Higgs 束や接続の Kobayashi-Hitchin 対応について

望月拓郎

代数幾何的な対象と, 微分幾何的な対象の間の対応を見出すというのは複素の代数幾何における主要な研究テーマといえます. その一つとして, ベクトル束の計量に関するもの (Kobayashi-Hitchin 対応) が挙げられます.

1960 年代に Narasimhan と Seshadri によってコンパクト Riemann 面上の既約ユニタリ接続を持つベクトル束と, stable な代数的ベクトル束の間の対応が証明されました. これは, 1980 年代に Kobayashi, Lübke, Donaldson, Hitchin, Uhlenbeck, Yau によって高次元の場合に拡張され, 滑らかな射影多様体上の既約 Hermite-Einstein 接続を持つベクトル束と stable な代数的ベクトル束の間の等価性が確立されました. その後, さまざまな変種が研究されました. 中でも, Simpson と Corlette によって詳しく研究された調和束と Higgs 束や平坦束の対応は極めて興味深いものです. 筆者は特異性を持つ場合への拡張を研究し, さらに半単純ホロノミック D 加群と純ツイスター D 加群の対応を得ました. 最近では二重周期性を持つインスタントンや周期性を持つモノポールの Kobayashi-Hitchin 対応を研究しています.

以下では, 上述の研究の流れについて概説します. 筆者自身による特異性を持つ調和束に関する研究に関する概説としては, [53] も御参照ください. また, [50] とも重複があります. なお本文では敬称を全て省略しました.

謝辞　この原稿は 16 回岡シンポジウムで行なった講演に基いています. 講演の準備中に, 改めて Kobayashi-Hitchin 対応に強い関心を持ったことから, 非コンパクト空間上の Kobayashi-Hitchin 対応に関する Simpson の定理の一般化や, 周期的モノポールの Kobayashi-Hitchin 対応に関する結果を得ることができました. 講演の機会を与えてくださった組織委員の方々, 特に松澤淳一先生と吉川謙一先生に感謝いたします.

1　Narasimhan-Seshadri の定理

コンパクト Riemann 面上の直線束の場合　特に簡単な場合として, 底空間が複素 1 次元で, さらにベクトル束の階数が 1 の場合から始めます. X をコンパクト Riemann 面とします.

命題 1.1 次の二つの間に自然な対応が存在.

- $c_1(L) = 0$ を満たす X 上の正則直線束 $(L, \overline{\partial}_L)$.
- X の基本群 $\pi_1(X)$ から $S^1 := \{a \in \mathbb{C} \mid |a| = 1\}$ への群準同型.

命題 1.1 は, 代数幾何 (複素幾何) 的な対象と位相幾何的な対象の間の対応を与えています. 難しくはありませんが興味深いものです.

どのような対応かを説明します. X 上の C^∞-級直線束 L に, 計量 h と, h を保つユニタリ平坦接続 ∇ が与えられている時, (L, h, ∇) をユニタリ平坦直線束ということにします. ユニタリ平坦直線束 (L, h, ∇) が与えられると, X 上のループに沿って接続 ∇ に関するモノドロミーを考えることで, 準同型 $\pi_1(X) \longrightarrow S^1$ が得られます. 逆に準同型 $\rho : \pi_1(X) \longrightarrow S^1$ が与えられると, 容易に ρ をモノドロミー表現としてもつようなユニタリ平坦直線束を構成できます. つまり, ユニタリ平坦直線束と $\pi_1(X)$ の S^1 への準同型は同値な対象です. (ここでは, X の複素構造やコンパクト性は必要ありません.) 以下ではこれらを区別しません. これより次の命題を示すことが目標になります.

命題 1.2 次の二つの間に自然な対応が存在.

- X 上の正則直線束 $(L, \overline{\partial}_L)$ で $c_1(L) = 0$ を満たすもの.
- X 上のユニタリ平坦束 (L, h, ∇).

X には複素構造が与えられていますので, $T^*X \otimes \mathbb{C} = \Omega_X^{0,1} \oplus \Omega_X^{1,0}$ のように分解され, X の 1-form は $(1,0)$-form と $(0,1)$-form というように分解されます. したがって, (L, h, ∇) が与えられていると接続

$$\nabla : C^\infty(X, L) \longrightarrow C^\infty(X, L \otimes T^*X) = C^\infty(X, L \otimes \Omega^{1,0}) \oplus C^\infty(X, L \otimes \Omega^{0,1})$$

も $\nabla^{0,1} + \nabla^{1,0}$ のように $(0,1)$-部分と $(1,0)$-部分の和に分解します. そして, $\nabla^{0,1}$ は L に正則構造を与えます. また, L 上には平坦接続が存在することから第一 Chern 類 $c_1(L)$ が 0 になります. したがって, X 上のユニタリ平坦直線束 (L, h, ∇) から, $c_1(L) = 0$ であるような正則直線束 $(L, \nabla^{0,1})$ が構成されます. この構成は, 情報を落としているだけの簡単なものです. 今の場合 h についての情報は ∇ にほぼ含まれていますので, ∇ から $\nabla^{0,1}$ という "半分" の情報をとりだしていることになります.

逆対応は, 古典的な調和解析の範囲でできることですが, もう少し非自明な話になります. まず, 一般に正則ベクトル束 $(E, \overline{\partial}_E)$ が与えられた時, E に計量 h が与えられると, h を保ち, かつ $(0,1)$-部分が $\overline{\partial}_E$ と一致するようなユニタリ接続 $\nabla_h = \overline{\partial}_E + \partial_{E,h}$ が一意的に決まります. これを $(E, \overline{\partial}_E, h)$ の Chern 接続と呼びます. Chern 接続の曲率を $R(h)$ であらわすことにします. 一般には, $R(h) \in C^\infty(X, \mathrm{End}(E) \otimes \Omega^{1,1})$ であり, 特に $\operatorname{rank} E = 1$ ならば $R(h) \in C^\infty(X, \Omega^{1,1})$ となります.

今やりたいことは, X 上の正則直線束 $(L, \overline{\partial}_L)$ で $c_1(L) = 0$ を満たすものに対して, $R(h) = 0$ となる計量 h を構成することです. とりあえず L の計量 h_0 をとります. 計量 h_0 を $e^\varphi h_0$ のようにとりかえると, 曲率は $R(e^\varphi h_0) = R(h_0) + \overline{\partial}\partial\varphi$ のように曲率が変わります. $c_1(L) = 0$ より, $\int_X R(h_0) = 0$ がわかっています. したがって, やりたいことは, $\int_X R(h_0) = 0$ という条件のもとで, $\overline{\partial}\partial\varphi = -R(h_0)$ を満たすように関数 φ をとりたい, という話になります. したがって, X に Kähler 計量 g をとると, X 上の関数 f が $\int_X f = 0$ を満たす時に, $\Delta_X \varphi = f$ を満たす φ が存在するか? という問題に帰着されます. 古典的な調和解析によってこのような解が存在すること, さらに定数の差を除いて一意的に定まることがよく知られています. したがって, $R(h) = 0$ を満たすような h が正の定数倍を除いて一意的に存在することがわかります.

Narasimhan-Seshadri の定理　直線束の場合について説明しましたが, 一般のベクトル束の場合にも命題1.1あるいは命題1.2が一般化されるのか? というのは自然な問です. 直線束の場合の話が途中まではそのまま拡張されます. つまり, ベクトル束 E, 計量 h, ユニタリ平坦接続 ∇ の組 (E, h, ∇) が与えられた時, $(E, \nabla^{0,1})$ という正則ベクトル束が得られます. 平坦接続を持つことから $c_1(E) = 0$ も成り立ちます.

しかし, 正則ベクトル束 $(E, \overline{\partial}_E)$ が $c_1(E) = 0$ を満たせば常にユニタリ平坦接続を持つかというと, そうはいかないことがわかります. 例えば, Grothendieck によると, $\mathbb{P}^1$ 上の正則ベクトル束は $\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)^{r_m}$ の形をしたものと同型で, $(r_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ という組によって同型類が分類されます. $\mathbb{P}^1$ の基本群は 1 ですから, rank 2 のユニタリ平坦束は直積束 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^2$ しかないはずですが, 一方で, 第一 Chern 類が 0 であるような正則ベクトル束の同型類は $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-m)$ $(m \geq 0)$ のように無限個あります. したがって, 第一 Chern 類が 0 という条件だけでは特徴づけられません.

$\mathbb{P}^1$ の場合には, $\pi_1(\mathbb{P}^1)$ が自明なので, ユニタリ表現に対応する正則ベクトル束であるための条件が $(E, \overline{\partial}_E) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus \operatorname{rank} E}$ であることはすぐにわかります. 楕円曲線 T の場合も $\pi_1(T) \simeq \mathbb{Z}^2$ であり, Atiyah による楕円曲線上の正則ベクトル束の分類がありますので, ユニタリ表現に対応する正則ベクトル束を具体的に書いてしまうことができます. しかし, 種数が 2 以上の場合には, 全てを書き尽すという方針ではうまくいかなくなります. そのかわりに, stable, あるいはもっと緩い polystable という条件によって特徴づけられます. これが Narasimhan-Seshadri の定理です.

stability とは次のような条件です. X 上のベクトル束 E について, $\mu(E) := \operatorname{rank}(E)^{-1} \int_X c_1(E)$ とおきます. E の任意の非自明な正則部分ベクトル束 $0 \neq E' \subsetneq E$ について $\mu(E') < \mu(E)$ が成り立つ時, 正則ベクトル束 E は stable であるといいます. "$<$" のかわりに "$\leq$" が成り立つ時に semistable といいます. また安定なものの直和 $E = \bigoplus E_i$ になっていて, 各 i について $\mu(E) = \mu(E_i)$ が成り立つ時, E を polystable といいます.

Narasimhan-Seshadri は 1965 年に出版された論文 [59] で次の定理を証明しました.

定理 1.3 (Narasimhan-Seshadri) *$c_1(E) = 0$ であるような正則ベクトル束 E がユニタリ平坦束から得られるための必要十分条件は, E が polystable であること. 既約ユニタリ平坦束から得られるための必要十分条件は, stable であること.*

これは, 純粋に代数幾何的な条件によって, 微分幾何あるいは位相幾何的な対象と対応するものを特徴づけていて, 現代の目でみても面白く美しい定理だと思います. 1960 年代当時はさらに驚きの結果だったのではないかと思います. この stability 条件は, Mumford [57] がベクトル束のモジュライを作りたいという動機付けから導入したものでした. 雑にいうと, ある種の代数幾何的な対象のパラメータ空間がモジュライです. 代数幾何的な対象のパ

ラメータ集合自体を代数的である程度良い性質を持つ空間として構成できることが望ましいのですが, 全てのベクトル束を考えてしまうとパラメータ空間が大きくなりすぎますし, あまり良いものにならないことが知られています. 例えば, Hausdorff という条件が満たされなくなってしまいますし, コンパクトでもなくなってしまいます. パラメータ空間が良い性質を持つようにするためには, 全てのベクトル束を考えるのではなく, 条件をつけて良いものを抜き出す方が良いということになります. そこで導入された条件が, コンパクト Riemann 面上のベクトル束の stability 条件でした. Mumford は, stable なベクトル束のモジュライが滑らかで準射影的な代数多様体になることを証明し, semistable なベクトル束のモジュライが射影的な多様体になることを証明しました. (この場合はモジュライをパラメータ空間とみるのは素朴すぎますが.) このような動機で導入された代数幾何的な条件が, 実は全く別の微分幾何的な対象との関係を特徴づけるものであった, ということは大きな驚きだったのではないかと思われます.

Narasimhan-Seshadri の定理の証明の方針　Narasimhan と Seshadri の証明は代数幾何的なものでしたが, 後に微分幾何的な別証明が Donaldson [12] によって与えられました. ここでは, さらに Donaldson をはじめとするいろいろな人達によって高次元の場合に研究されて整理された微分幾何的な方法について紹介します.

正則ベクトル束 $(E, \overline{\partial}_E)$ が, ユニタリ平坦束 (E, h, ∇) から得られていれば polystable であることを示すのは, 形式的な議論で容易になされます. $E' \subset E$ を E の正則部分ベクトル束とします. h から E' に誘導される計量を h' とあらわし, その Chern 接続の曲率を $R(h')$ であらわすことにします. また, π を E から E' への直交射影とします. すると, $\mathrm{Tr}\, R(h') = \mathrm{Tr}\big(R(h)\pi\big) - \big|\overline{\partial}_E \pi\big|^2$ という関係式が成り立ちます (Chern-Weil 公式). したがって,

$$\int_X c_1(E') = \int_X \mathrm{Tr}(R(h')) = \int_X \mathrm{Tr}(\pi R(h)) - \int \big|\overline{\partial}_E \pi\big|^2 = -\int_X \big|\overline{\partial}_E \pi\big|^2$$

という等式が成り立ちます. ここで, 初めの等号は第一 Chern 類と曲率の間の一般的な関係, 3 番目の等号は $R(h) = 0$ から従います. これより, $\mu(E') \leq 0$ が常に成り立ちます. さらに $\mu(E') = 0$ であれば, $\overline{\partial}_E \pi = 0$ が成り立ちます. これは, E' の直交補束 $E'^{\perp}$ も正則部分束であることを意味し, $E = E' \oplus E'^{\perp}$ という正則かつ直交な分解が得られます. E のユニタリ平坦接続 ∇ が E' と $E'^{\perp}$ を保つので, E', $E'^{\perp}$ もユニタリ平坦束になっています. これより, 簡単な帰納法で E が polystable であることがわかります.

逆は難しくなります. 問題自体は, polystable な正則ベクトル束 $(E, \overline{\partial}_E)$ に対して, $R(h) = 0$ となる計量 h を構成したいということであり, 直線束の時と同じです. しかし, 直線束の場合は $\Delta_X \varphi = g$ という形の線形な方程式に帰着されたのに対して, 階数が高い場合は $R(h_0) + \overline{\partial}_E(b^{-1}\partial_{E,h_0} b) = 0$ という非線形な偏微分方程式を解くことになり, はるかに難しくなります.

準備として X に Kähler 計量 g_X をとります. 計量に関する縮約によって, $(1,1)$-form から $(0,0)$-form を得る操作を Λ であらわすことにします. 正則ベクトル束 $(E, \overline{\partial}_E)$ に計量 h が与えられると, $\mathrm{End}(E) \otimes \Omega^{1,1}$ の切断 $R(h)$ から, $\mathrm{End}(E)$ の切断 $\Lambda R(h)$ が得られます. これは h に関して反自己共役となっています.

E の計量 h_0 をとります. 直線束の場合は既によくわかっているので, $\det(E)$ に誘導される計量 $\det(h_0)$ について $R(\det(h_0)) = 0$ が成り立つようにしておきます. Donaldson は熱方程式

$$h_t^{-1} \frac{\partial h_t}{\partial t} = -\sqrt{-1}\Lambda R(h_t) \tag{1}$$

について調べ, C^∞ 級の解が $0 \leq t < \infty$ の範囲で存在することを証明しました. これは非自明なことなのですが, 非線形な熱方程式に関する一般論を用いてなされます. 形式的な計算によって,

$$(\partial_t + \Delta'_X)|\Lambda R(h_t)|^2 = -\big|\overline{\partial}\Lambda R(h_t)\big|^2 \leq 0$$

という関係を確かめられます. これより, t が大きくなると $\sup|\Lambda R(h_t)|^2$ が小さくなっていくということは, 熱方程式に関する一般論からわかります. そして, h_t が有界な範囲にとどまっていることさえわかれば, 一般的な議論より収束部分列 h_{t_i} $(t_i \to \infty)$ の存在がわかり, 上のことより極限 h_∞ は $R(h_\infty) = 0$ を満たします. 問題は h_t が有界にとどまっていることを示すところです. ここでは非線形な熱方程式や楕円型方程式について一般的に成り立つことだけではなく, この問題固有の性質が必要になります.

そこで, Donaldson は "Donaldson functional" のアイディアを導入しました. E 上の計量全体を $\mathcal{H}_E$ であらわし, h における tangent space を $T_h\mathcal{H}_E$ であらわします. $b \in T_h\mathcal{H}_E$ に対して, $\sqrt{-1}\int_X \mathrm{Tr}(bR(h))$ を対応させることで, $\mathcal{H}_E$ 上の 1-form Φ が得られます. Donaldson はこの Φ が exact 1-form であることを見出しました. したがって, 二つの計量 $h^{(1)}$ と $h^{(2)}$ をつなぐ path にそって Φ を積分することで, $M(h^{(1)}, h^{(2)})$ という数が定まり

ます．$\frac{d}{dt}M(h_0,h_t) = -\int |F(h_t)|^2 \leq 0$という関係が成り立つことは形式的な計算で確かめられますので，特に$M(h_0,h_t) \leq 0$が成り立ちます．

そして，重要なのは$(E,\overline{\partial}_E)$がstableの時には，Donaldson functionalを用いて計量の間の距離を抑えられることです．Simpson [68] によって整理された形で述べます．

定理 1.4 (Donaldson, Simpson) $(E,\overline{\partial}_E)$が*stable*であると仮定する．$E$上の任意の計量$h^{(1)}$に対して，定数$C_1, C_2 > 0$が存在して次が成り立つ．

$$d_{\mathcal{H}_E}(h^{(1)},h^{(2)}) \leq C_1 + C_2 M(h^{(1)},h^{(2)}) \quad (\forall h^{(2)} \in \mathcal{H}_E,\ \det(h^{(2)}) = \det(h^{(1)})).$$

ここで，$d_{\mathcal{H}_E}$は$\mathcal{H}_E$上に定まる標準的な距離．

いったんこの評価が得られると，$M(h_0,h_t) \leq 0$ですから，$d_{\mathcal{H}_E}(h_0,h_t)$の有界性がわかり，上で述べたように(非自明ですが) 収束部分列h_{t_i} $(t_i \to \infty)$の存在がわかります．

この評価 (定理 1.4) の証明は難しいです．また，C_1, C_2をどのようにとってもこのような評価が成り立たないような列が存在すると仮定して，stability 条件に反するような部分ベクトル束を構成する，という背理法を使いますので，定数C_1, C_2の存在は得られますが，effectiveな評価は知られていません．

2 ベクトル束の Kobayashi-Hitchin 対応

Narasimhanと Seshadriの定理はそれ自身が興味深い定理ですが，さらに大きな研究の流れの一つの出発点にもなりました．例えば，高次元化を問うのは自然な問題です．これは最終的に Donaldson [15], Uhlenbeck-Yau [76] によって解決されました．

Stability 条件　Xを滑らかな射影多様体とします．Lを ampleな直線束とします．EをX上の正則ベクトル束とします．$\mathrm{rank}(F) > 0$であるような任意の$\mathcal{O}_X$-連接層Fに対して，$\mu_L(F) = \mathrm{rank}(F)^{-1} \int c_1(F) c_1(L)^{\dim X - 1}$という数が定まります．そこで，$F \subset E$で$0 < \mathrm{rank}\,F < \mathrm{rank}\,E$となるような部分連接層について，$\mu_L(F) < \mu_L(E)$が成り立つ時に，$E$を stableであるといいます．この条件は，一般にはLの選び方に依存します．stable bundleの直和$E = \bigoplus E_i$で，$\mu_L(E) = \mu_L(E_i)$となっているものを polystableといいます．この stability 条件は Takemoto [73, 74] によって導入されたもので，slope stabilityあるいはMumford-Takemotoの意味での stabilityとも呼ばれる条件です．この stability 条件は代数幾何的には粗いものであり，モジュライの構成には Hilbert 多項式から得られる Gieseker-Maruyamaの stability 条件が用いられましたし，さらに 21 世紀になってからは物理に刺激を受けて導入された Bridgelandの stability 条件が詳しく研究されています．しかし，ここではこの stability 条件を考えます．

Hermitian-Einstein 計量と Kobayashi-Hitchin 対応　この stability 条件に対応する微分幾何的な条件は何か？ということを探求して，Kobayashi [34] は Hermitian-Einstein 計量の概念を導入しました．Xの Kähler 形式ωを，そのコホモロジー類が$c_1(L)$と一致するようにとります．ωに関する縮約をΛであらわします．すると，正則ベクトル束$(E,\overline{\partial}_E)$の計量$h$に関する Hermitian-Einstein 条件は次のようになります．

$$\Lambda R(h) = \frac{\mathrm{Tr}\,\Lambda R(h)}{\mathrm{rank}\,E}\,\mathrm{id}_E\,. \tag{2}$$

これは，$\Lambda R(h)$がスカラー行列になっているという条件です．$\mathrm{Tr}\,R(h)$は直線束$\det(E)$の曲率であり，この部分は古典的な調和解析を用いて調べることができます．一般に，r次正方行列Aはスカラー行列$r^{-1}\,\mathrm{Tr}(A) I_r$とトレースが 0 になるような行列$A^{\perp} = A - r^{-1}\,\mathrm{Tr}(A) I_r$の和として一意的にあらわされます．そして，行列を扱う際に非可換性からくる難しさは$A^{\perp}$に集約されています．Hermitian-Einstein 条件は、$\Lambda R(h)$のうち扱いが難しい部分$\Lambda R(h)^{\perp}$が 0 になってしまっている，という条件を課しています．

これはいくつかの意味でとても良い条件です．まず，Hermitian-Einstein 計量を持つということが正則ベクトル束に対して非常に強い制約になります．例えば，Hermitian-Einstein 計量が導入された動機の一部であり，Kobayashi-Lübkeの結果として知られているのが，次の結果です．

定理 2.1 (Kobayashi-Lübke) コンパクト *Kähler* 多様体上の正則ベクトル束$(E,\overline{\partial}_E)$が *Hermitian-Einstein* 計量を持つならば，$(E,\overline{\partial}_E)$は *polystable.*

これは 1 次元の時と同様に Chern-Weil 公式を用いることで示されます. すなわち, 正則部分ベクトル束 $E' \subset E$ が与えられると, E' への直交射影を π とした時に, 適当な $C > 0$ について,

$$C\,\mathrm{rank}(E')\mu_L(E') = \sqrt{-1}\int \mathrm{Tr}(\pi\Lambda R(h)) - \int |\overline{\partial}\pi|^2 \leq \frac{\mathrm{rank}\,E'}{\mathrm{rank}\,E}\sqrt{-1}\int \mathrm{Tr}\,\Lambda R(h) = C\,\mathrm{rank}(E')\mu_L(E)$$

という式が成り立つことからわかります. また, $\Lambda R(h)^{\perp} = 0$ の時, $\mathrm{Tr}\big((R(h)^{\perp})^2\big)\omega^{n-2} \geq 0$ であることから, $\int_X c_1(E)^2 c_1(L)^{\dim X-2}$ と $\int_X \mathrm{ch}_2(E)c_1(L)^{\dim X-2}$ の間の不等式が得られ, Kobayashi-Lübke の不等式として知られています. (stable なベクトル束に対しては Bogomolov の不等式と呼ばれます.)

他の良い点として, 楕円型の方程式になっていることを挙げられます. つまり, $R(h)$ は線形化すると $\overline{\partial}\partial$ になります. $\sqrt{-1}\Lambda\overline{\partial}\partial$ が (定数倍を除いて)Laplacian になることから, 方程式 (2) を線形化すると h に関する楕円型の方程式になります. したがって, 80 年代ぐらいまでに蓄積された多様体上の非線形な楕円型方程式に関する手法を, 方程式 (2) の研究に適用できることになります.

そして, 二つめの良い点と関係しますが, 三つめの良い点として, Kobayashi の当初の目論見通り, 射影多様体上の正則ベクトル束について, stability 条件と Hermitian-Einstein 計量の存在が同値であることが挙げられます. すなわち次が証明されました.

定理 2.2 (Donaldson, Uhlenbeck-Yau) *X を滑らかな連結射影多様体とする. 正則ベクトル束 E が stable であれば, Hermitian-Einstein 計量を持つ.*

これは射影曲面の場合に Donaldson によって証明され [14], 一般の場合は Donaldson [15], Uhlenbeck-Yau [76] によって解決されました. Uhlenbeck-Yau は代数的な場合だけでなくコンパクト Kähler の場合に証明しています. Kobayashi-Lübke の定理とあわせて, 射影多様体上の正則ベクトル束の stability が, 既約 Hermitian-Einstein 計量の存在によって特徴づけられたことになります. これが Kobayashi-Hitchin 対応です.

Kobayashi-Hitchin 対応はそれ自体が非常に興味深いものですが, ゲージ理論, あるいは 4 次元多様体のトポロジーに関する Donaldson 理論 [18] との関連で, 特に興味を持たれたのだと思います. 特に Donaldson による複素 2 次元の場合の定理は Donaldson 理論の展開に大きな役割を果たしました.

4 次元 Riemann 多様体上の計量つきベクトル束 (E, h) 上のユニタリ接続 ∇ で, $*F(\nabla) + F(\nabla) = 0$ を満たすものを反自己双対接続といいます. これは, もともと物理で興味を持たれていたものですが, 反自己双対接続のモジュライから得られる不変量を調べることで 4 次元多様体に関する多くの不思議な性質が明らかにされていきました. もちろんこのモジュライを調べるというのはとても難しいことなのですが, Kähler 曲面の場合には反自己双対接続が Hermitian-Einstein 計量を持つ正則ベクトル束と一致します. 射影曲面上の stable なベクトル束のモジュライやそのコンパクト化に関しては, Gieseker や Maruyama によるモジュライの構成に始まって, 代数幾何の方々による詳しい研究があり, それが代数曲面のトポロジーを調べるのに使われたのでした.

Hitchin の問題　さまざまな状況において, stability 条件と Hermitian-Einstein 計量の存在を関係づける定理が, Kobayashi-Hitchin 対応 (あるいは Hitchin-Kobayashi 対応) と総称されています. 正確な歴史は筆者にはわかりませんが, [14] において, Narasimhan-Seshadri の定理の適切な高次元化は Hitchin と Kobayashi によって示唆された, というように述べられていることがもとになっているのではないかと思われます. (歴史的なことに関しては, [41] を参照.) Hermitian-Einstein 計量の導入は Kobayashi によるものですし, その動機付けは stability 条件に対応する微分幾何的な条件の探求にありましたので, "Kobayashi" が入っているのは自然なことのように思われます. 一方, Kobayashi を追悼する論文 [25] において, Hitchin が御自身の役割について紹介しています. それによると, 1979 年の 9 月に堅田で開かれた谷口シンポジウムの後で編集された "Non-linear problems in geometry" という冊子に提供した問題の一つが, Kobayashi-Hitchin 対応に関係するものでした. その問題は要約すると, "コンパクト Kähler 多様体 (X, ω) 上の正則ベクトル束 E が $c_1(E) = 0$ を満たし, さらに ω に関して stable である時, $\omega^{\dim X-1}R(h) = 0$ を満たすような E の計量 h が存在するか?" というものでした. これはまさに $\Lambda R(h) = 0$ という条件について述べています. さらに, "特性数やいろいろな消滅定理が, 肯定的な解決から得られるであろう" と述べられています. (正確なことは [25], あるいは [38] を御参照下さい.) $c_1(E) = 0$ の場合に限定されていますが, 問題の本質的な部分が捉えられています. そして, この問題に取り組んだ Donaldson が数学全般にわたる大きな変革をもたらしたのでした.

ユニタリ平坦束の場合　ところで, もともとの Narasimhan-Seshadri の定理はユニタリ平坦束に関するものでした. その素朴な一般化は次のようなものですし, 実際に証明もされます.

定理 2.3 (Donaldson, Uhlenbeck-Yau, Mehta-Ramanathan) *X を滑らかな連結射影多様体とする．次の対象の間に自然な対応が得られる．*

- *X 上のユニタリ平坦束 (あるいは X の基本群のユニタリ表現).*
- *X 上の polystable な 正則ベクトル束 E で, $\mathrm{ch}_i(E) = 0$ $(i > 0)$ を満たすもの.*

対応も曲線の場合と同じで, (E, h, ∇) から正則ベクトル束 $(E, \nabla^{0,1})$ をとりだします．平坦接続を持つので高次の Chern 指標が消えてしまいます．これが polystable であることも, Chern-Weil の公式より簡単にわかります．

逆は, stable で $\mathrm{ch}_i(E) = 0$ $(i > 0)$ のような $(E, \overline{\partial}_E)$ に対して, $R(h) = 0$ を満たす h を構成するのが問題です．曲線束の時と同様に, 直線束の場合は古典的な調和解析に持ち込めるので簡単です．つまり, $\mathrm{rank}\, E = 1$ ならば, E の計量 h_0 について $R(h_0) \in C^\infty(X, \Omega^{1,1})$ は閉 $(1,1)$-形式になります．高次 Chern 指標が 0 であるという仮定より $R(h_0)$ のコホモロジー類は 0 です．そして, $R(h_0 e^\varphi) = R(h_0) + \overline{\partial}\partial\varphi$ という関係式が成り立つので, 射影多様体, あるいはコンパクト Kähler 多様体に関する $\partial\overline{\partial}$-補題というものを用いると, $R(h_0) = \partial\overline{\partial}\varphi$ を満たす φ の存在がわかり, $h = h_0 e^\varphi$ とおくと, $R(h) = 0$ となります．

直線束の場合は線形な問題に持ち込めるので容易になりますが, 階数が高い場合は難しくなるのでした．さらに, 大域解析学で調べやすいのは楕円型方程式で与えられるような条件です．曲線の時には $R(h) = 0$ という条件は非線形な楕円型の方程式になりますが, 高次元では楕円型の方程式ではありません．ですから, $R(h) = 0$ という方程式はあまり調べやすいものではありません．そこで, まず Hermitian-Einstein 条件 $\Lambda R(h) = 0$ について調べます．この場合は, Kobayashi-Hitchin 対応が証明されたのでした．すると, $c_1(E)$, $\mathrm{ch}_2(E)$ と $\int \mathrm{Tr}\big((R(h)^\perp)^2\big)\omega^{\dim X - 2}$ の関係 (Kobayashi-Lübke の不等式) より, さらに $c_1(E) = \mathrm{ch}_2(E) = 0$ の時には $R(h) = 0$ も自動的に得られることがわかります．したがって, 高次 Chern 指標が消えるという位相的な条件をつけることで, ユニタリ平坦束と stable なベクトル束の同値性が得られます．このように, 仮に "ユニタリ平坦" の場合だけに興味があるとしても, 中間段階として Hermitian-Einstein 条件を経由します．この議論の流れは調和束の研究 (§3–4) でも有効です．

注意ですが, Mehta-Ramanathan [43, 44] が示したように, 代数的であれば定理 2.3 を示すには複素 2 次元の場合を調べることが本質的であり, 3 次元以上の場合にまで一般の Kobayashi-Hitchin 対応を調べる必要はありません．それは, X 上の stable なベクトル束を十分に ample で generic な超曲面へ制限したものが, 再び stable になることを用いるとわかります．この手法を用いて Mehta-Ramanathan は Donaldson による複素 2 次元での Kobayashi-Hitchin 対応から, 上記の定理を導いています．

3 Higgs 束と平坦束の Kobayashi-Hitchin 対応

コンパクト Riemann 面上の Higgs 束と平坦束　Donaldson, Uhlenbeck-Yau の仕事を受けて, Kobayashi-Hitchin 対応のさまざまな拡張が調べられました．一つの方向として空間を非コンパクトな場合にする, ということがありました．これについては後でまた触れます．別の方向として, 正則ベクトル束に付加構造をつけたものについて考えるということがなされました．例えば, 正則ベクトル束とその正則切断の組に対して, stability 条件と Hermitian-Einstein 条件が定義され, その同値性が示されます．そのようなものの中で特に興味深いものの一つに Higgs 束や平坦束に対する Kobayashi-Hitchin 対応があります．

Higgs 束と調和束　X を複素多様体とし, $(E, \overline{\partial}_E)$ を X 上の正則ベクトル束とします．θ を $(E, \overline{\partial}_E)$ の Higgs 場, すなわち, $\mathrm{End}(E) \otimes \Omega_X^{1,0}$ の正則切断であり, $\theta \wedge \theta = 0$ を満たすものとします．E に計量 h が与えられると, Chern 接続 $\nabla_h = \overline{\partial}_E + \partial_{E,h}$ と, θ の随伴 $\theta_h^\dagger \in C^\infty(X, \mathrm{End}(E) \otimes \Omega_X^{0,1})$ が定まります．

定義 3.1 接続 $\mathbb{D}^1 := \nabla_h + \theta + \theta_h^\dagger$ が平坦の時, h を $(E, \overline{\partial}_E, \theta)$ の多重調和計量といい, $(E, \overline{\partial}_E, \theta, h)$ を調和束という．

この条件は, $\overline{\partial}_E \theta_h^\dagger = R(h) + [\theta, \theta_h^\dagger] = \partial_{E,h}\theta = 0$ と同値です．$\dim X = 1$ の時に, 特に $R(h) + [\theta, \theta_h^\dagger] = 0$ を Hitchin 方程式といいます．

次元簡約と Hitchin 方程式　Riemann 面上の調和束は, インスタントンの次元簡約として, Hitchin [23] によって発見されました．$\mathbb{R}^4$ 上のインスタントンはベクトル束 $\widetilde{E}$, 計量 $\widetilde{h}$, 反自己双対ユニタリ接続 $\widetilde{\nabla}$ の組 $(\widetilde{E}, \widetilde{h}, \widetilde{\nabla})$ であり, 物理において基礎的な重要性を持つ対象です．次元簡約によってより低い次元の空間上の対象が得られます．例えば, $t(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + t, x_2, x_3, x_4)$ という作用に関してインスタントン $(\widetilde{E}, \widetilde{h}, \widetilde{\nabla})$ が同変とします．すると, $\mathbb{R}_{x_2,x_3,x_4}$ 上のベクトル束 E, 計量 h, ユニタリ接続 ∇ が得られます．この作用に関する微分 L_{x_1} と接続 $\widetilde{\nabla}$

6

に関する微分の差として $\phi = \widetilde{\nabla}_{x_1} - L_{x_1}$ が得られ, さらにこれも同変なので E の反エルミート自己準同型 ϕ が得られます. そして, 反自己双対接続の方程式 $F(\widetilde{\nabla}) + *F(\widetilde{\nabla}) = 0$ は, (E, h, ∇, ϕ) についての Bogomolny 方程式 $F(\nabla) - *\nabla\phi = 0$ に簡約されます. すなわち, インスタントンの 3 次元への次元簡約 (E, h, ∇, ϕ) がモノポールです. これも物理的に意味のある方程式です. また, 3 次元簡約したものは Nahm 方程式といいます. Nahm 方程式の解とモノポール方程式の解の間に, "Nahm 変換" というある種の双対性があるため, Nahm 方程式も研究されていました.

Hitchin は 2 次元簡約に着目しました. $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}_z \times \mathbb{C}_w$ とし, $\mathbb{C}_z$-作用に関して $(\widetilde{E}, \widetilde{h}, \widetilde{\nabla})$ が同変とします. $\mathbb{C}_w$ 上に (E, h, ∇) が誘導されます. さらに, $\nabla_{\bar{z}} = L_{\bar{z}} + f$, $\nabla_z = L_{\bar{z}} - f^\dagger$ のように分解します. $(E, \nabla, f, f^\dagger)$ に関する方程式は, $R(\nabla) + \left[f\,dw, f^\dagger d\overline{w}\right] = 0$ に簡約されます. これが, Hitchin 方程式と呼ばれるものです. 当時はこれ自体では物理的に意味のあるものとは考えられておらず, 方程式を研究する意義もはっきりしなかったと思われますが, Hitchin はさらに研究を進めました. この方程式を $(E, \nabla^{0,1}, f\,dw, h)$ に関する方程式とみなすと, 正則座標 w のとりかたに依存しないことがわかります. したがって, コンパクト Riemann 面上の Higgs 束 $(E, \overline{\partial}_E, \theta)$ と計量 h の組に関する条件として意味をなします. そして, 種数が 2 以上のコンパクト Riemann 面上で考えると, 非常に豊かな数学的対象であることを Hitchin は見出したのでした.

三位一体 (コンパクト Riemann 面, 階数 2 の場合) Hitchin は階数が 2 の場合を特に詳しく研究しました. 彼の理論の重要な出発点となるのが, 調和束と平坦束と Higgs 束の間の対応です.

定理 3.2 (Hitchin, Donaldson, Diederich-Ohsawa) *コンパクト Riemann 面上で次の対象は同値.*

- *階数 2 の 既約な調和束.*
- *階数 2 の Higgs 束 $(E, \overline{\partial}_E, \theta)$ で, $c_1(E) = 0$ を満たすもの.*
- *階数 2 の単純な平坦束 (E, ∇).*

Higgs 束 $(E, \overline{\partial}_E, \theta)$ が stable であるとは, 非自明な正則部分束 $0 \neq F \subsetneq E$ で $\theta(F) \subset F \otimes \Omega^1$ となるものについて, $\mu(F) < \mu(E)$ を満たすこととして定義されます. コンパクト Riemann 面上で, $\mu(E) = 0$ であるような polystable Higgs 束と調和束の対応を, 階数が 2 の場合に Hitchin [23] は証明しています.

Higgs 束 $(E, \overline{\partial}_E, \theta)$ と計量 h に関する Hitchin 方程式は, 接続 $\nabla = \nabla_h + \theta + \theta^\dagger$ が平坦という条件でした. 一方, 平坦束に対して (多重) 調和計量が定義され, (Higgs 束, 多重調和計量) という組と (平坦束, 多重調和計量) という組は同値になり, いずれも調和束とよばれます. Riemann 面の場合の, 平坦束に対する調和計量は次のように定義されます (V, ∇) を平坦束とします. h という計量を与えると, $\nabla = \nabla_h + \Phi_h$ のように分解します. ここで, ∇_h はユニタリ接続で, Φ_h は $\mathrm{End}(V) \otimes (\Omega^{1,0} \oplus \Omega^{0,1})$ の自己双対切断. さらに, $\nabla_h = \partial_{V,h} + \overline{\partial}_{V,h}$, $\Phi_h = \theta_h + \theta_h^\dagger$ と分解します. $\overline{\partial}_{V,h}\theta_h = 0$ が満たされる時に, h を調和計量といいます. (高次元 Kähler 多様体の場合は後述.)

平坦束に対する調和計量は, "調和写像" の一種とみなすことができます. 調和写像とは次のようなものでした. Riemann 多様体の C^∞-級写像 $f : M_1 \longrightarrow M_2$ について $df \in \mathrm{Hom}(TM_1, f^*TM_2)$ が定まり, TM_1, f^*TM_2 には計量がはいります. そこで f のエネルギーが $E(f) := \int_{M_1} |df|^2$ として (収束を無視すると) 与えられます. 調和写像とは Riemann 多様体の間の写像で, エネルギーの変分方程式によって定義されるものです. M_1, M_2 がコンパクトで M_2 が非正曲率ならば各ホモトピー類に本質的に一意的な調和写像が存在する, という Eelles-Sampson の結果が古典的な結果としてよく知られています.

(V, ∇) という平坦束に計量 h をとると, X の普遍被覆面 $\widetilde{X}$ から計量全体の空間 $\mathcal{H}$ への写像 F_h が定まります. $\mathcal{H}$ は対称空間であり, 特に自然な計量を持っています. X に Kähler 計量をとっておくと, "F_h が調和写像である" という条件が意味をなします. また, エネルギーが X の共形構造のみに依存して決まりますので, $\dim X = 1$ であれば Kähler 計量のとりかたに依存しないこともわかります. そして, h が調和計量であることと F_h が調和写像であることは同値です.

Donaldson[16] は Eelles-Sampson の方法を適用することで, リーマン面上の階数 2 の単純な平坦束に対して調和計量の存在を示しています. Diederich-Ohsawa[11] は別の動機から類似の問題を研究し, 基本群が $PSL(2, \mathbb{R})$ への表現からくる場合を証明しています.

三位一体 (一般) 定理 3.2 の一般化, すなわち階数を一般にし, 底空間の次元も一般にすることが, Corlette [9] と Simpson [68] によってなされています. ただ, 後からみると一般化と捉えられますが, 独立に始めた研究が結果として一般化につながったようです.

定理 3.3 *滑らかで連結な射影多様体上で, 次の対象は同値.*

- 調和束.
- *polystable* な *Higgs* 束 $(E, \overline{\partial}_E, \theta)$ で, $\mathrm{ch}_i(E) = 0$ $(i > 0)$ を満たすもの.
- 半単純平坦束 (E, ∇).

平坦束と調和束 (Corlette) Corlette はコンパクト Riemann 多様体上の平坦束の特別な計量は何か？という問題を考えて, 調和計量にたどりつきました. 考えているものは Donaldson や Hitchin と本質的には同じですが, 独立に研究していたようです. そして, Eelles-Sampson の方法を用いてコンパクト Riemann 多様体上の平坦束が調和計量を持つための必要十分条件が半単純であることを証明しました.

Corlette の仕事でさらに重要なのは, Siu による Bochner 型テクニックを組合せたことです. 調和写像は楕円型の方程式を満たすもので, それ自体が良い性質を持つものといえますが, Siu は調和写像の研究に Bochner 型テクニックを適用することで, ある状況では調和写像が自動的により強い条件を満たすことを証明しています. その方法を調和計量に対して適用することで, Corlette は調和計量に関してさまざまな結果を得ていますが, その一つとして, 底空間がコンパクト Kähler 多様体の時には調和計量が自動的に多重調和計量になることを示しています.

底空間が Kähler 多様体の時には, 平坦束 (V, ∇) に計量 h が与えられると, 先程と同様に $\nabla = \partial_{V,h} + \overline{\partial}_{V,h} + \theta_h + \theta_h^\dagger$ と分解しますが, h が (V, ∇) の調和計量であるための条件は, $\Lambda(\overline{\partial}_{V,h}\theta_h) = 0$ になります. より強く $\overline{\partial}_{V,h}^2 = \overline{\partial}_{V,h}\theta_h = \theta_h^2 = 0$ という条件が満たされる時に, h を多重調和計量といいます. Corlette は

$$\partial\overline{\partial}\langle\theta, \theta\rangle\omega^{n-2} = \bigl(C_1|\theta_h^2|^2 + C_2|\overline{\partial}_{V,h}\theta_h|^2\bigr)\omega^n \tag{3}$$

(ただし, $C_1, C_2 > 0$) という形の等式を導きました. これより底空間がコンパクトの場合, 積分をすると左辺は消えますので, $\theta_h^2 = \overline{\partial}_{V,h}\theta = 0$ が得られます. さらに, これより $\overline{\partial}_{V,h}^2 = 0$ であることも形式的な計算で示されます. したがって, 調和計量が自動的に多重調和計量になる, ということを Corlette は見出しました. これによって, コンパクト Kähler 多様体上で調和束と半単純平坦束の間の対応を確立したのでした.

多重調和計量の定義を, $\overline{\partial}_{V,h}^2 = \overline{\partial}_{V,h}\theta_h = \theta_h^2 = 0$ と述べましたが, 実際には $\overline{\partial}_{V,h}\theta_h = 0$ が満たされていれば, 自動的に $\overline{\partial}_{V,h}^2 = 0$, $\theta_h^2 = 0$ も満たされることを注意しておきます. 実際, 上のように (V, ∇, h) から $\overline{\partial}_{V,h}$, $\partial_{V,h}$, θ_h, $\theta_h^\dagger$ を構成すると, $\partial_{V,h}\theta_h = 0$ は常に成り立ちますので ([47] または [48] 参照), $\overline{\partial}_{V,h}\theta_h = 0$ が成り立てば (3) より $\theta_h^2 = 0$ がわかり, $\overline{\partial}_{V,h}^2 = 0$ も得られます.

Higgs 束と調和束と偏極付 Hodge 構造の変動 (Simpson) 一方, Simpson は Higgs 束についての Kobayashi-Hitchin 対応を証明しています. これは Hitchin の仕事の一般化とみなせます. しかし, Simpson は偏極付 Hodge 構造の変動の構成の問題を考えている中で, Kobayashi-Hitchin 対応で開発された方法や Hitchin の研究をとりいれていったようです.

代数多様体の射影的で滑らかな射 $f : X \longrightarrow Y$ が与えられた時に, 各ファイバーのコホモロジー群 $H^k(f^{-1}(y))$ $(y \in Y)$ を考えることで, Y の上の平坦束が得られます. この上に自然にはいる構造を抽象化したものとして Griffiths が偏極付 Hodge 構造の変動の概念を導入しました. 偏極付 Hodge 構造の良い性質が Griffiths や Deligne の研究によって見出されていました. 特に Deligne は偏極付 Hodge 構造に対する調和解析を開拓していました. 一方で, 大域的に与えられた偏極付 Hodge 構造の変動の例は, 上のように幾何学的な構成以外にはほとんど知られていなかったようです. また, 偏極付 Hodge 構造の変動が平坦束全体の中でどのように分布しているのか, ということについてもよくわかっていなかったようです.

(複素) 偏極付 Hodge 構造の変動は局所系 $L_{\mathbb{C}}$, $L_{\mathbb{C}} \otimes \mathcal{O}_X$ 上の Hodge フィルトレーション F, $L_{\mathbb{C}} \otimes \mathcal{O}_{X^\dagger}$ 上の Hodge フィルトレーション G, 平坦なペアリング $\langle\cdot,\cdot\rangle$ というデータによって与えられます. ただし, $L_{\mathbb{C}} \otimes \mathcal{O}_X$, $L_{\mathbb{C}} \otimes \mathcal{O}_{X^\dagger}$ 上に自然に誘導される平坦接続は Griffiths 横断性を満たし, さらにペアリングはある種の正値性を満たします. すると, $E = \mathrm{Gr}_F(L_{\mathbb{C}} \otimes \mathcal{O}_X)$ 上には, $\theta : \mathrm{Gr}_F^i \longrightarrow \mathrm{Gr}_F^{i-1} \otimes \Omega_X^1$ をよせあつめることで Higgs 場 $\theta \in \mathrm{End}(E) \otimes \Omega^1$ が得られます. $(E = \bigoplus E_i, \theta)$ は元のものに比べると, かなり情報が落ちていて, 特に "微分" を含んでいません. 偏極から定まる計量によって平坦接続が $\nabla = \overline{\partial}_E + \partial_{E,h} + \theta + \theta^\dagger$ として復元できることに Simpson は着目し, $(E, \overline{\partial}_E, \theta)$ という Higgs 束に対する多重調和計量を構成するという問題, つまり, 計量 h を $F(h) = (\nabla_h + \theta + \theta^\dagger)^2 = 0$ のように構成したいという問題にいたりました. $TrF(h) = 0$ は階数 1 の問題なので容易ですが, 残りの部分についての $\Lambda F(h)^\perp = 0$ という条件は, ユニタリ平坦接続の構成の時と同様に大域解析学にはあまりなじみません. そこで, 中間段階として, 楕円型方程式 $\Lambda F(h)^\perp = 0$ という Hermitian-Einstein 条件の研究にたどり着きます.

Simpson は, Donaldson, Uhlenbeck-Yau の研究も援用しながら, Higgs 束に対する Kobayashi-Hitchin 対応を確立しました. さらに, Higgs 束に Hermitian-Einstein 計量が与えられている時に, Kobayashi-Lübke の不等式, あ

るいは Bogomolov-Gieseker の不等式が拡張されることを見出しました. 次のような式です.

$$\int_X \Big(2c_2(E) - \frac{r-1}{r}c_1(E)^2\Big)\omega^{n-2} = C\int_X \mathrm{tr}(F(h)^{\perp}F(h)^{\perp})\omega^{n-2} \geq 0.$$

ただし, $F(h)^{\perp} := F(h) - \frac{\mathrm{Tr}\,F(h)}{\mathrm{rank}\,E}\,\mathrm{id}_E$. したがって, 高次の特性類が消えているという位相的な条件のもとで, Hermitian-Einstein 計量を構成すれば多重調和計量になっていることがわかります. さらに, (E,θ,h) について $E = \bigoplus E_i$ のように直交分解していて, $\theta E_i \subset E_{i-1}$ となっていれば, (複素) 偏極付 Hodge 構造の変動になっていることを洞察しました. これより, 偏極付 Hodge 構造の変動に関する Kobayashi-Hitchin 対応を確立したのでした.

Simpson は, より深いレベルのことも調べています. 例えば, 平坦束と調和束の間の対応も Higgs 束と調和束の間の対応と同じように Hermitian-Einstein 計量を経由して理解できることを洞察しています. ([70] を参照.) すなわち, $\Lambda(\overline{\partial}\theta) = 0$ が平坦束の場合の Hermitian-Einstein 条件になります. 平坦束の場合には特性類が自明なので, ここから Higgs 束の時と並行した議論で多重調和計量になることを示せます. この見方は, 特異性がある場合に Kobayashi-Hitchin 対応を拡張する際, 特に重要になります.

定理 3.2 や定理 3.3 はモジュライの間の微分同相に精密化されています. Hitchin や Simpson は, この対応を用いてモジュライ空間上に hyperkähler 構造や非可換 Hodge 構造などの豊かな構造を見出しました. これらは多くの人達を魅了し, 現在でも盛んに研究されています.

4 特異性がある場合 (準射影的な場合)

4.1 1 次元の場合

次に問題になるのは準射影的な場合, あるいは特異性がある場合です. 1 次元の場合には, コンパクト Riemann 面からいくつかの点を取り除いたものの上の平坦束や, それに対応する調和束, Higgs 束を考えることになります. ユニタリ平坦束の場合に Mehta と Seshadri [45] によって研究され, より一般に従順調和束の場合に Simpson [69] によって研究されました.

ユニタリ平坦束 (E,h,∇) を $C\setminus D$ 上のユニタリ平坦束とします. これより $(E,\nabla^{0,1})$ という $C\setminus D$ 上の正則ベクトル束が得られます. $D\neq\emptyset$ ならば, $C\setminus D$ 上の全ての正則ベクトル束が同型になってしまいますので, $(E,\nabla^{0,1})$ だけでは情報としては不十分です. これを C 上のものに延長して, さらに D の各点における特異性のデータを加味する必要があります.

平坦束に関しては Delinge 拡大というものがあります. 局所的に説明することにします. $Y = \{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<1\}$ とし, $Y\setminus\{0\}$ 上にユニタリ平坦束 (E,h,∇) が与えられているとします. このとき, E の正則な枠 $\boldsymbol{v}$ と定数行列 A が存在して, $\nabla\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}A\,dz/z$ のようにできます. さらに, A の固有値 α について $0\leq\mathrm{Re}(\alpha)<1$ のようにできます. そこで, この $\boldsymbol{v}$ を用いて E を Y 上のベクトル束 $\widetilde{E}$ に延長します. このような $\widetilde{E}$ を Deligne 拡大といいます.

これだけでは特異性に関する情報が十分に残ってはいません. そのために, $\widetilde{E}_{|0}$ には $\mathrm{Res}(\nabla)$ の作用があり, $\widetilde{E}_{|0} = \bigoplus \mathbb{E}_{\alpha}\widetilde{E}_{|0}$ のように分解されます. そこで, $-1<a\leq 0$ について, $F_a(\widetilde{E}_{|0}) = \bigoplus_{-\mathrm{Re}(\alpha)\leq a}\mathbb{E}_{\alpha}\widetilde{E}_{|0}$ のようにおいて, フィルトレーションをさだめます. このフィルトレーションをパラボリック構造といい, パラボリック構造を持つベクトル束をパラボリックベクトル束といいます.

今の場合は結果として同じものが得られますが, もう少し違う見方として, $U\subset Y$ について, $0\in U$ の時, $\mathcal{P}_aE(U)$ を $U\setminus\{0\}$ 上の E の正則切断で, $|s|_h = O(|z|^{-a-\epsilon})$ $(\epsilon>0)$ を満たすもの全体として定義します. また, $0\notin U$ の時には, $\mathcal{P}_aE(U)$ を U 上の E の正則切断全体とします. すると, $\mathcal{O}_Y$-加群 $\mathcal{P}_aE$ が得られます. これが, 今の場合は局所自由 $\mathcal{O}_Y$-加群になります. $\mathcal{P}_0(E) = \widetilde{E}$ であり, 自然な線型写像 $\mathcal{P}_a(E)_{|0}\longrightarrow\mathcal{P}_0(E)_{|0}$ の像が F_a になります. 後者の見方は後でより役に立ちます.

$C\setminus D$ 上にユニタリ平坦束が与えられている時には, この操作を各 $P\in D$ において施すことで, C 上のベクトル束 $\widetilde{E}$ と, $\widetilde{E}_{|P}$ $(P\in D)$ におけるパラボリック構造が得られます. フィルトレーションつきのものを $\widetilde{E}_*$ であらわします. また, 次のように $\deg(\widetilde{E}_*)$ と $\mu(\widetilde{E}_*)$ を定めます.

$$\deg(\widetilde{E}_*) := \int_X c_1(\widetilde{E}) - \sum_{P\in D}\sum_{-1<a\leq 0} a\,\mathrm{rank}\,\mathrm{Gr}^F_a(\widetilde{E}_{|P}), \quad \mu(\widetilde{E}_*) := \frac{\deg(\widetilde{E}_*)}{\mathrm{rank}\,\widetilde{E}}.$$

各 $E_1 \subset \widetilde{E}$ について, $F_a(\widetilde{E}_{1|P}) := F_a(\widetilde{E}_{|P}) \cap \widetilde{E}_{1|P}$ とおくと, E_1 にもパラボリック構造が誘導されます. すると, stability 条件がパラボリック構造がない場合と同様にして定義されます. そして, Mehta-Seshadri は次を証明しました.

定理 4.1 (Mehta-Seshadri) 上の対応によって, 次の二つが同値.

- $C \setminus D$ 上のユニタリ平坦束.
- (C, D) 上の *polystable* なパラボリック正則ベクトル束 $\widetilde{E}_*$ で $\mu(\widetilde{E}_*) = 0$ を満たすもの.

パラボリック構造は Maruyama と Yokogawa [42, 77] によって高次元の場合に拡張され, stable なパラボリック層や stable なパラボリック Higgs 層などのモジュライが構成されています.

上で述べたことからもわかるように, 特異性がある場合には微分幾何的な対象から代数幾何的な対象の構成で手間がかかるようになります. つまり, 特異性がない場合には, 接続から正則構造をとりだすだけで十分であったのに対して, 特異性がある場合には, 微分幾何的なデータは特異性の外側でしか与えられていないので, 特異性のところにまである程度の情報を残しながら延長する必要があります.

従順調和束　より難しい状況においてどのように考えるべきかを明確にしたのが, Simpson [69] による従順調和束についての仕事です. 彼はまず, 穴あき円板 $Y \setminus \{0\}$ 上の従順調和束について詳細な研究を行ないました. $(E, \overline{\partial}_E, \theta, h)$ を $Y \setminus \{0\}$ 上の調和束とします. $\theta = f\, dz/z$ という表示を持ちます. $\det(t\,\mathrm{id}_E - f) = \sum a_j(z) t^j$ という特性多項式が得られます. この $a_j(z)$ が $z = 0$ において正則の時, 従順調和束といいます.

上と同じように $\mathcal{P}_* E$ を考えることで, 従順調和束 $(E, \overline{\partial}_E, \theta)$ から $\mathcal{O}_Y$-加群の列 $\mathcal{P}_* E := (\mathcal{P}_a E \,|\, a \in \mathbb{R})$ が得られます. また, $\mathcal{E}^1 := (E, \overline{\partial}_E + \theta^\dagger)$ という正則ベクトル束と計量 h に同様の構成を施すことで, $\mathcal{O}_Y$-加群の列 $\mathcal{P}_* \mathcal{E}^1$ が得られます. Simpson [69] は [10] も援用して次を示しました.

定理 4.2 (Simpson)

- $(\mathcal{P}_* E, \theta)$ は正則フィルトレーション付 *Higgs* 束. すなわち, 各 $\mathcal{P}_a E$ は局所自由 $\mathcal{O}_Y$-加群であり, $\theta \mathcal{P}_a E \subset \mathcal{P}_a E \otimes \Omega^1(\log O)$.
- $(\mathcal{P}_* \mathcal{E}^1, \mathbb{D}^1)$ は正則フィルトレーション付平坦束. すなわち, 各 $\mathcal{P}_a \mathcal{E}^1$ は局所自由 $\mathcal{O}_Y$-加群であり, $\mathbb{D}^1 \mathcal{P}_a \mathcal{E}^1 \subset \mathcal{P}_a \mathcal{E}^1 \otimes \Omega^1(\log O)$.

さらに, Simpson は $\mathrm{Gr}^{\mathcal{P}}_a(E) := \mathcal{P}_a E / \mathcal{P}_{<a} E$ 上に誘導される $\mathrm{Res}(\theta)$ の作用と, $\mathrm{Gr}^{\mathcal{P}}_a(\mathcal{E}^1) := \mathcal{P}_a \mathcal{E}^1 / \mathcal{P}_{<a} \mathcal{E}^1$ 上に誘導される $\mathrm{Res}(\mathbb{D}^1)$ の作用の比較をしています.

これらはかなり難しい話です. 穴開き円板上の偏極付 Hodge 構造の変動に関する Griffiths や Schmid の仕事がありますが ([67] を参照), それを調和束の状況に拡張するもので, ユニタリの場合に比べるとはるかに難しくなります.

上述の特異点まわりの局所理論に基づいて Simpson はコンパクト Riemann 面 C と有限集合 D の組にたいして, (C, D) 上の従順調和束, すなわち $C \setminus D$ 上の調和束 $(E, \overline{\partial}_E, \theta, h)$ で, D の各点のまわりで従順になっているものについて研究しました. 各 $P \in D$ のまわりで局所理論を適用することで, $C \setminus D$ 上の従順調和束から, (C, D) 上の正則フィルトレーション付 Higgs 束 $(\mathcal{P}_* E, \theta)$ や正則フィルトレーション付平坦束 $(\mathcal{P}_* \mathcal{E}^1, \mathbb{D}^1)$ が得られます. また, $\mu(\mathcal{P}_* E) = \mu(\mathcal{P}_* \mathcal{E}^1) = 0$ が成り立つことを示しています. そして, polystable であることを証明しています. これもかなり非自明な主張で, Chern-Weil 公式に持ち込むために $\mu(\mathcal{P}_* E)$ や $\mu(\mathcal{P}_* \mathcal{E}^1)$ と, 曲率から定まる量を結びつけるには, 特異点まわりでの詳しい解析が必要になります. そして, 逆構成ができることも示しています. すなわち, 次の定理を証明しています.

定理 4.3 (Simpson) 上の対応によって, 次は同値.

- (C, D) 上の従順調和束.
- (C, D) 上の正則フィルトレーション付 *Higgs* 束 $(\mathcal{P}_* \mathcal{E}^0, \theta)$ で, *polystable* かつ $\mu(\mathcal{P}_* \mathcal{E}^0) = 0$.
- (C, D) 上の正則フィルトレーション付平坦束 $(\mathcal{P}_* \mathcal{E}^1, \nabla)$ で, *polystable* かつ $\mu(\mathcal{P}_* \mathcal{E}^1) = 0$.

非コンパクト Kähler 多様体上の Kobayashi-Hitchin 対応　定理 4.3 における逆構成には, 非コンパクト Kähler 多様体上での Hermitian-Einstein 計量の構成が必要になります. §3 において, Simpson の結果を射影多様体の場合に述べましたが, [68] において彼は既に非コンパクト Kähler 多様体上で理論を展開していました.

(X,ω) を Kähler 多様体とします. 次の三つを仮定します. (i) 体積が有限, (ii) C^∞-級関数 $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ で, 各 $a \in \mathbb{R}$ について $\varphi^{-1}(\{0 \leq t \leq a\})$ はコンパクトであり , $\Delta_X \varphi$ が有限, (iii) 単調増大関数 $a : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ で, $a(0) = 0$, $a(t) = t$ $(t \geq 1)$ を満たし , さらに次の条件が成り立つようなものが存在.

- 有界な関数 $f : X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ について, $\Delta_X f \leq B$ がある定数 B について成り立つとする. この時, B に依存する定数 $C(B)$ があって, $\sup |f| \leq C(B) a(\int f)$.

また, $\Delta_X f \leq 0$ ならば, $\Delta_X f = 0$.

この条件のもとで, Simpson は analytic stability 条件を導入しました. $(E, \overline{\partial}_E, \theta)$ を X 上の Higgs 束とし , h_0 を E の計量とします. $|\Lambda F(h_0)|_{h_0}$ が有界であると仮定します. この時,

$$\deg(E, h_0) := \sqrt{-1} \int_X \operatorname{Tr}\bigl(\Lambda F(h_0)\bigr)\, \mathrm{dvol}_X$$

とおきます. より一般に, $F \subset E$ を充満部分層とします. 複素余次元 2 の部分集合 $Z(F) \subset X$ が定まり , $Z(F)$ の外では F は E の部分束となっています. したがって, $F_{|X \setminus Z(F)}$ の計量 $h_{0,F}$ が誘導されます. そこで,

$$\deg(F, h_0) := \sqrt{-1} \int_{X \setminus Z(F)} \operatorname{Tr}\bigl(\Lambda F(h_{0,F})\bigr)\, \mathrm{dvol}_X \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

が定まります. 充満部分層 $F \subset E$ で $\theta(F) \subset F \otimes \Omega^1$ を満たし $0 < \operatorname{rank} F < \operatorname{rank} E$ であるものについて, $\deg(F, h_0)/\operatorname{rank}(F) < \operatorname{rank}(E, h_0)/\operatorname{rank} E$ が成り立つ時, $(E, \overline{\partial}_E, \theta, h_0)$ を analytically stable であるといいます. Simpson [68] は次を示しています.

定理 4.4 (Simpson) $(E, \overline{\partial}_E, \theta, h_0)$ が *analytically stable* であると仮定. この時, $(E, \overline{\partial}_E, \theta)$ の *Hermitian-Einstein* 計量で *(i)* $\det(h) = \det(h_0)$, *(ii)* h と h_0 が互いに有界, *(iii)* $\overline{\partial}(h_0 h^{-1}) \in L^2$ を満たすものが存在.

これは基本的な重要性を持つ定理です. 本来の Simpson の結果は, より一般にコンパクトリー群 G が X, $(E, \overline{\partial}_E, h_0)$ に作用している場合に与えられていますが, 簡単のためにここでは G が自明の場合を述べています. (群作用に関しては, 下記の定理 6.1 を参照.) Higgs 束で述べましたが, 平坦束の場合にも同様のことが成り立ちます.

4.2 高次元の場合

この部分のより詳しいサーベイは [53] を御参照ください.

従順調和束　X を滑らかな射影多様体とし , D を単純正規交叉超曲面とします. $(E, \overline{\partial}_E, \theta, h)$ を $X \setminus D$ 上の調和束とします. Higgs 束 $(E, \overline{\partial}_E, \theta)$ は $T^*(X \setminus D)$ 上の連接層を誘導します. この層の台を Higgs 束のスペクトル多様体といい, Σ_θ であらわすことにします. $T^*X(\log D)$ における Σ_θ の閉包が X 上固有である時, 調和束 $(E, \overline{\partial}_E, \theta, h)$ は (X, D) 上従順であるといいます.

従順という条件は次のようにも述べられます. 正則な座標近傍 $(U, z_1, \ldots, z_n)$ を $U \cap D = \bigcup_{i=1}^{\ell} \{z_i = 0\}$ のようにとると , $\theta = \sum_{i=1}^{\ell} f_i\, dz_i/z_i + \sum_{j=\ell+1}^{n} g_j dz_j$ とあらわされます. さらに特性多項式 $\det(t\,\mathrm{id} - f_i) = \sum a_{i,k} t^k$, $\det(t\,\mathrm{id} - g_j) = \sum b_{j,k} t^k$ が得られます. $(E, \overline{\partial}_E, \theta, h)_{|U \setminus D}$ が $(U, U \cap D)$ 上で従順であるための必要十分条件は, 各係数 $a_{i,k}$, $b_{j,k}$ が U 上で正則関数であることです.

各複素数 λ について, 正則ベクトル束 $(E, \overline{\partial}_E + \lambda \theta_h^\dagger)$ を $\mathcal{E}^\lambda$ であらわします. 対応する $\mathcal{O}_{X \setminus D}$-加群も同じ記号であらわします. この上には, 平坦 λ-接続 $\mathbb{D}^\lambda := \overline{\partial}_E + \lambda \theta^\dagger + \lambda \partial_E + \theta$ が定まります. 1 次元の時と同様に, 特異点のまわりの性質を調べて, $X \setminus D$ 上の $(\mathcal{E}^\lambda, \mathbb{D}^\lambda)$ を (X, D) 上の有理型な対象に延長することが重要です.

局所理論　$X = \Delta^n$, $D = \bigcup_{i=1}^{\ell} \{z_i = 0\}$ の場合に説明します. $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^\ell$ として, 開集合 $U \subset X$ について, $\mathcal{P}_{\boldsymbol{a}} \mathcal{E}^\lambda(U)$ を $U \setminus D$ 上の $\mathcal{E}^\lambda$ の section s であって, 各 $P \in U \cap D$ のまわりで, $|s|_h = O\Bigl(\prod_{i=1}^{\ell} |z_i|^{-a_i - \epsilon}\Bigr)$ $(\forall \epsilon > 0)$ が成り立つもの全体とします. すると , $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{P}_{\boldsymbol{a}} \mathcal{E}^\lambda$ が得られます. 次が証明されます ([47] を参照).

定理 4.5 $\mathcal{P}_{\boldsymbol{a}}\mathcal{E}^\lambda$ は局所自由 $\mathcal{O}_X$-加群. さらに, 適当な枠 $\boldsymbol{v}$ をとると, v_i に対して $\boldsymbol{b}_i \in \mathbb{R}^\ell$ が定まり, 各 $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^\ell$ について, 次が成り立つ.

$$\mathcal{P}_{\boldsymbol{c}}\mathcal{E}^\lambda = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}([\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}_i])v_i.$$

(ここで, $\boldsymbol{e} = (e_1, \ldots, e_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$ *に対して,* $[e_i] := \max\{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \le e_i\}$, $[\boldsymbol{e}] = ([e_1], \ldots, [e_\ell])$ *とおいている.)* さらに, 各 $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^\ell$ について $\mathbb{D}^\lambda \mathcal{P}_{\boldsymbol{c}}\mathcal{E}^\lambda \subset \mathcal{P}_{\boldsymbol{c}}\mathcal{E}^\lambda \otimes \Omega^1(\log D)$ が成り立つ.

従順調和束の Kobayashi-Hitchin 対応 X を複素多様体, D を正規交叉超曲面とします. $D = \bigcup_{i\in\Lambda} D_i$ を既約分解とします. (X, D) 上の従順調和束 $(E, \overline{\partial}_E, \theta, h)$ が与えられると, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^\Lambda$ について, D の各点のまわりで定理 4.5 を適用することで, $\mathcal{P}_{\boldsymbol{a}}\mathcal{E}^\lambda$ という局所自由 $\mathcal{O}_X$-加群が得られます. これをまとめて考えたもの $(\mathcal{P}_{\boldsymbol{a}}\mathcal{E}^\lambda \,|\, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^\Lambda)$ を $\mathcal{P}_*\mathcal{E}^\lambda$ とあらわします. また, 各 $\boldsymbol{a}$ について $\mathbb{D}^\lambda \mathcal{P}_{\boldsymbol{a}}\mathcal{E}^\lambda \subset \mathcal{P}_{\boldsymbol{a}}\mathcal{E}^\lambda \otimes \Omega^1_X(\log D)$ です. このような $(\mathcal{P}_*\mathcal{E}^\lambda, \mathbb{D}^\lambda)$ を正則フィルトレーション付 λ-平坦束といいます. (特に, $\lambda = 1$ の時は正則フィルトレーション付平坦束, $\lambda = 0$ の時は正則フィルトレーション付 Higgs 束といいます.)

X が射影多様体であるとし, L を ample な正則直線束とします. 局所的に定理 4.5 が成り立つような $\mathcal{O}_X$-加群の増大列 $\mathcal{P}_*\mathcal{F}$ について, $\mathrm{ch}_i(\mathcal{P}_*\mathcal{F})$ が定義されます. ($i = 1, 2$ の場合は [46] を参照. 一般の場合は [26, 27] を参照.) そして, 従順調和束から得られた $\mathcal{P}_*\mathcal{E}^\lambda$ に関して, $\mathrm{ch}_1(\mathcal{P}_*\mathcal{E}^\lambda) = 0$, $\int_X \mathrm{ch}_2(\mathcal{P}_*\mathcal{E})c_1(L)^{\dim X - 2} = 0$ が成り立つことが示されます ([46, 48] を参照). 第二 Chern 指標の vanishing を調べるには, D の交叉点のまわりでの曲率の挙動も制御する必要があり, そのためにノルム評価 [47] などを使うため, 極限混合ツイスター構造の存在 [47] などのかなり詳しい研究が必要になります. さらに, $\mu_L(\mathcal{P}_*\mathcal{E}^\lambda) = (\mathrm{rank}\, E)^{-2} \int_X c_1(\mathcal{P}_*\mathcal{E}^\lambda)c_1(L)^{\dim X - 1}$ に関して, polystable であることがわかります ([46, 48] を参照). そして, 逆にこれらの条件が満たされている正則フィルトレーション付 λ 平坦束 $(\mathcal{P}_*\mathcal{E}^\lambda, \mathbb{D}^\lambda)$ は従順調和束から得られることがわかります. すなわち次がわかります.

定理 4.6 X を連結で滑らかな射影多様体, D を正規交叉超曲面とすると, 次の対象は同値.

- (X, D) 上の従順な調和束.
- (X, D) 上の正則フィルトレーション付 λ-平坦束 $(\mathcal{P}_*\mathcal{V}, \mathbb{D}^\lambda)$ で, *polystable* かつ,

$$\mathrm{ch}_1(\mathcal{P}_*\mathcal{V}) = 0, \quad \int_X \mathrm{ch}_2(\mathcal{P}_*\mathcal{V})c_1(L)^{\dim X - 2} = 0$$

を満たすもの.

多重調和計量の構成では, Simpson による非コンパクトケーラー多様体上の Kobayashi-Hitchin 対応 (定理 4.4) を用いて Hermitian-Einstein 計量を構成し, 特性数の消滅より多重調和計量であることを導きます. ただ, パラボリックフィルトレーションに関する Gr 上に $\mathrm{Res}_{D_i}(\mathbb{D}^\lambda)$ より誘導される自己準同型 $\mathrm{Gr}^F \mathrm{Res}_{D_i}(\mathbb{D}^\lambda)$ のベキ零部分が存在するために, 定理 4.4 における h_0 の構成が一般には難しくなり, 定理 4.4 を単純に適用することはできなくなります. 例えば 2 次元の場合, 定理 4.4 を直接適用するには, D_i と D_j の交点において, $\mathrm{Gr}^F \mathrm{Res}_{D_i}(\mathbb{D}^\lambda)$ と $\mathrm{Gr}^F \mathrm{Res}_{D_j}(\mathbb{D}^\lambda)$ のベキ零部分の間に非自明な関係が必要なのではないかと思われます. そのような関係を仮定して議論をしてしまってはあまり意味がないように思います. 曲線の場合には, このような問題が生じないので, これは高次元特有の問題です.

そこで, パラボリックフィルトレーションを少しずらしたもの $\boldsymbol{F}^{(\epsilon)}$ をとり, $\mathrm{Gr}^{F^{(\epsilon)}} \mathrm{Res}_{D_i}(\mathbb{D}^\lambda)$ のベキ零部分が自明になるようにしておきます. この場合は, 定理 4.4 における h_0 を適切に構成できるため, $\boldsymbol{F}^{(\epsilon)}$ に適合する Hermitian-Einstein 計量 $h^{(\epsilon)}$ を構成できます. そして, $\lim_{\epsilon\to 0} h^{(\epsilon)}$ の存在が示され, 求める多重調和計量になることがわかります.

この方針は明快なのですが, $\epsilon \to 0$ においてパラボリック構造の退化が起きるので, 収束に関しては注意が必要です. 多様体全体での収束をいきなり示すのは難しいので, 曲線への制限の収束を示すことになります. そのための準備として, 曲線の場合にパラボリック構造 $\boldsymbol{F}^{(\epsilon)} \to \boldsymbol{F}^{(0)}$ の収束に関して, 対応する Hermitian-Einstein 計量の列が $h^{(\epsilon)} \to h^{(0)}$ のように収束することを示します. そのためには, $h^{(\epsilon)}$ が一様に有界な範囲にとどまることを示す必要があります. 定理 4.4 を用いて $h^{(\epsilon)}$ の構成する際, $\boldsymbol{F}^{(\epsilon)}$ に適合する計量 $h_{0,\epsilon}$ をとりますが, (i) $h_{0,\epsilon} \to h_{0,0}$, (ii) $d_{\mathcal{H}}(h_{0,\epsilon}, h) \le C_1 + C_2 M(h_{0,\epsilon}, h)$, という条件を満たすものの存在を示すところが重要なステップになります. これができると, $M(h_{0,\epsilon}, h^{(\epsilon)}) \le 0$ であるので, $d_{\mathcal{H}}(h_{0,\epsilon}, h^{(\epsilon)}) \le C_1$ という一様な評価が得られることになります.

半単純平坦束と従順調和束　従順調和束に関する条件で特に興味深いものが, “θ の residue の固有値が純虚数” です. この時, 対応する平坦束が半単純であることがわかります. これを用いて Corlette による定理の準射影多様体の場合への一般化が得られます. ([48] を参照. ただし, Corlette の定理の一般化自体は, [29], [47] で与えられています. 多重調和計量の構成が [29] でなされ, それが上の条件を満たし, そのようなものが一意的であることが [47] で示されています.) θ の residue の固有値が純虚数という条件があると, 対応する正則フィルトレーション付平坦束が, ユニタリ平坦束の場合と同様に Deligne 拡大から residue の固有値の実部を用いて得られるものと一致し, 第一 Chern 類が 0 になり, polystable と半単純という条件が同値になるからです.

ワイルド調和束　ワイルド調和束とは, 従順調和束よりも広いクラスの調和束です. 条件は, 適当に $N > 0$ をとると, Σ_E の $T^*X(\log D) \otimes \mathcal{O}_X(ND)$ における閉包が X 上固有. 実際に調べる時には, Σ_E が D に沿って非退化であることをあらわす条件を課します. このようなものを良いワイルド調和束といいます. 良いワイルド調和束に関して, Kobayashi-Hitchin 対応が成り立ちます. $\lambda = 1$ の場合は [51] に書かれています. $\lambda = 0$ の場合にはまだ文献はありませんが, [46, 48, 51] の議論を適用できます. $\dim X = 1$ の場合は Biquard-Boalch [3], Sabbah [63] の仕事があります.

有理型平坦束の半単純性の特徴付け　従順の時と同様に良いワイルド調和束について, “Higgs 場 の residue の固有値が純虚数” という条件をつけたものを考え, 良い $\sqrt{-1}\mathbb{R}$-ワイルド調和束と呼ぶことにします. すると, 射影多様体上の良い $\sqrt{-1}\mathbb{R}$-ワイルド調和束と良い有理型平坦束で半単純なものが対応することがわかります. ここで (V, ∇) が (X, D) 上の良い有理型平坦束であるとは, 各 $P \in D$ において, 形式的完備化をとり, D に沿った分岐被覆をとると, 非退化な添字を持つように分解することです.

全ての有理型平坦束が良いわけではないのですが, 適当な射影的双有理射によって引き戻すと, 良い有理型平坦束になることが知られています ([32, 33], [49, 51]). したがって, 有理型平坦束の半単純性の特徴付けが得られます.

実際には, 筆者の証明 [49, 51] ではそのようには話が進んではいません. まず 2 次元の場合に, 射影曲面上の有理型平坦束の適当な射影的双有理射による引き戻しが “良い” ものになることを示しています ([49] を参照). そこでは, 標数 $p > 0$ の世界にいき, p-曲率という Higgs 場の類似に関してわるい点を解消することで, 元の有理型平坦束のわるい点を解消できる, という議論を用いています. すると, 2 次元の場合に, Kobayashi-Hitchin 対応を用いて有理型平坦束の半単純性の特徴付けを得られます. 実は 2 次元の場合がわかると, 比較的容易な議論によって, 高次元の場合まで半単純性の特徴付けは得られます. そして, 有理型平坦束の半単純性の特徴付けがわかると, 対応する Higgs 束の悪い特異点を解消することで, 有理型平坦束のわるい点を解消する射影的双有理射の存在がわかる, というような流れで議論しました.

純ツイスター D 加群　純ツイスター D 加群は雑にいうと, ホロノミック D-加群に多重調和計量をいれたものであり, ワイルド調和束の極小拡大として得られるものです. ([64, 65], [47, 51] を参照.) Simpson の “メタ定理” という原理に基づいて, 純 Hodge 加群 [66] のツイスター版として導入されたものです. 有理型平坦束の半単純性の特徴付けと, ワイルド調和束と純ツイスター D 加群の関係から, 半単純ツイスター D 加群と純ツイスター D 加群の対応が得られます.

5　周期的モノポールと差分加群

調和束のツイスターパラメータ λ に対応する下部構造として λ-平坦束が出てきて, フィルレーション付 λ-平坦束と調和束の間の Kobayashi-Hitchin 対応が得られました. 周期的モノポールの場合には差分加群が下部構造としてあらわれて, Kobayashi-Hitchin 対応が得られます ([54] を参照). 以下ではそれを説明します.

5.1　周期的モノポールとパラボリック差分加群の対応

GCK 型モノポール　$S^1 \times \mathbb{C}$ 上に $dt\,dt + dw\,d\overline{w}$ というユークリッド計量を与えておきます. 開集合 $U \subset S^1 \times \mathbb{C}$ 上に, ベクトル束 E, 計量 h, ユニタリ接続 ∇, 交代エルミート準同型 ϕ について, Bogomolny 方程式,

$$F(\nabla) - *\nabla\phi = 0$$

が満たされている時, (E, h, ∇, ϕ) を U 上のモノポールといいます. ただし, $F(\nabla)$ は ∇ の曲率であり, $*$ は Hodge 作用素です.

$Z \subset S^1 \times \mathbb{C}$ を有限集合とします．$(S^1 \times \mathbb{C}) \setminus Z$ 上の monopole (E, h, ∇, ϕ) が次の条件をみたす時, GCK (generalized Cherkis-Kapustin) 型とよびます．

- 各 $P \in Z$ が Dirac 型特異点 ([31] を参照)．すなわち, Dirac によって導入された特異性を持つ階数 1 のモノポールの直和に近い．これは, P に近い Q について $|\phi_{|Q}|_h = O\big(d(P,Q)^{-1}\big)$ が成り立つことと同値です ([56] を参照)．
- $|w| \to \infty$ の時, $F(\nabla) \to 0$ かつ $|\phi| = O(\log|w|)$.

$S^1 \times \mathbb{C}$ 上の特異性を持つモノポールに関しては, Cherkis と Kapustin による研究 [7, 8] があります．彼等は Nahm 変換によって, $\mathbb{C}^*$ 上の調和束と関連づけられることを適当な genericity の仮定のもとで研究しました．

パラボリック差分加群　$\mathbb{C}[\beta_1]$ の自己同型 Φ^* を $\Phi^*(\beta_1) = \beta_1 + 2\sqrt{-1}\lambda$ で与えます．$\mathbb{C}[\beta_1]$-加群 $\boldsymbol{V}$ に $\mathbb{C}$-線形写像 $\Phi^* : \boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{V}$ が与えられていて, 任意の $f \in \mathbb{C}[\beta_1]$ と $s \in \boldsymbol{V}$ について, $\Phi^*(fs) = \Phi^*(f) \cdot \Phi^*(s)$ が満たされるとき $(\boldsymbol{V}, \Phi^*)$ を $(2\sqrt{-1}\lambda$-) 差分加群といいます．$\mathcal{A} := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}[\beta_1](\Phi^*)^n$ とおき, $\Phi^* \cdot f = \Phi^*(f) \cdot \Phi^*$ という関係でかけ算を定義すると $\mathcal{A}$ は自然に結合的代数になり, $\mathcal{A}$-加群と差分加群は同値な概念です．差分加群 $\boldsymbol{V}$ が (i) $\mathcal{A}$-加群として有限生成, (ii) $\dim_{\mathbb{C}(\beta_1)} \boldsymbol{V} \otimes_{\mathbb{C}[\beta_1]} \mathbb{C}(\beta_1) < \infty$ を満たすとき, 有限型と呼ぶことにします．

調和束と λ-平坦束の対応のときと同様に, パラボリック構造を考える必要があります．差分加群のパラボリック構造は有限部分におけるパラボリック構造と, 無限遠における “良い” パラボリック構造からなります．(下記参照.) パラボリック構造を与えられた差分加群をパラボリック差分加群といいます．

差分加群の有限部分におけるパラボリック構造　$\boldsymbol{V}$ を有限型の差分加群とします．$\boldsymbol{V}$ の有限部分におけるパラボリック構造とは下記のようなデータ $(V, m, (\boldsymbol{t}_{1,x}, \boldsymbol{L}_x \,|\, x \in \mathbb{C}))$ です．

- $\mathbb{C}[\beta_1]$-自由部分加群 $V \subset \boldsymbol{V}$ で, $\mathcal{A} \cdot V = \boldsymbol{V}$ と $V \otimes \mathbb{C}(\beta_1) = \boldsymbol{V} \otimes \mathbb{C}(\beta_1)$ を満たすもの．
- 関数 $m : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ で, $\sum_{x \in \mathbb{C}} m(x) < \infty$ を満たし, さらに $D := \{x \in \mathbb{C} \,|\, m(x) > 0\}$ とおくと, $V[*D] = (\Phi^*)^{-1}(V)[*D]$ が成り立つ．(ただし, $[*D]$ は $\beta_1 - x$ $(x \in D)$ による局所化を意味する.)
- 各 $x \in \mathbb{C}$ について, 列 $\boldsymbol{t}_{1,x} := (0 \leq t_{1,x}^{(1)} < \cdots < t_{1,x}^{(m(x))} < T)$. (ただし, $m(x) = 0$ の時は空集合とする.)
- 各 $x \in \mathbb{C}$ について, $V[*D] \otimes \mathbb{C}[\![\beta_1 - x]\!]$ の格子の列 $\boldsymbol{L}_x := \big(L_{x,i} \,\big|\, i = 1, \ldots, m(x) - 1\big)$. 形式的に $L_{x,0} := V \otimes \mathbb{C}[\![\beta_1 - x]\!]$, $L_{x,m(x)} := (\Phi^*)^{-1}(V) \otimes \mathbb{C}[\![\beta_1 - x]\!]$ とおく．

差分加群の ∞ における良いパラボリック構造　β_1^{-1} の形式的ベキ級数全体のなす環を $\mathbb{C}[\![\beta_1^{-1}]\!]$ であらわし, β_1^{-1} の形式的 Laurent ベキ級数全体のなす体を $\mathbb{C}(\!(\beta_1^{-1})\!)$ であらわします．$\widehat{\boldsymbol{V}}$ を $\boldsymbol{V}$ の ∞ における形式的完備化とします．すなわち, $\widehat{\boldsymbol{V}} := \boldsymbol{V} \otimes_{\mathbb{C}[\beta_1^{-1}]} \mathbb{C}[\![\beta_1^{-1}]\!]$. これは $\mathbb{C}(\!(\beta_1^{-1})\!)$-上のベクトル空間です．

$\boldsymbol{V}$ の無限遠におけるパラボリック構造とは, $\widehat{\boldsymbol{V}}$ 上のフィルトレーション付ベクトル束 $\mathcal{P}_*\widehat{\boldsymbol{V}} = \big(\mathcal{P}_a\widehat{\boldsymbol{V}} \,\big|\, a \in \mathbb{R}\big)$, すなわち, 次の条件を満たすような $\widehat{\boldsymbol{V}}$ の $\mathbb{C}[\![\beta_1^{-1}]\!]$-格子の組です．

- $\mathcal{P}_a\widehat{\boldsymbol{V}} \subset \mathcal{P}_b\widehat{\boldsymbol{V}}$ $(a \leq b)$.
- 各 $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ について, $\mathcal{P}_{a+n}\widehat{\boldsymbol{V}} = \beta_1^n \mathcal{P}_a\widehat{\boldsymbol{V}}$.
- 各 $a \in \mathbb{R}$ について, $\epsilon > 0$ を適当にとると, $\mathcal{P}_a\widehat{\boldsymbol{V}} = \mathcal{P}_{a+\epsilon}\widehat{\boldsymbol{V}}$.

フィルトレーション付ベクトル束 $\mathcal{P}_*\widehat{\boldsymbol{V}}$ と差分加群としての構造の間の両立条件を課す必要があります．それを次に説明します．

$\boldsymbol{V}$ の $\mathbb{C}$-線形自己同型 Φ^* は, 自然に $\widehat{\boldsymbol{V}}$ の $\mathbb{C}$-線形自己同型に延長されます．より一般に, $\widehat{\boldsymbol{V}} \otimes \mathbb{C}(\!(\beta_1^{-1/p})\!)$ の $\mathbb{C}$-線形自己同型に延長されます．これも Φ^* であらわします．さらに, $f \in \mathbb{C}(\!(\beta_1^{-1/p})\!)$ と $s \in \widehat{\boldsymbol{V}} \otimes \mathbb{C}(\!(\beta_1^{-1/p})\!)$ について, $\Phi^*(fs) = \Phi^*(f) \cdot \Phi^*(s)$ が成り立ちます．特に, $(\widehat{\boldsymbol{V}}, \Phi^*)$ は $\mathbb{C}(\!(\beta_1^{-1})\!)$ 上の差分加群になります．

このようなものの分類は, Turrittin [75] による古典的な仕事によって知られています．([6], [19], [62] も参照.) その結果を必要な範囲で紹介します．各 $p \in \mathbb{Z}_{>0}$ について, $S(p) := \big\{\sum_{j=1}^{p-1} \mathfrak{b}_j \beta_1^{-j/p} \,\big|\, \mathfrak{b}_j \in \mathbb{C}\big\}$ とおきます．すると, 適当な $p \in \mathbb{Z}_{>0}$ をとると,

$$\widehat{\boldsymbol{V}} \otimes \mathbb{C}(\!(\beta_1^{-1/p})\!) = \bigoplus_{\omega \in \mathbb{Q}} \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{C}^*} \bigoplus_{\mathfrak{b} \in S(p)} \widehat{\boldsymbol{V}}_{p,\omega,\alpha,\mathfrak{b}} \tag{4}$$

と分解し, 各成分 $\widehat{\boldsymbol{V}}_{p,\omega,\alpha,\mathfrak{b}}$ は Φ^* によって保たれ, さらに適当な格子 $L_{p,\omega,\alpha,\mathfrak{b}} \subset \widehat{\boldsymbol{V}}_{p,\omega,\alpha,\mathfrak{b}}$ をとると,

$$(\alpha^{-1}\beta_1^{-\omega}\Phi^* - (1+\mathfrak{b})\,\mathrm{id})L_{p,\omega,\alpha,\mathfrak{b}} \subset \beta_1^{-1}L_{p,\omega,\alpha,\mathfrak{b}}$$

が成り立ちます.

$\widehat{\boldsymbol{V}}$ 上のフィルトレーション付ベクトル束 $\mathcal{P}_*\widehat{\boldsymbol{V}}$ が与えられると, $\widehat{\boldsymbol{V}} \otimes \mathbb{C}(\!(\beta_1^{-1/p})\!)$ 上のフィルトレーション付ベクトル束 $\mathcal{P}_*(\widehat{\boldsymbol{V}} \otimes \mathbb{C}(\!(\beta_1^{-1/p})\!))$ が自然に誘導されることに注意して, 次のように定義します.

定義 5.1 $\boldsymbol{V}$ の無限遠におけるパラボリック構造 $\mathcal{P}_*\widehat{\boldsymbol{V}}$ が良いパラボリック構造であるとは, 次の条件が満たされること.

- $\mathcal{P}_*(\widehat{\boldsymbol{V}} \otimes \mathbb{C}(\!(\beta_1^{-1/p})\!)) = \bigoplus_{\omega,\alpha,\mathfrak{b}} \mathcal{P}_*\widehat{\boldsymbol{V}}_{p,\omega,\alpha,\mathfrak{b}}$ と分解.
- さらに, 各 $a \in \mathbb{R}$ について, $\big(\alpha^{-1}\beta_1^{-\omega}\Phi^* - (1+\mathfrak{b})\,\mathrm{id}\big)\mathcal{P}_a\widehat{\boldsymbol{V}}_{p,\omega,\alpha,\mathfrak{b}} \subset \beta_1^{-1}\mathcal{P}_a\widehat{\boldsymbol{V}}_{p,\omega,\alpha,\mathfrak{b}}$.

Stability パラボリック差分加群 $(\boldsymbol{V}, (V, m, \{\boldsymbol{t}_{1,x}, \boldsymbol{L}_x\}_{x\in\mathbb{C}}), \mathcal{P}_*\widehat{\boldsymbol{V}})$ に対して, 次数を定めます. $\mathbb{C}[\beta_1]$-自由加群 V と, 無限遠における格子 $\mathcal{P}_0\widehat{\boldsymbol{V}}$ より, 局所自由 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$-加群 $\mathcal{P}_0\mathcal{F}_V$ が定まる. 各 $a \in \mathbb{R}$ について, $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間

$$\mathrm{Gr}_a^{\mathcal{P}}(\widehat{\boldsymbol{V}}) := \mathcal{P}_a(\widehat{\boldsymbol{V}})/\mathcal{P}_{<a}(\widehat{\boldsymbol{V}})$$

が得られます. 分解 (4) を用いて $\omega \in \frac{1}{p}\mathbb{Z}$ について,

$$r(\omega) := \sum_{\alpha,\mathfrak{b}} \dim_{\mathbb{C}(\!(\beta_1^{-1/p})\!)} \widehat{\boldsymbol{V}}_{\omega,\alpha,\mathfrak{b}}$$

とおきます. $\omega \notin \frac{1}{p}\mathbb{Z}$ の時は, $r(\omega) = 0$ とおきます. さらに, $m(x) > 0$ の時, 各 $i = 1, \ldots, m(x)$ について, $\deg(L_{x,i}, L_{x,i-1})$ を,

$$\deg(L_{x,i}, L_{x,i-1}) = \mathrm{length}\big(L_{x,i}/L_{x,i} \cap L_{x,i-1}\big) - \mathrm{length}\big(L_{x,i-1}/L_{x,i} \cap L_{x,i-1}\big)$$

のようにおきます. そこで, $(\boldsymbol{V}, (V, m, \boldsymbol{t}_{1,x}, \boldsymbol{L}_x), \mathcal{P}_*\widehat{\boldsymbol{V}})$ の次数を

$$\begin{aligned}\deg(\boldsymbol{V}, (V, m, \boldsymbol{t}_{1,x}, \boldsymbol{L}_x), \mathcal{P}_*\widehat{\boldsymbol{V}}) := \deg(\mathcal{P}_0\mathcal{F}_V) - \sum_{-1<a\le 0} a \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Gr}_a^{\mathcal{P}}(\widehat{\boldsymbol{V}}) - \sum_{\omega} \frac{\omega}{2} r(\omega)\\ + \sum_{x\in\mathbb{C}} \sum (1 - t_{1,x}^{(i)}) \deg(L_{x,i}, L_{x,i-1}) \quad (5)\end{aligned}$$

のように定めます.

$\widetilde{\boldsymbol{V}} := \boldsymbol{V} \otimes \mathbb{C}(\beta_1)$ の部分ベクトル空間 $\widetilde{\boldsymbol{V}}'$ で $\Phi^*(\widetilde{\boldsymbol{V}}') \subset \widetilde{\boldsymbol{V}}'$ を満たすものが与えられると,

$$V' := \widetilde{\boldsymbol{V}}' \cap V, \quad \boldsymbol{V}' := \mathcal{A} \cdot V', \quad L'_{x,i} := L_{x,i} \cap V', \quad \widehat{\boldsymbol{V}}' := \boldsymbol{V}' \otimes \mathbb{C}(\!(\beta_1^{-1})\!), \quad \mathcal{P}_a\widehat{\boldsymbol{V}}' := \mathcal{P}_a\widehat{\boldsymbol{V}} \cap \widehat{\boldsymbol{V}}'$$

とおくことで, パラボリック差分加群 $(\boldsymbol{V}', (V', m, \{\boldsymbol{t}_{1,x}, \boldsymbol{L}_x\}_{x\in\mathbb{C}}), \mathcal{P}_*\widehat{\boldsymbol{V}}')$ が得られます.

定義 5.2 任意の $\mathbb{C}(\beta_1)$-部分空間 $\widetilde{\boldsymbol{V}}' \subset \widetilde{\boldsymbol{V}}$ で $\Phi^*(\widetilde{\boldsymbol{V}}') = \widetilde{\boldsymbol{V}}'$ かつ $0 < \dim_{\mathbb{C}(\!(\beta_1^{-1})\!)} \widetilde{\boldsymbol{V}}' < \dim_{\mathbb{C}(\!(\beta_1^{-1})\!)} \widetilde{\boldsymbol{V}}$ を満たすものについて

$$\frac{\deg(\boldsymbol{V}', (V', m, \{\boldsymbol{t}_{1,x}, \boldsymbol{L}'_x\}_{x\in\mathbb{C}}), \mathcal{P}_*\boldsymbol{V}')}{\dim_{\mathbb{C}(\!(\beta_1^{-1})\!)} \widetilde{\boldsymbol{V}}'} < \frac{\deg(\boldsymbol{V}, (V, m, \{\boldsymbol{t}_{1,x}, \boldsymbol{L}_x\}_{x\in\mathbb{C}}), \mathcal{P}_*\boldsymbol{V})}{\dim_{\mathbb{C}(\!(\beta_1^{-1})\!)} \widetilde{\boldsymbol{V}}}$$

が成り立つ時, $(\boldsymbol{V}, (V, m, \{\boldsymbol{t}_{1,x}, \boldsymbol{L}_x\}_{x\in\mathbb{C}}), \mathcal{P}_*\boldsymbol{V})$ は *stable* であるということにします. *semistable* や *polystable* という条件も自然に定まります.

周期的モノポールと差分加群の対応　すると, 次の定理が成り立ちます ([54] を参照).

定理 5.3 各複素数 λ について, 次の対象の同型類が一対一に対応.

- $S^1 \times \mathbb{C}$ 上の特異性を持つ *GCK* 型モノポール
- *polystable* なパラボリック $2\sqrt{-1}\lambda$-差分加群で, 次数が 0 のもの.

Charbonneau と Hurtubise は [5] において, S^1 とコンパクト Riemann 面 Σ 上の Dirac 型特異性を持つモノポールと, Σ 上の正則ベクトル束と有理型自己同型で "stability 条件" を満たすものの同値性を示しています. 定理 5.3 の $\lambda = 0$ の場合はその類似です. "無限遠" があることや $\lambda \neq 0$ の場合のずれがあるところは定理 5.3 の新しい点です.

5.2 周期的モノポールからパラボリック差分加群の構成

$\lambda = 0$ の場合　$\mathbb{Z}$ は $\mathbb{R}_t \times \mathbb{C}_w$ に次のように作用し, $S^1 \times \mathbb{C}_w$ はその作用に関する商空間とみなせます.

$$\kappa_n(t, w) = (t + n, w) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

(E, h, ∇, ϕ) を $S^1 \times \mathbb{C}_w$ 上のモノポールとします. 簡単のために特異点がない場合を考えます. 以下のことに注意します.

- $\partial_{E,\overline{w}} := \nabla_{\overline{w}}$ によって, $E_{|\{t\}\times\mathbb{C}_w}$ は正則ベクトル束になる.
- $\partial_{E,t} := \nabla_t - \sqrt{-1}\phi$ に関する $\{(t, w) \,|\, 0 \leq t \leq 1\}$ に沿ったモノドロミーを考えることで, 同型 $F : E_{|\{0\}\times\mathbb{C}_w} \simeq E_{|\{1\}\times\mathbb{C}_w}$ が誘導される.
- Bogomolny 方程式より $[\partial_{E,t}, \partial_{E,\overline{w}}] = 0$ なので, F は正則な同型.
- 自然に $E_{|\{0\}\times\mathbb{C}_w} = E_{|\{1\}\times\mathbb{C}_w}$ です.

これより, 正則ベクトル束 $E_{|\{0\}\times\mathbb{C}_w}$ と自己同型 F が得られ, したがって 0-差分加群 $H^0(\mathbb{C}_w, E_{|\{0\}\times\mathbb{C}_w})$ が得られます. ただし, これでは大きすぎるので修正が必要です.

一般の λ の場合　$\mathbb{R}_t \times \mathbb{C}_w$ 上の二つの座標 (t_0, β_0), (t_1, β_1) を考えます.

$$(t_0, \beta_0) = \frac{1}{1+|\lambda|^2}\big((1-|\lambda|^2)t + 2\,\mathrm{Im}(\lambda\overline{w}),\ w + 2\sqrt{-1}\lambda t + \lambda^2\overline{w}\big),$$

$$(t_1, \beta_1) = \big(t_0 + \mathrm{Im}(\bar{\lambda}\beta_0),\ (1+|\lambda|^2)\beta_0\big) = \big(t + \mathrm{Im}(\lambda\overline{w}),\ w + 2\sqrt{-1}\lambda t + \lambda^2\overline{w}\big).$$

$\mathbb{Z}$-作用は (t_1, β_1) に関して次のようにあらわされます.

$$\kappa_n(t_1, \beta_1) = (t_1 + n, \beta_1 + 2\sqrt{-1}\lambda n) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

この作用に関する $\mathbb{R}_{t_1} \times \mathbb{C}_{\beta_1}$ の商空間を, $S^1_t \times \mathbb{C}_w$ と同一視できます.

一方, $dt_0\,dt_0 + d\beta_0\,d\overline{\beta}_0 = dt\,dt + dw\,d\overline{w}$ です. したがって, Bogomolny 方程式より, E 上の二つの微分作用素 $\partial_{E,t_0} := \nabla_{t_0} - \sqrt{-1}\phi$ と $\partial_{E,\overline{\beta}_0} := \nabla_{\overline{\beta}_0}$ は可換. 次の関係式に注意します.

$$\partial_{t_1} = \partial_{t_0}, \qquad \partial_{\overline{\beta}_1} = \frac{\lambda}{1+|\lambda|^2}\frac{1}{2\sqrt{-1}\lambda}\partial_{t_0} + \frac{1}{1+|\lambda|^2}\partial_{\overline{\beta}_0}.$$

そこで, E 上の微分作用素 ∂_{E,t_1} と $\partial_{E,\overline{\beta}_1}$ を次のように与えます.

$$\partial_{E,t_1} := \partial_{E,t_0}, \qquad \partial_{E,\overline{\beta}_1} := \frac{\lambda}{1+|\lambda|^2}\frac{1}{2\sqrt{-1}\lambda}\partial_{E,t_0} + \frac{1}{1+|\lambda|^2}\partial_{E,\overline{\beta}_0}.$$

すると, $\big[\partial_{E,t_1}, \partial_{E,\overline{\beta}_1}\big] = 0$ です. そこで, $\lambda = 0$ の時と同様に次のことに注意します.

- $\partial_{E,\overline{\beta}_1}$ によって $E_{|\{t_1\}\times\mathbb{C}_{\beta_1}}$ は正則ベクトル束となります.
- ∂_{E,t_1} より, 正則な同型 $F: E_{|\{0\}\times\mathbb{C}_{\beta_1}} \simeq E_{|\{1\}\times\mathbb{C}_{\beta_1}}$ が得られます.

したがって, 正則ベクトル束 $E_{|\{0\}\times\mathbb{C}_{\beta_1}}$ と次の同型が得られます.

$$F: E_{|\{0\}\times\mathbb{C}_{\beta_1}} \simeq (\Phi^{-1})^*(E_{|\{0\}\times\mathbb{C}_{\beta_1}}), \quad (\Phi(\beta_1) = \beta_1 + 2\sqrt{-1}\lambda).$$

したがって, $2\sqrt{-1}\lambda$-差分加群 $H^0(\mathbb{C}_{\beta_1}, E_{|\{0\}\times\mathbb{C}_{\beta_1}})$ を得ます. 再び, これでは大きすぎるので修正が必要です.

有理型な延長　$\{t_1\}\times\mathbb{C}_{\beta_1} \subset \mathbb{P}^1_{\beta_1}$ とみなします. 各開集合 $U \subset \mathbb{P}^1_{\beta_1}$ $(\infty \in U)$ について,

$$\mathcal{P}(E_{|\{t_1\}\times\mathbb{C}_{\beta_1}})(U) := \big\{ s \in \Gamma(U \setminus \{\infty\}, E) \,\big|\, |s|_h = O(|\beta_1|^N)\ \exists N \in \mathbb{R} \big\},$$

$$\mathcal{P}_a(E_{|\{t_1\}\times\mathbb{C}_{\beta_1}})(U) := \big\{ s \in \Gamma(U \setminus \{\infty\}, E) \,\big|\, |s|_h = O(|\beta_1|^{a+\epsilon})\ \forall \epsilon > 0 \big\},$$

とおくことで, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(*\infty)$-加群 $\mathcal{P}(E_{|\{t_1\}\times\mathbb{C}_{\beta_1}})$ と $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$-加群 $\mathcal{P}_a(E_{|\{t_1\}\times\mathbb{C}_{\beta_1}})$ $(a \in \mathbb{R})$ を得ます.

定理 5.4 (E, h, ∇, ϕ) が *GCK* 型モノポールならば,

- $\mathcal{P}(E_{|\{t_1\}\times\mathbb{C}_{\beta_1}})$ は局所自由 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(*\infty)$-加群.
- $\mathcal{P}_a(E_{|\{t_1\}\times\mathbb{C}_{\beta_1}})$ $(a \in \mathbb{R})$ は局所自由 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$-加群.
- F は同型 $\mathcal{P}(E_{|\{0\}\times\mathbb{C}_{\beta_1}}) \simeq \mathcal{P}(E_{|\{1\}\times\mathbb{C}_{\beta_1}})$ を誘導する.

(ただし, 一般には F によって $\mathcal{P}_a(E_{|\{0\}\times\mathbb{C}_{\beta_1}}) \simeq \mathcal{P}_a(E_{|\{1\}\times\mathbb{C}_{\beta_1}})$ とは限らない.)

周期的モノポールからパラボリック差分加群へ　$S^1_t \times \mathbb{C}_w$ 上に GCK 型モノポール (E, h, ∇, ϕ) が与えられると, $\mathbb{C}[\beta_1]$-自由加群 $\boldsymbol{V} = V := H^0\big(\mathbb{P}^1, \mathcal{P}(E_{|\{0\}\times\mathbb{C}_{\beta_1}})\big)$ を得ます. そして, 次の同型によって $\boldsymbol{V}$ は自然に $2\sqrt{-1}\lambda$-差分加群です.

$$H^0\big(\mathbb{P}^1, \mathcal{P}(E_{|\{0\}\times\mathbb{C}_{\beta_1}})\big) \overset{F}{\simeq} H^0\big(\mathbb{P}^1, \mathcal{P}(E_{|\{1\}\times\mathbb{C}_{\beta_1}})\big) = H^0\big(\mathbb{P}^1, (\Phi^{-1})^*\mathcal{P}(E_{|\{0\}\times\mathbb{C}_{\beta_1}})\big) = H^0\big(\mathbb{P}^1, \mathcal{P}(E_{|\{0\}\times\mathbb{C}_{\beta_1}})\big).$$

また, $(\mathcal{P}_a(E_{|\{0\}\times\mathbb{C}_{\beta_1}} \,|\, a \in \mathbb{R})$ は $\widehat{\boldsymbol{V}}$ 上のフィルトレーション付ベクトル束 $\mathcal{P}_*\widehat{\boldsymbol{V}}$ を誘導します. したがって, パラボリック差分加群が得られたことになります.

また, (E, h, ∇, ϕ) が有限部分集合 Z に Dirac 型特異点を持つと, F は有理型になります. $\widetilde{\boldsymbol{V}} := V \otimes \mathbb{C}(\beta_1)$ とおくと差分加群になり, その部分差分加群 $\boldsymbol{V} = \mathcal{A} \cdot V$ が得られます. $\boldsymbol{V}$ は自然に有限部分と ∞ におけるパラボリック構造を持ち, この場合もパラボリック差分加群が得られます.

定理 5.3 は上の対応によって得られます.

非可換 Hodge 理論との類似　$\mathbb{C}^2 = \{(z, w)\}$ 上にユークリッド計量 $dz\,d\bar{z} + dw\,d\overline{w}$ を考えると, hyperkähler 多様体になります. $U \subset \mathbb{C}^2$ を開集合とします. 各ツイスターパラメータ λ について, 複素多様体 U^λ を得る.

U 上にインスタントン (E, h, ∇) が与えられると, 各ツイスターパラメータ λ について, U^λ 上の正則ベクトル束 E^λ を得ます. 閉部分群 $\Gamma \subset \mathbb{C}^2$ について, U が Γ-不変で, (E, h, ∇) が Γ-同変ならば, E^λ も Γ-同変です.

$\Gamma = \mathbb{C}_z \times \{0\}$, $U = \mathbb{C}_z \times U_w$ の時, Γ-同変インスタントンは U_w 上の調和束と同値です. これは §3 で述べた Hitchin の次元簡約です. また, 各 λ について, U^λ 上の Γ-同変正則ベクトル束が U_w 上の λ-平坦束と同値であることも容易に示せます. したがって, この場合の Γ-同変インスタントンと Γ-同変正則ベクトル束の間の対応は, $\mathbb{P}^1$ 上の特異性を持つ調和束と λ-平坦束の間の対応とみなすことができます.

$\Gamma = (\mathbb{R} \times \sqrt{-1}\mathbb{Z}) \times \{0\}$, $U = \mathbb{C}_z \times U_w$ の時, Γ-同変インスタントンは $S^1 \times U_w$ 上のモノポールと同値です. また, Γ-同変正則ベクトル束は $(E, \partial_{E,t_0}, \partial_{E,\overline{\beta}_0})$ と同値です. この意味で, 周期的モノポールと差分加群の間の対応は, 非可換 Hodge 理論の類似とみなすことができます.

5.3 例

有限部分集合 $S \subset \mathbb{C}$ と $\ell : S \longrightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ をとり, 多項式 $P(y) := \prod_{a\in S}(y-a)^{\ell(a)} \in \mathbb{C}(y)$ とおきます. $\widetilde{\boldsymbol{V}}_P := \mathbb{C}(y)e_1 \oplus \mathbb{C}(y)e_2$ と, 次のように与えられる自己同型 Φ^* を考えます.

$$\Phi^*(e_1, e_2) = (e_1, e_2)\begin{pmatrix} 0 & P(y) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$V_P := \mathbb{C}[y]e_1 \oplus \mathbb{C}[y]e_2$ とおき, 0-差分加群 $\boldsymbol{V}_P := \mathcal{A}\cdot V_P \subset \widetilde{\boldsymbol{V}}_P$ を得ます. 定理 5.3 を用いると, 次の命題のように $\boldsymbol{V}_P$ を誘導するようなモノポールの存在を示せます.

命題 5.5 $(t_a)_{a\in S} \in \{0 \le x < 1\}^S$ をとり, $\ell := \sum_{a\in S}\ell(a) = \deg_y P$ とおく.

(ℓ が奇数) 0-差分加群 $\boldsymbol{V}_P$ を誘導する $(S^1\times\mathbb{C})\setminus\{(t_a,a)\,|\,a\in S\}$ 上のモノポールが存在する.

(ℓ が偶数) 0-差分加群 $\boldsymbol{V}_P$ を誘導する $(S^1\times\mathbb{C})\setminus\{(t_a,a)\,|\,a\in S\}$ 上のモノポールの族で,

$$\left\{(d_1,d_2)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, d_1+d_2+\sum_{a\in S}(1-t_a)\ell(a)=0\right\}$$

によってパラメータづけられるものが存在.

定理 5.3 によれば, $\boldsymbol{V}_P$ 上の stable なパラボリック 0 差分加群で次数が 0 のものを分類する話に帰着されます. Φ^* の固有値が $\mathbb{C}$ 上一価関数にならないので, 次の補題がすぐにわかります.

補題 5.6 $\widetilde{\boldsymbol{V}}'$ が $\widetilde{\boldsymbol{V}}_P = \boldsymbol{V}_P \otimes \mathbb{C}(y)$ の $\mathbb{C}(y)$-部分空間で, $\Phi^*(\widetilde{\boldsymbol{V}}') = \widetilde{\boldsymbol{V}}'$ を満たすならば, $\widetilde{\boldsymbol{V}}'$ は $\widetilde{\boldsymbol{V}}_P$ または 0.

したがって, $\boldsymbol{V}_P$ 上のパラボリック 0-差分加群で次数が 0 のものを構成すれば, stability は自明に満たされていることになります.

有限部分のパラボリック構造として, 次のような最も簡単なものを考えます.

- $m : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\ge 0}$ は, $m(a) = 1$ $(a\in S)$, $m(a) = 0$ $(a \notin S)$ によって定める.
- $a \in S$ について, 与えられた $0 \le t_a < 1$ をとる.

あとは, ∞ における良いパラボリック構造を分類し, 次数が 0 になるように調整すれば良いです.

ℓ が奇数の場合は次のように議論します. $\tau \in \mathbb{C}(\!(y^{-1/2})\!)$ を $\tau^{2\ell} = P(y)$ と $y^{-1/2}\tau \in \mathbb{C}[\![y^{-1/2}]\!]$ を満たすものとして定めます. $v_1 = \tau^\ell e_1 + e_2$, $v_2 = \tau^\ell e_1 - e_2$ とおくと, $\Phi^*(v_1) = \tau^\ell v_1$, $\Phi^*(v_2) = -\tau^\ell v_2$ のように作用が対角化されます.

補題 5.7 良いパラボリック構造 $\mathcal{P}_*\widehat{\boldsymbol{V}}$ は, $\deg^{\mathcal{P}}(v_1) = \deg^{\mathcal{P}}(v_2) =: d$ によって定まる. *(ただし, $\deg^{\mathcal{P}}(u) := \min\{a\in\mathbb{R}\,|\,u\in\mathcal{P}_a\}$.)*

$e_1 = (2\tau^\ell)^{-1}(v_1+v_2)$, $e_2 = 2^{-1}(v_1-v_2)$ なので, $\deg^{\mathcal{P}}(e_1) = \frac{d-\ell}{2}$, $\deg^{\mathcal{P}}(e_2) = \frac{d}{2}$ です. したがって, パラボリック 0-差分加群の次数は,

$$0 - \frac{d-\ell}{2} - \frac{d}{2} + \sum_{a\in S}(1-t_a)(-\ell(a)) - \frac{1}{2}(\ell/2)2 = -d - \sum_{a\in S}(1-t_a)\ell(a)$$

となります. これを 0 にするような d は一意的に存在. これより, ℓ が奇数の場合の命題 5.5 の主張が得られます.

ℓ が偶数 $2k$ の場合, $\tau \in \mathbb{C}(\!(y^{-1})\!)$ を $\tau^{2k} = P(y)$ と $y^{-1}\tau \in \mathbb{C}[\![y^{-1}]\!]$ によって定めます. $v_1 = \tau^k e_1 + e_2$, $v_2 = \tau^k e_1 - e_2$ とおくと $\Phi^*(v_1) = \tau^k v_1$, $\Phi^*(v_2) = -\tau^k v_2$ のように Φ^* が対角化されます. この場合, ∞ における良いパラボリック構造 $\mathcal{P}_*\widehat{\boldsymbol{V}}$ は, $\deg^{\mathcal{P}}(v_i) = d_i$ $(i=1,2)$ によって決定されます. 次数は

$$k - d_1 - d_2 - \sum_{a\in S}(1-t_a)\ell(a) - \frac{1}{2}(k)\cdot 2 = -d_1 - d_2 - \sum_{a\in S}(1-t_a)\ell(a)$$

となりますので, 偶数の場合の命題 5.5 の主張が得られます.

6 非コンパクト多様体上の小林-Hitchin 対応

Simpsonの定理の一般化 定理 5.3 の証明で, モノポールの構成のために用いる定理 4.4 の一般化を説明します. (X, g_X) を n 次元連結ケーラー多様体とし, コンパクトリー群 G が正則に作用しているとします.

仮定 $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ を G 不変連続関数とします. また, (i) $\varphi(P) \to 0$ $(P \to \infty)$, (ii) $\int_X \varphi < \infty$ とします. 定数 $C_1, C_2 > 0$ があって次が成り立つと仮定する.

- $f : X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ は bounded で, $\Delta_X f \leq B\varphi$ がある $B > 0$ について成り立つと仮定する. この時, $\sup_{P\in X} f(P) \leq C_1 B + C_2 B \int f\varphi$ が成り立つ.

さらに, より強く $\Delta_X f \leq 0$ が成り立つならば, $\Delta_X f = 0$ が成り立つ.

$(E, \overline{\partial}_E)$ を X 上の G 同変正則ベクトル束で, h_0 を E の計量とし, $|\Lambda F(h_0)|_{h_0} < B\varphi$ と仮定します. $(E, \overline{\partial}_E, h_0)$ が G-作用に関して *analytically stable* とは, 任意の G-不変な充満部分層 $E' \subset E$ で $0 < \operatorname{rank} E' < \operatorname{rank} E$ を満たすものについて,

$$\frac{\deg(E', h_0)}{\operatorname{rank} E'} < \frac{\deg(E, h_0)}{\operatorname{rank} E}$$

が成り立つことです. 次の定理が証明されます ([55] を参照).

定理 6.1 $(E, \overline{\partial}_E, h_0)$ が G-作用に関して *analytically stable* であるならば, E の G-不変 *Hermitian-Einstein* 計量 h で次の条件を満たすものが存在. *(i)* $\det(h) = \det(h_0)$, *(ii)* h と h_0 は互いに有界, *(iii)* $\overline{\partial}_E(h \cdot h_0^{-1})$ は L^2.

モノポールの構成への応用 $\mathbb{C}^2_{z,w}$ への $\mathbb{Z}^2$-作用 $\widetilde{\kappa}$ と, $\mathbb{R}$-作用 ρ を次のように定めます.

$$\widetilde{\kappa}_{(n_1,n_2)}(z, w) = (z + n_1 + \sqrt{-1}n_2, w), \quad \rho_s(z, w) = (z + s, w).$$

$X := \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}^2 = S^1 \times (S^1 \times \mathbb{C}_w)$ とおきます. X への S^1-作用 ρ が誘導されます. $q_0 : X \longrightarrow S^1 \times \mathbb{C}$ が $(z, w) \longmapsto (\operatorname{Im}(z), w) = (t, w)$ より誘導されます. 本質的には §5.2 でも触れたことですが, 次の補題が成り立ちます.

補題 6.2 $Z \subset S^1 \times \mathbb{C}$ を有限部分集合とする.

- $X \setminus q_0^{-1}(Z)$ 上の S^1-同変正則ベクトル束 $(\widetilde{E}, \overline{\partial}_{\widetilde{E}})$ は, $(S^1 \times \mathbb{C}) \setminus Z$ 上のベクトル束 E で可換な微分作用素 $(\partial_{E,t}, \partial_{E,\overline{w}})$ を持つものと同値.
- $X \setminus q_0^{-1}(Z)$ 上の S^1-同変インスタントンと, $(S^1 \times \mathbb{C}) \setminus Z$ 上のモノポールは同値.

X と次の複素座標を考えることで得られる複素多様体を X^λ であらわします.

$$\alpha_0 := \frac{1}{1 + |\lambda|^2}(z + \lambda\overline{w} - \bar{\lambda}w + |\lambda|^2), \quad \beta_0 := \frac{1}{1 + |\lambda|^2}(w + \lambda(z - \bar{z}) + \lambda^2\overline{w}).$$

$d\alpha_0\, d\bar{\alpha}_0 + d\beta_0\, d\overline{\beta}_0 = dz\, d\bar{z} + dw\, d\overline{w}$ である. また, $(t_0, \beta_0) = (\operatorname{Im}(\alpha_0), \beta_0)$ です. 同様に次の補題が成り立ちます.

補題 6.3 $Z \subset S^1 \times \mathbb{C}$ を有限部分集合とする.

- $X^\lambda \setminus q_0^{-1}(Z)$ 上の S^1-同変正則ベクトル束と, $(S^1 \times \mathbb{C}) \setminus Z$ 上のベクトル束で可換な微分作用素の組 $(\partial_{E,t_0}, \partial_{E,\overline{\beta}_0})$ を持つものは同値.
- $X^\lambda \setminus q_0^{-1}(Z)$ 上の S^1-同変インスタントンと, $(S^1 \times \mathbb{C}) \setminus Z$ 上のモノポールは同値.

これより, analytically stable なベクトル束に関する Kobayashi-Hitchin 対応 (定理 6.1) を, $(S^1 \times \mathbb{C}) \setminus Z$ 上のモノポールの構成に適用できます.

体積が無限の場合の Hermitian-Einstein 計量の構成に関して知られている仕事　体積が無限の場合の Hermitian-Einstein 計量の構成についての興味深い結果は既に数多く知られています. 特に有名なのが, Donaldson [13] の結果で, $\mathbb{C}^2$ 上の L^2-インスタントンと, $(\mathbb{P}^2, H_\infty)$ 上の枠付正則ベクトル束の対応が知られています. 枠付正則ベクトル束とは $\mathbb{P}^2$ 上の正則ベクトル束であって, 無限遠直線への制限に自明化が与えられているもののことです. また, Bando による ALE-空間上のインスタントンの構成 [1], Jarvis による $\mathbb{R}^3$ 上のモノポールの構成 [28] もあります. Ni [60], Ni-Ren [61] によるさまざまな完備 Kähler 多様体上のインスタントンの構成に関する興味深い仕事や, その一般化 [58] もあります.

これらでは, $(E, \overline{\partial}_E)$ 上に適当な有限性を満たす計量があれば, analytically stable という条件がなくても Hermitian-Einstein 計量に変形できる, ということが証明されています. (ただし, Donaldson の元の証明方法はそのようなものではありませんが.) そこでは, 空間の Laplacian の性質, さらに空間の無限遠における性質, 特に体積の増大度などの性質が関係してきます.

一方, analytically stable という条件と Hermitian-Einstein 計量の存在の関係について, 体積が無限で一般的な状況で研究した研究は, 筆者が調べたかぎりではみあたりませんでした. ただし, 二重周期インスタントン ($\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}$ 上のインスタントン) に関する Kobayashi-Hitchin 対応 ([4], [52] を参照) は定理 6.1 と関係しています.

Hermitian-Einstein 計量のディリクレ問題　定理 6.1 の証明では, Donaldson による Hermitian-Einstein 計量の Dirichlet 問題に対する解の一意存在定理 [17] を用いています. この場合も, stability 条件はあらわれません.

定理 6.4 (Donaldson) *X を境界が空でない連結 Kähler 多様体とし, $(E, \overline{\partial}_E)$ を X 上の正則ベクトル束とする. $E_{|\partial X}$ の任意の C^∞ 計量 $h_{\partial X}$ に対して, $\Lambda R(h) = 0$, $h_{|\partial X} = h_{\partial X}$ となる E の計量 h が一意的に存在する.*

$f_{|\partial X} = 0$ という関数空間上では, Δ のスペクトル集合が離散的であり, さらに 0 は固有値ではないことに注意すると, $(\partial_t + \Delta_X)\theta \leq 0$ を満たす $\theta : \mathbb{R} \times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ について, $\sup_{x \in X} \theta(t,x) \leq Ce^{-\mu t}$ を満たすことがわかります. また熱方程式 $h_t^{-1}\partial_t h_t = -2\sqrt{-1}\Lambda F(h)$ を境界値つき $h_{t|\partial X} = h_{\partial X}$ で解いたとすると, $\mathcal{E}_t = |\Lambda F(h_t)|^2_{h_t}$ が $(\partial_t + \Delta_X)\mathcal{E}_t \leq 0$ をみたすことがわかります. したがって, $\mathcal{E}_t \leq Ce^{-\mu t}$ がわかります. すると, 積分曲線の長さ $\int_0^t \sqrt{\mathcal{E}_s} ds$ が有限にとどまっていることから, h_t と h_0 の距離が有界におさまっていることがわかり, これより収束がわかります. 境界がない場合は, 0 でない定数関数が存在するため, このような議論はうまくいかず, stability 条件が必要になるのとは対照的です.

定理 6.1 の証明の方針　$\bigcup Z_i = X$ となるように境界付部分多様体 $Z_i \subset X$ の列をとり, $(E, \overline{\partial}_E)_{|Z_i}$ の Hermitian-Einstein 計量 h_i を, $h_{i|\partial Z_i} = h_{0|\partial Z_i}$ のようにとります. h_i の収束を示すことが目標になります. 問題はこれが有界にとどまることを示すところです. Dirichlet 問題の場合にも Donaldson functional を導入できて, $M(h_{0|Z_i}, h_i) \leq 0$ が得られます. これを出発点にすることで, h_i が有界であることが示されます. そのために, 二つの Hermite 計量の間の距離と Donaldson functional を関係づける評価式を得るために, Donaldson や Simpson によって開発された議論をこの場合に使えるように調整して用います. 有界列であることがわかると, 収束も得られます. ここでは, Ni による議論 [60] が有用です.

References

[1] S. Bando, *Einstein-Hermitian metrics on noncompact Kähler manifolds*, in *Einstein metrics and Yang-Mills connections (Sanda, 1990)*, 27–33, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **145**, Dekker, New York, 1993.

[2] O. Biquard, *Fibrés de Higgs et connexions intégrables: le cas logarithmique (diviseur lisse)*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **30** (1997), 41–96.

[3] O. Biquard and P. Boalch, *Wild non-abelian Hodge theory on curves*, Compos. Math. **140** (2004), 179–204.

[4] O. Biquard, M. Jardim, *Asymptotic behaviour and the moduli space of doubly-periodic instantons.* J. Eur. Math. Soc. **3** (2001), 335–375.

[5] B. Charbonneau, J. Hurtubise, *Singular Hermitian-Einstein monopoles on the product of a circle and a Riemann surface*, Int. Math. Res. Not. (2011), 175–216.

[6] G. Chen, A. Fahim, *Formal reduction of linear difference systems.* Pacific J. Math. **182** (1998), 37–54.

[7] S. A. Cherkis, A. Kapustin. *Nahm transform for periodic monopoles and $\mathcal{N}=2$ super Yang-Mills theory*, Comm. Math. Phys. **218**, (2001), 333–371.

[8] S. A. Cherkis, A. Kapustin, *Periodic monopoles with singularities and $\mathcal{N}=2$ super-QCD*, Comm. Math. Phys. **234**, (2003), 1–35.

[9] K. Corlette, *Flat G-bundles with canonical metrics*, J. Differential Geom. **28** (1988), 361–382.

[10] M. Cornalba, P. Griffiths, *Analytic cycles and vector bundles on noncompact algebraic varieties*, Invent. Math. **28** (1975), 1–106.

[11] K. Diederich, T. Ohsawa, *Harmonic mappings and disc bundles over compact Kähler manifolds.* Publ. Res. Inst. Math. Sci. **21** (1985), 819–833.

[12] S. K. Donaldson, *A new proof of a theorem of Narasimhan and Seshadri*, J. Differential Geom. **18** (1983), 269–277.

[13] S. K. Donaldson, *Instantons and Geometric Invariant Theory*, Comm. Math. Phys. **93** (1984), 453–460.

[14] S. K. Donaldson, *Anti self-dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles*, Proc. London Math. Soc. (3) **50** (1985), 1–26.

[15] S. K. Donaldson, *Infinite determinants, stable bundles and curvature*, Duke Math. J. **54** (1987), 231–247.

[16] S. K. Donaldson, *Twisted harmonic maps and the self-duality equations.* Proc. London Math. Soc. (3) **55** (1987), 127–131.

[17] S. K. Donaldson, *Boundary value problems for Yang-Mills fields*, J. Geom. Phys. **8** (1992), 89–122.

[18] S. K. Donaldson, P. B. Kronheimer, *The geometry of four-manifolds*, Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1990.

[19] A. Duval, *Lemmes de Hensel et factorisation formelle pour les opérateurs aux différences.* Funkcial. Ekvac. **26** (1983), 349–368.

[20] J. Eelles and J. Sampson, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds,* Amer. J. Math. **86** (1964), 109–160.

[21] N. Hitchin, *Monopoles and geodesics*, Comm. Math. Phys. **83**, (1982), 579–602.

[22] N. Hitchin, *Construction of monopoles*, Comm. Math. Phys. **89**, (1983), 145–190.

[23] N. Hitchin, *The self-duality equations on a Riemann surface*, Proc. London Math. Soc. (3) **55** (1987), 59–126.

[24] N. Hitchin, *Monopoles, minimal surfaces and algebraic curves.* Presses de l'Université de Montréal, Montreal, QC, 1987.

[25] N. Hitchin, *A note on vanishing theorems*; in *Geometry and analysis on manifolds*, 373–382, Progr. Math., **308**, Birkhäuser/Springer, Cham, 2015.

[26] J. N. Iyer, C. T. Simpson, *A relation between the parabolic Chern characters of the de Rham bundles.* Math. Ann. **338** (2007), 347–383.

[27] J. N. Iyer, C. T. Simpson, *The Chern character of a parabolic bundle, and a parabolic corollary of Reznikov's theorem.* in *Geometry and dynamics of groups and spaces*, 439–485, Progr. Math., **265**, Birkhäuser, Basel, 2008.

[28] S. Jarvis, *Construction of Euclidean monopoles.* Proc. London Math. Soc. (3) **77** (1998), 193–214.

[29] J. Jost and K. Zuo, *Harmonic maps of infinite energy and rigidity results for representations of fundamental groups of quasiprojective varieties*, J. Differential Geom. **47** (1997), 469–503.

[30] A. Kapustin, E. Witten, *Electric-magnetic duality and the geometric Langlands program.* Commun. Number Theory Phys. **1** (2007), 1–236.

[31] P. B. Kronheimer, Master's thesis, Oxford, 1986.

[32] K. Kedlaya, *Good formal structures for flat meromorphic connections, I; Surfaces*, Duke Math. J., **154**, (2010), 343–418.

[33] K. Kedlaya, *Good formal structures for flat meromorphic connections, II: Excellent schemes,* J. Amer. Math. Soc. **24** (2011), 183–229.

[34] S. Kobayashi, *First Chern class and holomorphic tensor fields*, Nagoya Math. J. **77** (1980), 5–11.

[35] S. Kobayashi, *Curvature and stability of vector bundles*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **58** (1982), 158–162.

[36] S. Kobayashi, *Differential geometry of complex vector bundles.* Publications of the Mathematical Society of Japan, **15**. Princeton University Press, Princeton, NJ; Princeton University Press, Princeton, NJ, 1987. xii+305 pp.

[37] 小林昭七 (述) 榎一郎 (記), 正則ベクトルバンドルの微分幾何, 東大数学教室セミナリー・ノート **41**, 東京大学数学教室, 1982.

[38] T. Kotake ed. *Non-linear problems in geometry*, 1979

[39] M. Lübke, *Chernklassen von Hermite-Einstein-Vektorbündeln.* Math. Ann. **260** (1982), 133–141.

[40] M. Lübke, *Stability of Einstein-Hermitian vector bundles.* Manuscripta Math. **42** (1983), 245–257.

[41] M. Lübke, A. Teleman, *The universal Kobayashi-Hitchin correspondence on Hermitian manifolds*, Mem. Amer. Math. Soc. **183** (2006), no. 863, vi+97 pp.

[42] M. Maruyama and K. Yokogawa, *Moduli of parabolic stable sheaves*, Math. Ann. **293**, (1992), 77–99.

[43] V. B. Mehta, A. Ramanathan, *Semistable sheaves on projective varieties and their restriction to curves.* Math. Ann. **258** (1981/82), 213–224.

[44] V. B. Mehta, A. Ramanathan, *Restriction of stable sheaves and representations of the fundamental group*, Invent. Math. **77** (1984), 163–172.

[45] V. B. Mehta and C. S. Seshadri, *Moduli of vector bundles on curves with parabolic structures*, Math. Ann. **248**, (1980), 205–239.

[46] T. Mochizuki, *Kobayashi-Hitchin correspondence for tame harmonic bundles and an application*, Astérisque **309** (2006), viii+117.

[47] T. Mochizuki, *Asymptotic behaviour of tame harmonic bundles and an application to pure twistor D-modules I, II*, Mem. AMS. **185** (2007)

[48] T. Mochizuki, *Kobayashi-Hitchin correspondence for tame harmonic bundles. II*, Geom. Topol. **13** (2009), 359–455.

[49] T. Mochizuki, *Good formal structure for meromorphic flat connections on smooth projective surfaces*, in *Algebraic Analysis and Around*, Adv. Stud. in Pure Math. **54**, (2009), 223–253.

[50] 望月拓郎, 従順調和バンドルの漸近挙動と純ツイスター D 加群について, 数学 **58** (2006) 337–363.

[51] T. Mochizuki, *Wild harmonic bundles and wild pure twistor D-modules*, Astérisque **340**, Société Mathématique de France, Paris, 2011.

[52] T. Mochizuki, *Asymptotic behaviour and the Nahm transform of doubly periodic instantons with square integrable curvature*, Geom. Topol. **18**, (2014), 2823–2949.

[53] T. Mochizuki, *Wild harmonic bundles and twistor $\mathcal{D}$-modules*, Proceedings of ICM 2014 Seoul.

[54] T. Mochizuki, *Periodic monopoles and difference modules*, arXiv:1712.08981.

[55] T. Mochizuki, *Kobayashi-Hitchin correspondence for analytically stable bundles*, arXiv:1712.08978.

[56] T. Mochizuki, M. Yoshino, *Some characterizations of Dirac type singularity of monopoles.* Comm. Math. Phys. **356**, 613–625.

[57] D. Mumford, *Projective invariants of projective structures and applications,* Proc. Intern. Cong. Math., Stockholm (1962), 526–530.

[58] O. Munteanu, N. Sesum, *The Poisson equation on complete manifolds with positive spectrum and applications*, Adv. Math. **223** (2010), 198–219.

[59] M. S. Narasimhan and C. S. Seshadri, *Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface*, Ann. of Math. (2) **82** (1965), 540–567.

[60] L. Ni, *The Poisson equation and Hermitian-Einstein metrics on holomorphic vector bundles over complete noncompact Kähler manifolds*, Indiana Univ. Math. J. **51** (2002), 679–704.

[61] L. Ni, H. Ren, *Hermitian-Einstein metrics for vector bundles on complete Kähler manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), 441–456.

[62] C. Praagman, *The formal classification of linear difference operators.* Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math. **45** (1983), 249–261.

[63] C. Sabbah, *Harmonic metrics and connections with irregular singularities*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **49** (1999), 1265–1291.

[64] C. Sabbah, *Polarizable twistor D-modules* Astérisque, **300**, Société Mathématique de France, Paris, (2005).

[65] C. Sabbah, *Wild twistor D-modules*, in *Algebraic analysis and around*, Adv. Stud. Pure Math., **54**, Math. Soc. Japan, Tokyo, (2009), 293–353.

[66] M. Saito, *Modules de Hodge polarisables*, Publ. RIMS., **24** (1988), 849–995.

[67] W. Schmid, *Variation of Hodge structure: the singularities of the period mapping*, Invent. Math. **22** (1973), 211–319.

[68] C. T. Simpson, *Constructing variations of Hodge structure using Yang-Mills theory and applications to uniformization*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), 867–918.

[69] C. T. Simpson, *Harmonic bundles on noncompact curves*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 713–770.

[70] C. T. Simpson, *Higgs bundles and local systems*, Publ. I.H.E.S., **75** (1992), 5–95.

[71] C. T. Simpson, *Mixed twistor structures*, math.AG/9705006.

[72] C. T. Simpson, *The Hodge filtration on nonabelian cohomology*, Proc. Sympos. Pure Math., **62**, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1997), 217–281.

[73] F. Takemoto, *Stable vector bundles on algebraic surfaces*, Nagoya Math. J. **47** (1972), 29–48.

[74] F. Takemoto, *Stable vector bundles on algebraic surfaces. II.* Nagoya Math. J. **52** (1973), 173–195.

[75] H. L. Turrittin, *The formal theory of systems of irregular homogeneous linear difference and differential equations*. Bol. Soc. Mat. Mexicana (2) **5** (1960) 255–264.

[76] K. Uhlenbeck, S.-T. Yau, *On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles*, Comm. Pure Appl. Math. **39** (1986), no. S, suppl., S257–S293.

[77] K. Yokogawa, *Compactification of moduli of parabolic sheaves and moduli of parabolic Higgs sheaves*, J. Math. Kyoto Univ. **33** (1993) 451–504.