(\theta_1+z_1)/(\kappa_1 v) & -\rho(\theta_t+z_t)/(\kappa_1 w) \\ \begin{array}{l}\beta(\theta_0+z_0) \\ \times\{(\theta_1+z_1)wz_t \\ \quad -(\theta_t+z_t)vz_1\}\end{array} & \begin{array}{l}\beta(\theta_1+z_1) \\ \times\{(\theta_t+z_t)uz_0 \\ \quad -(\theta_0+z_0)wz_t\}\end{array} & \begin{array}{l}\beta(\theta_t+z_t) \\ \times\{(\theta_0+z_0)vz_1 \\ \quad -(\theta_1+z_0)uz_0\}\end{array} \end{pmatrix}
\end{cases}
$$

$$
(48)\quad \begin{array}{c}\alpha\beta[w(u-v)\{(\theta_1+z_1)uz_0-(\theta_0+z_0)vz_1\}+v(u-w)\{(\theta_t+z_t)uz_0-(\theta_0+z_0)wz_t\} \\ +u(v-w)\{(\theta_t+z_t)vz_1-(\theta_1+z_1)wz_t\}]+1=0\end{array}
$$

が成り立つ．

(35) を使って (48) から u, v, w を消去すると，

$$
\frac{k^3\kappa_1\kappa_2\alpha\beta y_a(-1+y_a)(-t_a+y_a)}{(1-t_a)^2 t_a^2 z_0 z_1 z_t} - 1 = 0
$$

を得る．したがって

$$
\beta = \frac{(1-t_a)^2 t_a^2 z_0 z_1 z_t}{\alpha k^3\kappa_1\kappa_2 y_a(-1+y_a)(-t_a+y_a)}
$$

としてよい．

$\zeta_1 = 0,\ \zeta_2 = t_{1x},\ \zeta_3 = t_{2x}$ として，[9, §2] で定義したように 3×3 行列 S を

$$
S = \sum_{j=1}^{3}(x_3-\zeta_j)\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} \end{pmatrix}
$$

で定める．

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 &= \kappa_1\beta v\{wz_t(z_0+\theta_0) - uz_0(z_t+\theta_t)\}, \\
\varphi_2 &= \kappa_1\beta w\{uz_0(z_1+\theta_1) - vz_1(z_0+\theta_0)\}
\end{aligned}
$$

とおくと，

$$
S = x_3 I_3 + t_{1x}\begin{pmatrix} v \\ \rho \\ \varphi_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{z_1+\theta_1}{\kappa_1 v} & \dfrac{-z_1}{\kappa_2\rho} & \dfrac{\alpha(w-u)}{\kappa_1} \end{pmatrix} + t_{2x}\begin{pmatrix} w \\ \rho \\ \varphi_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{z_t+\theta_t}{\kappa_1 w} & \dfrac{-z_t}{\kappa_2\rho} & \dfrac{\alpha(u-v)}{\kappa_1} \end{pmatrix}
$$

これまで LT13 とは限らなくても成り立つような議論をしてきた．残念ながら，これからの議論は個々の代数関数解の具体的な表示を使わなければ見通しがわかりにくくなる．そういうこともあり，LT13 の場合に戻る．(34) で定義した t_a, y_a から出発して，$\tilde{z}$, $\tilde{\tilde{z}}$, z_0, z_1, z_t, k を，さらに u, v, w を定義した．次の段階では，変数 x_1, x_2, x_3 を導入し，t_{1x}, t_{2x} も定めた．そして x_1, x_2 の関数 ρ, α も定義した．これまでの議論では k と ρ は確定させたが，ここであらためて k/ρ を x_1, x_2 の未定の関数とみる．すると，α と $\sigma = k/\rho$ はまだ未定の関数となる．S を計算す

ると，かなり複雑なのでここでは明示しない．$S_0 = S - x_3 I_3$ によって行列 S_0 を定めると，S_0 の各成分は x_1, x_2 の関数である．ただし

$$u_E^2 = \frac{x_2(x_1+8x_2)(4x_1+5x_2)}{x_1^3}$$

によって定まる u_E も含まれている [2]．ところが，α と σ に適当な関数をかけて取り替えると S_0 の各成分は x_1, x_2 の有理関数になる．特に u は消去されることに注意する．さらに α, σ に有理関数をかけて修正すると，S_0 の各成分である有理関数の分母には 2 次以上の因数はないようにできる．このような手続きで得られた新たな行列 $S = x_3 I_3 + S_0$ の (i,j) 成分に定数 h_{ij} をかけたものを (i,j) 成分とする行列を $\tilde{C}$ とする．ただし，定数 h_{ij} は，$h_{11} = h_{22} = h_{33} = 1$ であり，しかもすべての h_{ij} は正となるようにとる．$\tilde{C}$ の成分の有理関数の 1 次因数としてでてくるものは

$$x_1,\ x_1+2x_2,\ x_1+8x_2,\ x_1-10x_2$$

である．このことを考慮して

$$\begin{aligned}\alpha &= c_0 x_1^{m_1}(x_1+2x_2)^{m_2}(x_1+8x_2)^{m_3}(x_1-10x_2)^{m_4},\\ \sigma &= d_0 x_1^{n_1}(x_1+2x_2)^{n_2}(x_1+8x_2)^{n_3}(x_1-10x_2)^{n_4}\end{aligned}$$

とおく．ここで，c_0, d_0 は定数，m_i, n_i は有理数とする．以上のような条件をみたす $\tilde{C}$ に対して，

(49) $\partial_{x_1}\tilde{C}\cdot\partial_{x_2}\tilde{C} = \partial_{x_2}\tilde{C}\cdot\partial_{x_1}\tilde{C}$

が成り立つような定数 h_{ij}, m_i, n_i を求める．このようにして定まった h_{ij}, m_i, n_i の値を代入して，さらに表示が簡単になるように少し定数を修正して得られた行列を C で表す．次に

$$C' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} C^t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

とする．C' の (i,j) 成分を C'_{ij} で表すと，それらは以下のようになる．

$$\begin{aligned}
C'_{11} &= \tfrac{1}{16}(-23x_1^5 - 2x_1^4x_2 + 1804x_1^3x_2^2 + 4064x_1^2x_2^3 + 10640x_1x_2^4 + 3200x_2^5 + 16x_3),\\
C'_{12} &= \tfrac{135}{304}x_1^{9/10}(x_1-10x_2)^{9/5}(x_1+8x_2)^{19/30}(5x_1^3 + 52x_1^2x_2 + 196x_1x_2^2 + 152x_2^3),\\
C'_{13} &= \tfrac{405}{3712}x_1^{9/10}(x_1-10x_2)^{9/5}(x_1+8x_2)^{29/30}\\
&\quad\times(25x_1^6 + 392x_1^5x_2 + 2936x_1^4x_2^2 + 22032x_1^3x_2^3 + 55120x_1^2x_2^4 + 64960x_1x_2^5 + 18560x_2^6),\\
C'_{21} &= \tfrac{3}{176}x_1^{1/10}(x_1-10x_2)^{1/5}(x_1+8x_2)^{11/30}(13x_1^3 + 180x_1^2x_2 + 420x_1x_2^2 + 440x_2^3),\\
C'_{22} &= \tfrac{1}{16}(-19x_1^5 - 202x_1^4x_2 + 188x_1^3x_2^2 + 7264x_1^2x_2^3 + 20560x_1x_2^4 + 640x_2^5 + 16x_3),\\
C'_{23} &= \tfrac{9}{128}(x_1+2x_2)(x_1+8x_2)^{4/3}\\
&\quad\times(13x_1^6 - 120x_1^5x_2 - 360x_1^4x_2^2 + 1840x_1^3x_2^3 + 45840x_1^2x_2^4 + 37440x_1x_2^5 + 640x_2^6),\\
C'_{31} &= x_1^{1/10}(x_1-10x_2)^{1/5}(x_1+8x_2)^{1/30},\\
C'_{32} &= (x_1+2x_2)(x_1+8x_2)^{2/3},\\
C'_{33} &= \tfrac{1}{8}(-11x_1^5 - 26x_1^4x_2 + 700x_1^3x_2^2 + 2432x_1^2x_2^3 + 6560x_1x_2^4 + 1280x_2^5 + 8x_3)
\end{aligned}$$

[2] この u_E は (33) で定まる楕円関数のことである．$s = x_2/x_1$ として，(x_1, x_2) の関数とみている．実際には，以下では u_E は現れなくなる．

平坦座標は $y_i = C'_{3i}$ $(i=1,2,3)$ である．すなわち，

$$
\begin{aligned}
y_1 &= x_1^{1/10}(x_1-10x_2)^{1/5}(x_1+8x_2)^{1/30},\\
y_2 &= (x_1+2x_2)(x_1+8x_2)^{2/3},\\
y_3 &= \tfrac{1}{8}(-11x_1^5-26x_1^4x_2+700x_1^3x_2^2+2432x_1^2x_2^3+6560x_1x_2^4+1280x_2^5+8x_3)
\end{aligned}
$$

である．この場合にはきわめて特別なことだが，他の行列成分 C'_{ij} は y_1, y_2, y_3 の多項式になる．具体的には

$$
C' = \begin{pmatrix}
y_3 - \frac{1}{64}y_2(9y_1^{10}-5y_2^2) & \frac{135}{1216}y_1^9(y_1^{10}+19y_2^2) & -\frac{405}{29696}y_1^9(3y_1^{20}-58y_1^{10}y_2^2-145y_2^4)\\
-\frac{3}{704}y_1(3y_1^{10}-55y_2^2) & y_3+\frac{3}{64}y_2(9y_1^{10}-5y_2^2) & \frac{9}{1024}y_2(9y_1^{20}+90y_1^{10}y_2^2+5y_2^4)\\
y_1 & y_2 & y_3
\end{pmatrix}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
h_1 &= -\tfrac{9}{704}y_1^{11}y_2+\tfrac{5}{64}y_1y_2^3+y_1y_3,\\
h_2 &= \tfrac{27}{4864}y_1^{20}+\tfrac{27}{128}y_1^{10}y_2^2-\tfrac{15}{256}y_2^4+y_2y_3,\\
h_3 &= -\tfrac{81}{59392}y_1^{30}+\tfrac{81}{2048}y_1^{20}y_2^2+\tfrac{405}{2048}y_1^{10}y_2^4+\tfrac{15}{2048}y_2^6+\tfrac{1}{2}y_3^2
\end{aligned}
$$

とおけば，(h_1, h_2, h_3) は potential vector field になる．(（注）他の場合には h_1, h_2, h_3 が多項式になるとは限らない.)

Remark 50 *LT13* の場合の上の議論において，求めた k, ρ を使わないで，またそれを未知関数としたが，その前に求めていた k, ρ を使うと，別の *potential vector field* が得られる．しかしそれは多項式を使った表示にならない．また h_{ij} を正の定数と仮定したが，零でない定数と仮定すると，平坦座標の荷重が負になるような場合になりうる．

Remark 51 α, σ を *1* 次式の冪積の表示に限定したが，そのような仮定をせずに *(49)* が成り立つ条件を調べると，それは α, σ についての偏微分方程式が得られる．それを直接解くことは可能かどうかは不明である．

Remark 52 *(b)* の場合には，*LT13* の場合の計算と平行した議論によって，*potential vector field* を求めることができる．

8.3 (c) の場合について

(c) に属する LT43, LT44, LT45 のうちで，LT44 が最も簡単である．LT44 の場合にポテンシャル・ベクトル場を構成することが本小節の目標である．LT44 は $\boldsymbol{\theta} = (1/20, 1/20, 1/20, 19/20)$ がパラメータで

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{1}{2} + \frac{P(s)}{256(s^2-1)(5s^2-2s+13)u^3},\\
w &= \frac{1}{2} + \frac{(s^2-18s+1)(9s^2-2s+9)(s^2-2s+17)+4(s-1)(3s-7)uv}{64(s+3)(s+1)^2v}
\end{aligned}
$$

である．ここで

$$
\begin{aligned}
P(s) = {}& 27s^{10}-630s^9+4055s^8+30520s^7-174970s^6+258492s^5-724490s^4+600760s^3\\
&-1097825s^2+186570s-131085
\end{aligned}
$$

であり，u, v は次で定まる代数関数である：

$$u^2 = 2(s-9)(s^2-1), \quad v^2 = -(s-1)(s-9)(5s^2-2s+13).$$

§8.2 における LT13 の場合の議論と平行した議論によって，$\boldsymbol{\theta}$ と t_a, y_a を定める．$\tilde{z}, \tilde{\tilde{z}}, z_0, z_1, z_t$ の構成は困難なくできるが，k の決定が大変である．問題点を説明する．

$$u^2v^2 = -2(s-1)^2(s-9)^2(s+1)(5s^2-2s+13)$$

であることに注意して，

$$n^2 = -2(s+1)(5s^2-2s+13), \quad uv = (s-1)(s-9)n$$

となる s の代数関数 n を導入する．このとき，k を求めることは，$f = f(s)$ に対する微分方程式

(53) $\quad f' = -\dfrac{4(s-1)-n}{2(s+3)n}\, f$

を解くことに帰着される．

$$\int \frac{4(s-1)-n}{2(s+3)n}\, ds = \int \frac{2(s-1)}{(s+3)n}\, ds - \frac{1}{2}\log(s+3)$$

であるから，$\displaystyle\int \frac{(s-1)}{(s+3)n}\, ds$ を求められればよい．n は楕円関数だから，簡単にはこの楕円積分を求めることができない．竹内 ([23]) を見れば，これは第三種楕円積分であり，Weierstrass のゼータ関数を使えば求めることができるようである．しかしながら，楕円関数に習熟していないので，そのような古典理論に帰着させず，少し安易な方法で答えを得ることにする．その方法の出発点になるのは次の積分公式である：

積分公式: $F(s)$ を多項式，m を $m^2 = F(s)$ で定義される s の代数関数．このとき，$P(s)$ が s の関数であれば，

$$\int \frac{PF' - 2P'F}{m(P^2-F)}\, ds = \log\left(\frac{P+m}{P-m}\right) + \text{積分定数}$$

この公式は，両辺を微分することで確かめることができる．この公式を使えば，(53) の f を求めることは

「$F(s) = -2(s+1)(5s^2-2s+13)$ の場合に

$$\frac{PF' - 2P'F}{P^2-F} = \frac{2(s-1)}{s+3}$$

が成り立つような s の有理式 $P(s)$ を求めよ」

という問題に還元される．これは P についての非線型微分方程式とみなせるが，問題を易しくしたのかより難しくしたのかわからない．ところが，この場合，$P = 8(s+1)$ がその解になることがわかる．したがって

$$f = \frac{(n+8(s+1))^{1/2}}{(s+1)^{1/4}}$$

が微分方程式 (53) の解になることが結論される．このあとの議論は，複雑だが §8.2 の議論のように進んでいく．ρ_1, ρ_2 も同じようにして求めることができる．そして，(46) で定義される

α, β を定めることが問題になる．実際には α を決定すればよいことになる．α を求めるには，(49) と同じ等式が成り立つようにすればよい．これから，α に対する微分方程式系が得られる．それは x_1, x_2 を変数とする 1 階偏微分方程式からなるが，実際には $s = x_2/x_1$ についての 1 階常微分方程式に還元される．それは

$$f' = \frac{R(s)}{n} f$$

の形のものに帰着される．ただし $R(s)$ は s の有理式である．これは (53) と同じ形をしているので，上記の積分公式を適用できる．したがって，この R に対して

$$\text{(54)} \quad \frac{PF' - 2P'F}{P^2 - F} = R$$

を満たす s の有理式 $P(s)$ が求まれば，α が決定されることになる．(54) を満たす有理関数 $P(s)$ を求めるには，ある種の環論の問題が派生する．$R = \mathbf{C}[s]$ を多項式環とする．それに n を添加した拡大環 $\tilde{R} = R[n]$ における因数分解の問題である．それに少しばかり言及する．

「$L_1, L_2 \in R$ に対して，$L_1^2 - L_2^2 F$ が R 上で可約とする．このとき，$L_1 + L_2 n$ は $\tilde{R}$ 上で可約か？また具体的に可約分解の因数を求めることができるか？」

この問題は有理関数の部分分数分解と関係して，楕円積分を計算する上で必要になる．また，最大公約数を求めるユークリッドの互除法にあたるものも環 $\tilde{R}$ で取り扱う必要もある．いずれにしても，この場合には (54) の解になるような P を求めることができた．R を与えずに P を示すのはおかしなことではあるが，P として

$$8(1+s) \cdot \frac{\begin{pmatrix} 1254989 + 6306687s + 5188500s^2 + 3469260s^3 + 2006118s^4 \\ +1272114s^5 + 858372s^6 - 156420s^7 - 15435s^8 + 903s^9 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -1719119 + 2622483s - 16118460s^2 - 498180s^3 - 6870978s^4 \\ +1280106s^5 + 1037748s^6 + 102060s^7 - 21735s^8 + 987s^9 \end{pmatrix}},$$

$$-\frac{3(1 - 18s + s^2)(319 - 340s + 386s^2 - 132s^3 + 23s^4)}{40(-9+s)(-1+s)^2(-7+3s)}$$

などをとった場合に (54) の右辺にくるものが R である．正確にはもう少し込み入った式の計算になる．以上のようにして，**積分公式** を使うことによって α が求まる．したがって，§2 で定義した行列 C がこの場合に求まった．C の具体形はかなり複雑であるからここではしないで，平坦座標 (y_1, y_2, y_3) だけを与える：

$$\begin{aligned}
y_1 = &\ \left(\frac{x_1(8(x_1+x_2) + nx_1)^2}{(x_1+x_2)} \right)^{1/4}, \\
y_2 = &\ \frac{y_1 x_1 (8(x_1+x_2) + nx_1)}{10(x_1+x_2)(3x_1+x_2)^3} \\
&\times \left\{ \begin{array}{l} 8(7x_1 - 3x_2)(x_1+x_2)(147x_1^4 - 492x_1^3x_2 + 306x_1^2x_2^2 - 236x_1x_2^3 + 19x_2^4) \\ +nx_1(2211x_1^5 - 795x_1^4x_2 - 3858x_1^3x_2^2 + 4090x_1^2x_2^3 - 641x_1x_2^4 + 17x_2^5) \end{array} \right\}, \\
y_3 = &\ x_3 + \tfrac{1}{209} \left(\begin{array}{l} -20738937x_1^{10} + 47688770x_1^9x_2 - 173251805x_1^8x_2^2 + 118244440x_1^7x_2^3 \\ -116077730x_1^6x_2^4 + 47055756x_1^5x_2^5 - 26451730x_1^4x_2^6 + 4655320x_1^3x_2^7 + 471515x_1^2x_2^8 \\ -88830x_1x_2^9 + 4143x_2^{10} \\ +80nx_1^2(x_1-x_2)^2(9x_1-x_2)(x_1^2 - 18x_1x_2 + x_2^2)(191x_1^3 + 103x_1^2x_2 + 133x_1x_2^2 + 21x_2^3) \end{array} \right).
\end{aligned}$$

x_1, x_2, x_3 の重みは1,1,10 とみなせるが，このとき y_1, y_2, y_3 の重みは $1/2, 9/2, 10$ である．potential vector field を (h_1, h_2, h_3) とすると，

$$h_1 = y_1 y_3 + \frac{y_1}{17556(3x_1+x_2)} \cdot h_1^{(0)}, \quad h_2 = y_2 y_3 + \frac{9y_1}{24244} \cdot h_2^{(0)}, \quad h_3 = \frac{1}{2} y_3^2 + \frac{3200}{17603443} \cdot h_3^{(0)}.$$

ただし

$$
\begin{aligned}
h_1^{(0)} &= -(368251179x_1^{11} - 1404357197x_1^{10}x_2 + 1286146325x_1^9x_2^2 + 431485525x_1^8x_2^3 - 2572689650x_1^7x_2^4 \\
&\quad +2861791742x_1^6x_2^5 - 2049792726x_1^5x_2^6 + 927643530x_1^4x_2^7 - 243176105x_1^3x_2^8 + 31366175x_1^2x_2^9 \\
&\quad -1591247x_1x_2^{10} + 18001x_2^{11}) \\
&\quad +80nx_1^2(x_1-x_2)^2(9x_1-x_2)(x_1^2-18x_1x_2+x_2^2) \\
&\quad \times(13105x_1^4 - 14412x_1^3x_2 + 15934x_1^2x_2^2 - 5596x_1x_2^3 + 953x_2^4), \\
h_2^{(0)} &= (x_1^2-18x_1x_2+x_2^2) \\
&\quad \times(7390562277x_1^{12} - 28149561508x_1^{11}x_2 + 45151812802x_1^{10}x_2^2 - 50909495972x_1^9x_2^3 \\
&\quad +48405491859x_1^8x_2^4 - 34108610952x_1^7x_2^5 + 15331992252x_1^6x_2^6 - 4807298856x_1^5x_2^7 + 188394843x_1^4x_2^8 \\
&\quad +756688044x_1^3x_2^9 - 145003614x_1^2x_2^{10} + 5683020x_1x_2^{11} + 153357x_2^{12}) \\
&\quad -16nx_1^2(x_1-x_2)^2(9x_1-x_2) \\
&\quad \times(8396297x_1^9 + 278321211x_1^8x_2 + 20293668x_1^7x_2^2 + 311113884x_1^6x_2^3 - 43331058x_1^5x_2^4 \\
&\quad +82982682x_1^4x_2^5 + 18259476x_1^3x_2^6 - 13456692x_1^2x_2^7 + 924849x_1x_2^8 - 17853x_2^9), \\
h_3^{(0)} &= 4(5805537606717x_1^{20} - 4945717131560x_1^{19}x_2 + 3218561255964x_1^{18}x_2^2 - 19383322867700x_1^{17}x_2^3 \\
&\quad +131586987890759x_1^{16}x_2^4 - 117212765751488x_1^{15}x_2^5 + 127112936490624x_1^{14}x_2^6 \\
&\quad -76329158661232x_1^{13}x_2^7 + 66871690769154x_1^{12}x_2^8 - 37916062432912x_1^{11}x_2^9 + 27465941492248x_1^{10}x_2^{10} \\
&\quad -10704756193272x_1^9x_2^{11} + 2649810776494x_1^8x_2^{12} + 276315249408x_1^7x_2^{13} - 875545327776x_1^6x_2^{14} \\
&\quad +262874989328x_1^5x_2^{15} - 27685782831x_1^4x_2^{16} + 862616440x_1^3x_2^{17} + 32205804x_1^2x_2^{18} - 2380980x_1x_2^{19} \\
&\quad +58875x_2^{20}) \\
&\quad +nx_1^2(x_1-x_2)^2(9x_1-x_2)(x_1^2-18x_1x_2+x_2^2) \\
&\quad \times(7093915715x_1^{13} - 37449331351x_1^{12}x_2 + 6455027242x_1^{11}x_2^2 - 88250214970x_1^{10}x_2^3 + 5037788385x_1^9x_2^4 \\
&\quad -56598460325x_1^8x_2^5 - 2900522852x_1^7x_2^6 - 11619697756x_1^6x_2^7 - 1190842795x_1^5x_2^8 - 440359665x_1^4x_2^9 \\
&\quad +420608410x_1^3x_2^{10} - 6420426x_1^2x_2^{11} - 525273x_1x_2^{12} - 66675x_2^{13}).
\end{aligned}
$$

LT43 の場合にも同じようにしてポテンシャル・ベクトル場を計算できると期待しているが，まだ実行はしていない．LT45 の場合には何ともいえない．

Remark 55 この研究では数式処理システム *Mathematica* を多用している．このシステムなしではできない計算が多々あったことに注意しておく．

References

[1] D. Bessis and J. Michel: Explicit presentations for exceptional braid groups. Experimental Math., **13** (2004), 257-266.

[2] P. Boalch: From Klein to Painlevé via Fourier, Laplace and Jimbo. Proc. London Math. Soc. **90**, (2005), 167-208.

[3] P. Boalch: The fifty-two icosahedral solutions to Painlevé VI. J. Reine Angew. Math. **596** (2006), 183-214.

[4] P. Boalch: Some explicit solutions to the Riemann-Hilbert problem. IRMA Lect. Math. Theor. Phys. **9**, Rur. Math. Zurich, (2007), 85-112.

[5] B. Dubrovin: Geometry of 2D topological field theories. In:Integrable systems and quantum groups. Montecatini, Terme 1993 (M. Francoviglia, S. Greco, eds.) Lecture Notes in Math. 1620, Springer-Verlag 1996, 120-348.

[6] B. Dubrovin and M. Mazzocco: Monodromy of certain Painlevé VI transcendents and reflection groups. Inv. Math. **141**, (2000), 55-147.

[7] M. Jimbo and T. Miwa: Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. II, Physica 2D (1981), 407-448.

[8] M. Kato, T. Mano and J. Sekiguchi: Flat structures without potentials. Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **60** (2015), 4, 481-505.

[9] M. Kato, T. Mano and J. Sekiguchi: Flat structure and potential vector fields related with algebraic solutions to Painlevé VI equation. Opuscula Math., no.2 (2018), 201-252.

[10] M. Kato, T. Mano and J. Sekiguchi: Flat structure on the space of isomonodromic deformations. arXiv:1511.01608.

[11] M. Kato and J. Sekiguchi: Uniformization systems of equations with singularities along the discriminant sets of complex reflection groups of rank three. Kyushu J. Math. **68** (2014), 181-221.

[12] A. V. Kitaev: Grothendieck's dessins d'enfants, their deformations and algebraic solutions of the sixth Painlevé and Gauss hypergeometric equations. Algebra i Analiz **17**, no.1 (2005), 224-273.

[13] Y. Konishi and S. Minabe: Local quantum cohomology and mixed Frobenius structure. Preprint `arXiv:1405.7476`

[14] O. Lisovyy and Y. Tykhyy: Algebraic solutions of the sixth Painlevé equation. J. Geometry and Physics, **85** (2014), 124-163.

[15] P. Orlik and H. Terao: *Arrangements and Hyperplanes*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 300, Berlin, Springer-Verlag, 1992.

[16] C. Sabbah: *Isomonodromic Deformations and Frobenius Manifolds. An Introduction.* Universitext. Springer

[17] K. Saito: Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math. **27** (1980) 265-291.

[18] K. Saito: On a linear structure of the quotient variety by a finite reflexion group. Preprint RIMS-288 (1979), Publ. RIMS, Kyoto Univ. **29** (1993), 535-579.

[19] K. Saito, T. Yano and J. Sekiguchi: On a certain generator system of the ring of invariants of a finite reflection group. Comm. Algebra **8** (1980), 373-408.

[20] J. Sekiguchi: Three dimensional Saito free divisors and deformations of singular curves. J. Siberian Federal Univ., Mathematics and Physics, **1** (2008), 33-41.

[21] J. Sekiguchi: A classification of weighted homogeneous Saito free divisors. J. Math. Soc. Japan, **61** (2009), 1071-1095.

[22] G. C. Shephard and A. J. Todd: Finite unitary reflection groups. Canad. J. Math., **6** (1954), 274-304.

[23] 竹内端三著「函数論下巻」，裳華房

[24] H. Terao: Free arrangements of hyperplanes and unitary reflection groups. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 56 (1980), no. 8, 389-392.