

正則振率不変量

吉川 謙一

CONTENTS

1. 序 — 楕円曲線の正則振率不変量	1
2. 2-elementary $K3$ 曲面の正則振率不変量	3
3. 2-elementary $K3$ 曲面のモジュライ空間	6
4. 保型形式	7
5. τ_M と τ_M^{spin} の明示公式	9
6. 3次元 Calabi-Yau 多様体の BCOV 不変量と τ_M の関係	10
References	13

1. 序 — 楕円曲線の正則振率不変量

\mathfrak{H} を複素上半平面とする. $\tau \in \mathfrak{H}$ に対して, $T = \mathbf{C}/\mathbf{Z} + \tau\mathbf{Z}$ を面積 1 に正規化された Kähler 計量 $g = dz \cdot d\bar{z}/\Im\tau$ の入った楕円曲線とする. g の Kähler 形式 γ が $\gamma = i dz \wedge d\bar{z}/(2\Im\tau)$ により定義される. \square_T を T 上の C^∞ 関数に作用する (T, γ) のラプラス作用素とする:

$$\square_T = -2\Im\tau \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = -\frac{\Im\tau}{2} (\partial_x^2 + \partial_y^2).$$

この時, \square_T のスペクトル $\sigma(\square_T)$ が

$$\sigma(\square_T) = \{2\pi^2(\Im\tau)^{-1}|m\tau + n|^2; (m, n) \in \mathbf{Z}^2\}$$

と具体的に求まり, \square_T のスペクトル ζ -関数が次の式で与えられる:

$$\zeta_T(s) := \sum_{\lambda \in \sigma(\square_T) \setminus \{0\}} \lambda^{-s} = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{(\Im\tau)^s / (2\pi^2)^s}{|m\tau + n|^{2s}}.$$

有限次正值 Hermitian 行列 $H > 0$ の行列式が

$$\log \det H = - \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \text{Tr}(H^s)$$

と与えられるという事実の類推から, Ray-Singer [22] は \square_T の正則化された行列式を次の式により導入した:

$$\det \square_T := \exp(-\zeta'_T(0)).$$

実は, この値をモジュラー形式のノルムにより具体的に与えることができる. そのために使われるモジュラー形式は Dedekind η -関数である:

$$\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n>0} (1 - q^n), \quad q = e^{2\pi i \tau}.$$

その Petersson ノルムは

$$\|\eta(\tau)^{24}\|^2 = (\Im\tau)^{12} |\eta(\tau)^{24}|^2$$

で与えられる \mathfrak{H} 上の $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ -不変関数である. $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ -不変性から, $\|\eta(\tau)\|$ は T の周期 (τ の $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ -軌道) にしか依らず, 従って $\|\eta(\tau)\|$ を $\|\eta(T)\|$ と書くことができる. ラプラス作用素の行列式の言葉を用いると, 古典的な Kronecker 極限公式は次の様に定式化される.

Theorem 1.1 (Kronecker, Ray-Singer [22]). 次の等式が成り立つ:

$$\det \square_T = 2 \|\eta(T)\|^4.$$

Quillen 計量のアノマリー公式 [4] によれば, この等式から次のように楕円曲線 T の不変量が得られる. γ を平坦とも面積 1 とも限らない T の勝手な Kähler 形式, ξ を T の勝手な非零標準形式, $\mathrm{Vol}(T, \gamma) = \int_T \gamma / 2\pi$ とし,

$$\tau_{\mathrm{ell}}(T) := \mathrm{Vol}(T, \gamma) (\det \square_{T, \gamma})^{-1} \exp \left(\frac{1}{12} \int_T \log \left(\frac{i\xi \wedge \bar{\xi}}{\gamma} \right) c_1(T, \gamma) \right)$$

と定義する. ただし, $c_1(T, \gamma)$ は (T, γ) の Ricci 形式である. この時, $\tau_{\mathrm{ell}}(T)$ は T の不変量を与える. 実際, 次式が成り立つ:

$$\tau_{\mathrm{ell}}(T) = (4\pi \|\eta(T)^4\|)^{-1}.$$

岡シンポジウムにおいて筆者はこの等式の高次元化を紹介した. この講義録でも同様の話題を紹介する. 筆者は最近この話題を主題とする論説 [32] を「数学」に書いたばかりであるが, この講義録では論説 [32] 以降の進展についても述べる. 高次元化に話を進める前に, Theorem 1.1 の高種数曲線への一般化も盛んに研究されているので, それについても簡単に述べる. (以下の記述では重要な結果を網羅しているわけではない. 特に, 尖点付き双曲曲線については何も述べていない.)

Fried [10], D'Hoker-Phong [8], Sarnak [23] はコンパクト双曲曲線に対して, ラプラス作用素の行列式を Selberg ζ -関数の特殊値を用いて与えた. Zograf [34], McIntyre-Takhtajan [19] は Schottky 空間 (Teichmüller 空間の適当な商空間であり, またコンパクト Riemann 面のモジュライ空間の適当な被覆空間でもある) 上で定義された Dedekind η -関数に類似する無限積 (Zograf 無限積) を用いてラプラス作用素の行列式を表示した. 但し, Zograf 無限積には Dedekind η -関数における $q^{1/24}$ に相当する項が現れず, この点が Dedekind η -関数との大きな相違点となっている. Zograf, McIntyre-Takhtajan とは独立に Kokotov-Korotkin [14] は曲線上の Abel 微分 ω を用いて $\omega \cdot \bar{\omega}$ と定義される退化平坦計量に関するラプラス作用素を考えた. 彼らは標識付き Riemann 面と Abel 微分の組のモジュライ空間上に Bergman τ -関数と呼ばれる正則関数を或る可積分接続の平坦解として導入し, その Petersson ノルムとして退化平坦計量に関するラプラス作用素の行列式が表示される事を示した. 彼等はさらに, Bergman τ -関数をテータ関数や prime 形式等を用いて表示した. McIntyre-Park [18] は与えられたコンパクト Riemann 面を境界とする実 3 次元双曲多様体を考え, その Chern-Simons 不変量や正則化された体積を用いて境界付き 3 次元多様体の不変量を導入し, Zograf 無限積と新しく彼等により導入された不変量の積として Bergman τ -関数を表示した. (McIntyre-Park により, Dedekind η -関数の $q^{1/24}$ に相当する項が境界付き 3 次元多様体の不変量により与えられたことになる.) この様に, 双曲計量や退化平坦計量に関するラプラス作用素の行列式を考えることにより Theorem 1.1 が高種数曲線へと一般化されている.

さて, ここでは Kronecker 極限公式の幾何学的な高次元化を考えたいのであるが, その際に単純にラプラス作用素の行列式を考えるのではなく, 解析的振率 (定義は後で

述べる) を考える. 高次元においてはラプラス作用素の行列式を単独で考えてもはっきりとした幾何学的意味を見出す事ができないのに対し, 解析的振率はコホモロジーの行列式上の計量という明確な幾何学的意味を持つからである.

楕円曲線の高次元化として誰もが最初に思い浮かべるのは高次元の複素トーラスであろう. この場合の解析的振率は Ray-Singer [22] により既に計算されている: (A, γ) を 2 次元以上の平坦複素トーラスとすれば, その解析的振率は 1 に等しい. 特に, 高次元トーラスを考えても何も興味深い関数は得られない. 実は, 複素トーラスでなく主偏極 Abel 多様体のテータ因子を考えると, ${}^t dz(\mathfrak{S}\tau)^{-1} d\bar{z}$ から誘導される計量に関する解析的振率が非自明な Siegel モジュラー形式を与える [27]. (例えば, 種数 4 では偶テータ定数全部の積と Jacobian 軌跡を特徴付ける Schottky 形式の積が得られる.) この講義録ではそれについてはこれ以上触れない. この場合にもまだまだ研究すべき問題が残されているのであるが, 筆者は 1997 年以降もう 20 年ほどテータ因子の解析的振率の研究を事実上停止してしまっている. その大きな理由はテータ因子の解析的振率以上に面白そうな研究対象と出会ったからなのであるが, 以下そのテーマ (の一部) について述べる.

複素トーラス・Abel 多様体とは別方向への楕円曲線の高次元化として, $K3$ 曲面・超 Kähler 多様体と Calabi-Yau 多様体が考えられる. この講義録ではこちらの系列に関する筆者の研究について述べる. 3 次元 Calabi-Yau 多様体の解析的振率は種数 1 ミラー対称性と深く関わるが, 岡シンポジウムにおける講演ではこの話題についてあまり触れられなかったので, この講義録でもこのテーマについては最後に簡単に述べるに留める. さて, 簡単な考察により, Ricci 平坦 $K3$ 曲面や Ricci 平坦超 Kähler 多様体の解析的振率も 1 であることがわかり, 2 次元以上の平坦複素トーラスと似た状況になっている. ここで諦めないで 2 次元において残されたもう一つの曲面, すなわち Enriques 曲面の解析的振率を考えると, Theorem 1.1 の非自明な高次元化が得られる [28]. つまり, 非自明な不変量を得るために群作用付きの対象を考え, その群作用により解析的振率を撚ると良いのである.

2. 2-ELEMENTARY $K3$ 曲面の正則振率不変量

2.1. 正則振率. (V, θ) を対合付きコンパクト Kähler 多様体とし, γ を V 上の θ -不変 Kähler 形式とする. $\square_{0,q} := (\bar{\partial} + \bar{\partial}^*)^2$ を V 上の $(0, q)$ -形式に作用するラプラス作用素とする. この時, θ は各固有値 $\lambda \in \sigma(\square_{0,q})$ に対する固有空間 $E(\square_{0,q}; \lambda)$ に作用する. $\square_{0,q}$ の ζ -関数と \mathbf{Z}_2 -同変 ζ -関数を次の式で定義する:

$$\zeta_{0,q}(s) = \sum_{\lambda \in \sigma(\square_{0,q}) \setminus \{0\}} \lambda^{-s} \dim E(\square_{0,q}; \lambda),$$

$$\zeta_{0,q}(s, \iota) = \sum_{\lambda \in \sigma(\square_{0,q}) \setminus \{0\}} \lambda^{-s} \text{Tr} [\iota^*|_{E(\square_{0,q}; \lambda)}].$$

これらの関数は $\Re s$ が $\dim V$ より真に大きい時に絶対収束し, 全平面に有理型に解析接続され, $s = 0$ で正則である事が知られている.

Definition 2.1 ([22], [4], [3],[17]). (V, γ) の解析的振率と \mathbf{Z}_2 -同変解析的振率を以下の式で定義する:

$$\tau(V, \gamma) = \exp\left\{-\sum_{q \geq 0} (-1)^q q \zeta'_{0,q}(0)\right\}, \quad \tau_{\mathbf{Z}_2}(V, \gamma)(\theta) = \exp\left\{-\sum_{q \geq 0} (-1)^q q \zeta'_{0,q}(0, \theta)\right\}.$$

一般に, $\tau(V, \gamma)$ も $\tau_{\mathbf{Z}_2}(V, \gamma)(\theta)$ も \mathbf{Z}_2 -不変 Kähler 形式の選び方に依り, V の不変量とはならない. しかし, ある場合には γ への依存が軽度であり, 不変量を構成することが可能である. 次にこの様な例を説明する.

2.2. 2-elementary $K3$ 曲面に対する正則振率不変量. $K3$ 曲面の定義を思い出す. 連結かつ非特異なコンパクト複素曲面 X が $K3$ 曲面であるとは, 次の条件が成り立つ時を言う:

$$K_X \cong \mathcal{O}_X, \quad h^1(\mathcal{O}_X) = 0.$$

ここで, K_X は X の標準束である. $K3$ 曲面は単連結 Kähler 曲面であり, 全ての $K3$ 曲面は変形で互いに移り合うことが知られている. さらに, $H^2(X, \mathbf{Z})$ に交叉形式を付与して格子と見なす時, 次の同型の存在も知られている (このような $H^2(X, \mathbf{Z})$ の自明化は X の標識と呼ばれる):

$$\alpha: H^2(X, \mathbf{Z}) \cong \mathbb{L}_{K3} := \mathbf{U} \oplus \mathbf{U} \oplus \mathbf{U} \oplus \mathbb{E}_8 \oplus \mathbb{E}_8.$$

但し, $\mathbf{U} = (\mathbf{Z}^2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$, \mathbb{E}_8 は E_8 -型負定値ユニモジュラー格子である.

Definition 2.2. $K3$ 曲面と対合の組 (X, ι) は, ι が $H^0(X, K_X)$ に非自明に作用する時, つまり

$$\iota^* \eta = -\eta, \quad \forall \eta \in H^0(X, K_X)$$

が成り立つ時, 2-elementary $K3$ 曲面と呼ばれる.

2-elementary $K3$ 曲面 (X, ι) の型を格子 $H^2(X, \mathbf{Z})_+$ の同型類として定める. 但し,

$$H^2(X, \mathbf{Z})_{\pm} := \{v \in H^2(X, \mathbf{Z}); \iota^* v = \pm v\}$$

である. $H^2(X, \mathbf{Z})_+^{\perp} = H^2(X, \mathbf{Z})_-$, $H^2(X, \mathbf{Z})_-^{\perp} = H^2(X, \mathbf{Z})_+$ であるから, $H^2(X, \mathbf{Z})_+$ を考える事と $H^2(X, \mathbf{Z})_-$ を考える事に本質的な差はない. Nikulin [21] によれば, 2-elementary $K3$ 曲面 (X, ι) の型は組 (X, ι) の変形型を決定することが知られている. $H^2(X, \mathbf{Z})_{\pm}$ はそれぞれ \mathbb{L}_{K3} の部分格子と見なされる. 標識の取替, 即ち \mathbb{L}_{K3} の自己同型群 $O(\mathbb{L}_{K3})$ の作用は X にとって本質的なものではなく, $H^2(X, \mathbf{Z})_{\pm}$ の \mathbb{L}_{K3} における像の $O(\mathbb{L}_{K3})$ -作用に関する同値類が本質的である. $H^2(X, \mathbf{Z})_+$ あるいは $H^2(X, \mathbf{Z})_-$ の同型類は 75 種類存在する. $H^2(X, \mathbf{Z})_-$ の同型類のリストは以下の様に与えられる.

TABLE 1. $H^2(X, \mathbf{Z})_-$ の等長類

g	$\delta = 1$	$\delta = 0$
0	$(\mathbb{A}_1^+)^{\oplus 2} \oplus \mathbb{A}_1^{\oplus t} \quad (0 \leq t \leq 9)$	$\mathbf{U}(2)^{\oplus 2}$
1	$\mathbf{U} \oplus \mathbb{A}_1^+ \oplus \mathbb{A}_1^{\oplus t} \quad (0 \leq t \leq 9)$	$\mathbf{U} \oplus \mathbf{U}(2), \mathbf{U}(2)^{\oplus 2} \oplus \mathbb{D}_4$
2	$\mathbf{U}^{\oplus 2} \oplus \mathbb{A}_1^{\oplus t} \quad (1 \leq t \leq 9)$	$\mathbf{U}^{\oplus 2}, \mathbf{U} \oplus \mathbf{U}(2) \oplus \mathbb{D}_4, \mathbf{U}^{\oplus 2} \oplus \mathbb{E}_8(2)$
3	$\mathbf{U}^{\oplus 2} \oplus \mathbb{D}_4 \oplus \mathbb{A}_1^{\oplus t} \quad (1 \leq t \leq 6)$	$\mathbf{U}^{\oplus 2} \oplus \mathbb{D}_4, \mathbf{U} \oplus \mathbf{U}(2) \oplus \mathbb{D}_4^{\oplus 2}$
4	$\mathbf{U} \oplus \mathbb{A}_1^+ \oplus \mathbb{E}_7 \oplus \mathbb{A}_1^{\oplus t} \quad (0 \leq t \leq 5)$	$\mathbf{U}^{\oplus 2} \oplus \mathbb{D}_4^{\oplus 2}$
5	$\mathbf{U}^{\oplus 2} \oplus \mathbb{E}_7 \oplus \mathbb{A}_1^{\oplus t} \quad (0 \leq t \leq 5)$	$\mathbf{U} \oplus \mathbf{U}(2) \oplus \mathbb{E}_8$
6	$\mathbf{U}^{\oplus 2} \oplus \mathbb{E}_8 \oplus \mathbb{A}_1^{\oplus t} \quad (1 \leq t \leq 5)$	$\mathbf{U}^{\oplus 2} \oplus \mathbb{E}_8, \mathbf{U} \oplus \mathbf{U}(2) \oplus \mathbb{D}_4 \oplus \mathbb{E}_8$
7	$\mathbf{U}^{\oplus 2} \oplus \mathbb{D}_4 \oplus \mathbb{E}_8 \oplus \mathbb{A}_1^{\oplus t} \quad (1 \leq t \leq 2)$	$\mathbf{U}^{\oplus 2} \oplus \mathbb{D}_4 \oplus \mathbb{E}_8$
8	$\mathbf{U}^{\oplus 2} \oplus \mathbb{D}_6 \oplus \mathbb{E}_8 \oplus \mathbb{A}_1^{\oplus t} \quad (0 \leq t \leq 1)$	
9	$\mathbf{U}^{\oplus 2} \oplus \mathbb{E}_7 \oplus \mathbb{E}_8 \oplus \mathbb{A}_1^{\oplus t} \quad (0 \leq t \leq 1)$	$\mathbf{U} \oplus \mathbf{U}(2) \oplus \mathbb{E}_8^{\oplus 2}$
10	$\mathbf{U}^{\oplus 2} \oplus \mathbb{E}_8^{\oplus 2} \oplus \mathbb{A}_1$	$\mathbf{U}^{\oplus 2} \oplus \mathbb{E}_8^{\oplus 2}$
*		$\mathbf{U} \oplus \mathbf{U}(2) \oplus \mathbb{E}_8(2)$

但し, ADE 型の負定値ルート格子を $\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_n$ で表し, $\mathbf{U}(2) = (\mathbf{Z}^2, 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$ である. 表中の g は対応する型を持つ 2-elementary $K3$ 曲面 (X, ι) の固定曲線 (簡単な考察から, ι の固定点集合は孤立点を含まない)

$$X^{\iota} = \{x \in X; \iota(x) = x\}$$

の全種数 (X^ι の各成分の種数の総和) であり, $*$ は ι が固定点無しに X に作用する事を意味する. (その場合の商 X/ι は Enriques 曲面である.) また, $\delta \in \{0, 1\}$ は X^ι の定める $H^2(X, \mathbf{Z})_+$ の類が 2 で割れる場合に $\delta = 0$ と定め, そうでない時 $\delta = 1$ と定める.

上で述べた通り, 2-elementary K3 曲面 (X, ι) の固定点集合は空であるか又は非特異射影曲線の非交和である:

$$X^\iota = \coprod_i C_i.$$

X に ι -不変 Kähler 形式 γ を与える時, X^ι の γ に関する解析的振率と体積を乗法的に定義する:

$$\tau(X^\iota, \gamma|_{X^\iota}) := \prod_i \tau(C_i, \gamma|_{C_i}), \quad \text{vol}(X^\iota, \gamma|_{X^\iota}) := \prod_i \text{vol}(C_i, \gamma|_{C_i}).$$

Theorem 2.3 ([28], [16]). (X, ι) を M 型 2-elementary K3 曲面とし, η を X 上の非零標準形式, γ を X 上の ι -不変 Kähler 形式とする. $r := \text{rk}_{\mathbf{Z}} M$ と置く.

(1) 実数

$$\begin{aligned} \tau_M(X, \iota) &:= \text{Vol}(X, \gamma)^{\frac{14-r}{4}} \tau_{\mathbf{Z}_2}(X, \gamma)(\iota) \text{Vol}(X^\iota, \gamma|_{X^\iota}) \tau(X^\iota, \gamma|_{X^\iota}) \\ &\quad \times \exp \left[\frac{1}{8} \int_{X^\iota} \log \left(\frac{\eta \wedge \bar{\eta}}{\gamma^2/2!} \cdot \frac{\text{Vol}(X, \gamma)}{\|\eta\|_{L^2}^2} \right) \Big|_{X^\iota} c_1(X^\iota, \gamma|_{X^\iota}) \right] \end{aligned}$$

は η, γ の選び方に依らず, 従って (X, ι) の同型類のみにより定まる.

(2) 実数¹

$$\begin{aligned} \tau_M^{\text{spin}}(X, \iota) &= \prod_{\Sigma^2 = K_{X^\iota}, h^0(\Sigma) = 0} \left\{ \text{Vol}(X, \gamma)^{\frac{14-r}{4}} \tau_{\mathbf{Z}_2}(X, \gamma)(\iota) \tau(X^\iota, \Sigma; \gamma|_{X^\iota})^{-2} \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left[\frac{1}{8} \int_{X^\iota} \log \left(\frac{\eta \wedge \bar{\eta}}{\gamma^2/2!} \cdot \frac{\text{Vol}(X, \gamma)}{\|\eta\|_{L^2}^2} \right) \Big|_{X^\iota} c_1(X^\iota, \gamma|_{X^\iota}) \right] \right\} \end{aligned}$$

は η, γ の選び方に依らず, 従って (X, ι) の同型類のみにより定まる. ここで, Σ は X^ι の非有効かつ偶な半標準束全体を渡る. 即ち, Σ は $\Sigma^{\otimes 2} = K_{X^\iota}$, $h^0(\Sigma) = 0$ を充たす X^ι 上の正則直線束全体を渡る.

γ が Ricci 平坦である事と次の等式が成り立つことは同値である:

$$\frac{\eta \wedge \bar{\eta}}{\gamma^2/2!} = \frac{\|\eta\|_{L^2}^2}{\text{Vol}(X, \gamma)}.$$

従って, γ が ι -不変 Ricci 平坦 Kähler 形式の時, $\tau_M(X, \iota)$ と $\tau_M^{\text{spin}}(X, \iota)$ は次のように簡明に表示される:

$$\begin{aligned} \tau_M(X, \iota) &= \text{Vol}(X, \gamma)^{\frac{14-r}{4}} \tau_{\mathbf{Z}_2}(X, \gamma)(\iota) \text{Vol}(X^\iota, \gamma|_{X^\iota}) \tau(X^\iota, \gamma|_{X^\iota}), \\ \tau_M^{\text{spin}}(X, \iota) &= \prod_{\Sigma^2 = K_{X^\iota}, h^0(\Sigma) = 0} \text{Vol}(X, \gamma)^{\frac{14-r}{4}} \tau_{\mathbf{Z}_2}(X, \gamma)(\iota) \tau(X^\iota, \Sigma; \gamma|_{X^\iota})^{-2}. \end{aligned}$$

定義により, τ_M^{spin} と τ_M の関係は以下の様にと与えられる.

Lemma 2.4. (1) X^ι が有効かつ偶な半標準束を持たないならば,

$$\tau_M^{\text{spin}}(X, \iota) = \frac{\tau_M(X, \iota)^{2^{g-1}(2^g+1)}}{\prod_{\Sigma^2 = K_{X^\iota}, h^0(\Sigma) = 0} \text{Vol}(X^\iota, \gamma|_{X^\iota}) \tau(X^\iota, \gamma|_{X^\iota}) \cdot \tau(X^\iota, \Sigma)^2}.$$

¹筆者が [32] の最終稿を提出した時には不変量 τ_M^{spin} はまだ得られていなかった.

(2) X^ι が有効かつ偶な半標準束を唯一持つならば,

$$\tau_M^{\text{spin}}(X, \iota) = \frac{\tau_M(X, \iota)^{(2^g-1)(2^g-1+1)}}{\prod_{\Sigma^2=K_{X^\iota}, h^0(\Sigma)=0} \text{Vol}(X^\iota, \gamma|_{X^\iota}) \tau(X^\iota, \gamma|_{X^\iota}) \cdot \tau(X^\iota, \Sigma)^2}.$$

以下, M 型 2-elementary $K3$ 曲面の不変量 $\tau_M, \tau_M^{\text{spin}}$ が定義するモジュライ空間の関数を詳述する. τ_M の明示公式は [32] にも在る. (1), (2) の右辺の分母に現れる量はスピン-1/2 ボゾン化公式を用いると X^ι のテータ定数の Petersson ノルムとして表示される. この表示については Siegel モジュラー形式の説明を与える §4.3 で詳述する. 次節以降では, $\tau_M, \tau_M^{\text{spin}}$ を記述するための土台となる 2-elementary $K3$ 曲面のモジュライ空間とその上の保型形式を説明する.

3. 2-ELEMENTARY $K3$ 曲面のモジュライ空間

3.1. 2-elementary $K3$ 曲面のモジュライ空間. §2.2 の格子の分類結果を導く基礎となるのが次の Nikulin による結果である.

Fact 3.1 ([20], [21]). M を 2-elementary $K3$ 曲面 (X, ι) の型とし, $A_M := M^\vee/M$ をその判別式群とする.

- (i) M は \mathbb{L}_{K3} の原始的 2-elementary 双曲型格子である.
- (ii) 2-elementary $K3$ 曲面の変形同値類は型により定まる.
- (iii) $r := \text{rk } M, l := \text{rk}_{\mathbb{F}_2} A_M, \delta(M) \in \{0, 1\}$ を判別式形式 q_M の奇偶とする時, (X, ι) の型は組 (r, l, δ) により定まる.
- (iv) 全部で 75 種類の 2-elementary $K3$ 曲面の変形同値類が存在する.

M の \mathbb{L}_{K3} における直交補格子を Λ とする:

$$\Lambda := M^\perp = \alpha(H^2(X, \mathbf{Z})_-).$$

この時, Λ は \mathbb{L}_{K3} の符号 $(2, 20 - r)$ を持つ原始的 2-elementary 格子である. Λ に付随する IV 型領域を次で定める:

$$\Omega_\Lambda := \{[\eta] \in \mathbf{P}(\Lambda \otimes \mathbf{C}); \langle \eta, \eta \rangle_\Lambda = 0, \langle \eta, \bar{\eta} \rangle_\Lambda > 0\}.$$

Ω_Λ には Λ の自己同型群 $O(\Lambda)$ が射影変換として作用する. その商空間

$$\mathcal{M}_\Lambda := \Omega_\Lambda / O(\Lambda)$$

は $20 - r$ 次元の直交型モジュラー多様体である. Ω_Λ の判別式因子は次式で定義される Ω_Λ の $O(\Lambda)$ -不変な被約因子である:

$$\mathcal{D}_\Lambda := \sum_{d \in \Lambda / \pm 1, d^2 = -2} H_d.$$

ここで, $H_d := \{[\eta] \in \Omega_\Lambda; \langle d, \eta \rangle = 0\}$ である. \mathcal{M}_Λ の開集合 \mathcal{M}_Λ^0 を次式で定める:

$$\mathcal{M}_\Lambda^0 := (\Omega_\Lambda - \mathcal{D}_\Lambda) / O(\Lambda).$$

Definition 3.2. 標識 $\alpha: H^2(X, \mathbf{Z}) \cong \mathbb{L}_{K3}$ を $\alpha(H_-^2(X, \mathbf{Z})) = \Lambda$ となるように選ぶ時, (X, ι) の周期を次の \mathcal{M}_Λ^0 の点として定める:

$$\pi_M(X, \iota) := [\alpha(H^0(X, K_X))] \in \mathcal{M}_\Lambda^0.$$

Theorem 3.3 ([28], [29]). 周期写像により, \mathcal{M}_Λ^0 は M 型 2-elementary $K3$ 曲面の粗モジュライ空間である.

3.2. **Torelli 写像.** 2-elementary $K3$ 曲面の固定曲線の位相型は以下の様与えられる事が Nikulin より知られている。

Fact 3.4 ([21]). M 型 2-elementary $K3$ 曲面 (X, ι) の固定集合 X^ι の位相型は以下の様に定まる。

- (i) $M \cong \mathbb{U}(2) \oplus \mathbb{E}_8(2)$ ならば, $X^\iota = \emptyset$.
- (ii) $M \cong \mathbb{U} \oplus \mathbb{E}_8(2)$ ならば, $X^\iota = C_1^{(1)} \amalg C_2^{(1)}$. ここで, $C_1^{(1)}, C_2^{(1)}$ は楕円曲線.
- (iii) $M \not\cong \mathbb{U}(2) \oplus \mathbb{E}_8(2), \mathbb{U} \oplus \mathbb{E}_8(2)$ ならば,

$$X^\iota = C^g \amalg E_1 \amalg \dots \amalg E_k.$$

ここで, C^g は非特異種数 g 曲線, E_i は非特異有理曲線で, g, k は次式で与えられる:

$$g := 11 - \frac{r+l}{2}, \quad k := \frac{r-l}{2}, \quad r = r(M), \quad l = \dim_{\mathbb{F}_2} A_M.$$

Definition 3.5. $M \not\cong \mathbb{U}(2) \oplus \mathbb{E}_8(2)$ の時, Torelli 写像 $J_M: \mathcal{M}_\Lambda^0 \rightarrow \mathcal{A}_g = \mathfrak{S}_g / \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ が次式で定義される:

$$J_M(X, \iota) := \Omega(X^\iota).$$

ただし, $\Omega(X^\iota)$ は X^ι の周期である。

4. 保型形式

4.1. 2-elementary 格子に付随する楕円モジュラー形式. Dedekind η -関数と Jacobi テータ級数が次の式により定義される:

$$\eta(\tau) = e^{2\pi i \tau / 24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n \tau}), \quad \vartheta_{\mathbb{A}_+^1}(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i n^2 \tau}.$$

そこで, $\Gamma_0(4)$ に関するモジュラー形式 $\phi_k(\tau) \in \mathcal{O}(\mathfrak{H})$ を次式で定める:

$$\phi_k(\tau) := \eta(\tau)^{-8} \eta(2\tau)^8 \eta(4\tau)^{-8} \theta_{\mathbb{A}_+^1}(\tau)^k$$

Theorem 4.1 ([6], [24], [29]). Λ を符号 $\mathrm{sign}(\Lambda) = (2, n)$ の 2-elementary 格子とする. $\{\mathbf{e}_\gamma\}_{\gamma \in A_\Lambda}$ を群環 $\mathbb{C}[A_\Lambda]$ の標準基底とする. この時,

$$F_\Lambda(\tau) := \sum_{\gamma \in M\Gamma_0(4) \backslash \mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z})} \phi_{10-n}|_\gamma \rho_\Lambda(\gamma^{-1}) \mathbf{e}_0$$

はメタプレクティク群 $\mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ $1 - n/2$ の ρ_Λ 型モジュラー形式である. 即ち, 次の関数等式が成り立つ:

$$F_\Lambda \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \sqrt{c\tau + d} \right) = (c\tau + d)^{1 - \frac{n}{2}} \rho_\Lambda \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \sqrt{c\tau + d} \right) \cdot F_\Lambda(\tau).$$

ここで, $\rho_\Lambda: \mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}[A_\Lambda])$ は Λ に付随する Weil 表現である. 即ち, $\mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z})$ の生成元を $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sqrt{\tau}$ とする時, ρ_Λ は

$$\rho_\Lambda(T) \mathbf{e}_\gamma := e^{\pi i \langle \gamma, \gamma \rangle} \mathbf{e}_\gamma, \quad \rho_\Lambda(S) \mathbf{e}_\gamma := \frac{i^{-\sigma(\Lambda)/2}}{\sqrt{|A_\Lambda|}} \sum_{\delta \in A_\Lambda} e^{-2\pi i \langle \gamma, \delta \rangle} \mathbf{e}_\delta$$

により定まる表現である. また, $f|_\gamma$ は Petersson スラッシュ作用素である: f の重さが k の時, $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して $(f|_\gamma)(\tau) = (c\tau + d)^{-k} f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)$ と定義される.

$F_\Lambda(\tau)$ の $+i\infty$ における展開の主要部は以下の様与えられる:

$$F_\Lambda(\tau) := \{q^{-1} + 2(16 - r(\Lambda))\} \mathbf{e}_0 + 2^{g(\Lambda)+1} \{16 - r(\Lambda)\} \mathbf{v}_0 \\ + 2^{g(\Lambda)} q^{-\frac{1}{4}} \mathbf{v}_3 - 2^{16-r(\Lambda)} q^{\frac{12-r(\Lambda)}{4}} \{1 + (28 - r(\Lambda))q^2\} \mathbf{e}_{1\Lambda}.$$

但し, $\mathbf{v}_k := \sum_{\gamma \in A_M, \gamma^2 \equiv k \pmod{2}} \mathbf{e}_\gamma$ であり, $\mathbf{1}_\Lambda$ は A_Λ の特性元である. 即ち, $\mathbf{1}_\Lambda$ は $\langle x, \mathbf{1}_\Lambda \rangle \equiv \langle x, x \rangle \pmod{\mathbf{Z}}$ ($\forall x \in A_\Lambda$) を満たす A_Λ の唯一の元である.

Fact 4.2 ([29], [16]). $0 \leq g \leq 10$ ならば, $2^{g-1}F_\Lambda(\tau)$ は $+i\infty$ において整な Fourier 展開を持ち, $O^+(\Lambda)$ -不変である.

4.2. 2-elementary 格子に付随する Borchers 積. 前節に引き続き Λ を符号 $(2, n)$ の偶 2-elementary 格子とし, 簡単のため次の分解を仮定する:

$$\Lambda = \mathbf{U}(-1) \oplus L.$$

ここで, L は 2-elementary 双曲型格子である. C_L を L の正錐とする:

$$C_L := \{x \in L \otimes \mathbf{R}; \langle x, x \rangle_L > 0\}.$$

この時, 管状領域 $L \otimes \mathbf{R} + iC_L$ と Ω_Λ を指数写像により同一視することができる:

$$\exp: L \otimes \mathbf{R} + iC_L \ni z \rightarrow \exp(z) := \left[\left(1, z, \frac{\langle z, z \rangle_L}{2} \right) \right] \in \Omega_\Lambda.$$

$f(\tau)$ は $\mathrm{Mp}_2(\mathbf{Z})$ に関する重さ $1 - \frac{n}{2}$ の ρ_Λ 型モジュラー形式で, 整な Fourier 展開を持つものと仮定する:

$$f(\tau) = \sum_{\gamma \in A_\Lambda} \mathbf{e}_\gamma \sum_{k \in \mathbf{Z} + \gamma^2/2} c_\gamma(k) q^k, \quad q = e^{2\pi i \tau}, \quad c_\gamma(k) \in \mathbf{Z}.$$

Theorem 4.3 ([5]). f の Borchers リフト

$$\Psi_\Lambda(z, f) := e^{2\pi i \langle \rho, z \rangle} \prod_{\lambda \in L^\vee, \lambda \cdot W > 0} \left(1 - e^{2\pi i \langle \lambda, z \rangle_L} \right)^{c_\lambda(\lambda^2/2)}$$

は管状領域 $L \otimes \mathbf{R} + iW$ の $\Im y \gg 0$ の部分で収束し, Ω_Λ 上の $O^+(\Lambda)$ の或る指数有限部分群に関する重さ $c_0(0)/2$ の保型形式に解析接続され, その因子は Fourier 係数 $\{c_\gamma(k)\}_{k < 0}$ から決まる Heegner 因子の線形結合として与えられる. ここで, $W \subset L \otimes \mathbf{R}$ は f の Weyl 部屋と呼ばれる錐であり, $\rho \in L \otimes \mathbf{Q}$ は f の Weyl ベクトルと呼ばれるベクトルであり, 両者は Fourier 係数 $\{c_\gamma(k)\}$ から具体的に決定される. また, f が $O^+(\Lambda)$ -不変なら $\Psi_\Lambda(z, f)$ も $O^+(\Lambda)$ に関する保型形式である.

w を $\Psi_\Lambda(\cdot, f)$ の重さとする時, $\Psi_\Lambda(\cdot, f)$ の Petersson ノルムが次の $L \otimes \mathbf{R} + iC_L$ 上の関数として定まる:

$$\|\Psi_\Lambda(z, f)\|^2 := \langle \Im z, \Im z \rangle_L^w |\Psi_\Lambda(z, f)|^2.$$

この時, $\Psi_\Lambda(z, f)$ の $O^+(\Lambda)$ に関する保型性は, 関数 $\|\Psi_\Lambda(z, f)\|$ の $O^+(\Lambda)$ -不変性と言い換えられる². 特に, $\|\Psi_\Lambda(\cdot, f)\|$ を \mathcal{M}_Λ 上の関数と見なす事ができる.

4.3. Siegel モジュラー形式. 組 $(a, b) \in \{0, \frac{1}{2}\}^{2g}$ の偶奇を $4^t a \cdot b$ の偶奇により定める. 偶な組 $(a, b) \in \{0, \frac{1}{2}\}^{2g}$ に対して, Riemann テータ定数 $\theta_{a,b}(\Omega)$ が次式で定義される:

$$\theta_{a,b}(\Omega) := \sum_{n \in \mathbf{Z}^g} \exp \{ \pi i^t (n+a) \Omega (n+a) + 2\pi i^t (n+a)b \}, \quad \Omega \in \mathfrak{S}_g.$$

テータ定数の変換公式 [13] から, $\{\theta_{a,b}(\Omega)\}_{(a,b) \in \{0, \frac{1}{2}\}^{2g}}$ の基本対称式は $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbf{Z})$ に関する Siegel モジュラー形式である.

² $\langle \Im z, \Im z \rangle_L$ は $L \otimes \mathbf{R} + iC_L$ の Bergman 核である. Bergman 核の $O^+(\Lambda)$ -作用に関する変換性が $L \otimes \mathbf{R} + iC_L$ の標準保型因子を定める. $\Psi_\Lambda(\cdot, f)$ の保型性はこの様にして定まる標準保型因子に関する保型性である.

Definition 4.4. $\chi_g(\Omega)$ と $\Upsilon_g(\Omega)$ を次のテータ定数の基本対称式として定める:

$$\chi_g(\Omega) := \prod_{(a,b) \text{ even}} \theta_{a,b}(\Omega), \quad \Upsilon_g(\Omega) = \chi_g(\Omega)^8 \sum_{(a,b) \text{ even}} \theta_{a,b}(\Omega)^{-8}.$$

重さ k の Siegel モジュラー形式 $S(\Omega)$ の Petersson ノルムが次式で定義される:

$$\|S(\Omega)\|^2 := (\det \Im \Omega)^k |S(\Omega)|^2.$$

$\|S\|^2$ は $\mathrm{Sp}(2g, \mathbf{Z})$ -不変な \mathfrak{S}_g 上の C^∞ 関数であり, 従って Siegel モジュラー多様体 $\mathcal{A}_g = \mathfrak{S}_g / \mathrm{Sp}(2g, \mathbf{Z})$ 上の C^∞ 関数である. 特に, $J_M^* \|\chi_g\|^2, J_M^* \|\Upsilon_g\|^2 \in C^\infty(\mathcal{M}_\Lambda^0)$ である.

5. τ_M と τ_M^{spin} の明示公式

\mathcal{M}_Λ の特性的 Heegner 因子 \mathcal{H}_Λ を次式で定める:

$$\mathcal{H}_\Lambda := \sum_{\lambda \in \Lambda^\vee / \pm 1, \lambda^2 = \varepsilon_\Lambda, [\lambda] = \mathbf{1}_\Lambda} H_\lambda, \quad \varepsilon_\Lambda := \{12 - r(\Lambda)\} / 2.$$

ここで, $\mathbf{1}_\Lambda \in A_\Lambda$ は判別式群 A_Λ の特性ベクトルである. 一般に, $\lambda \in \Lambda$ に対して

$$H_\lambda = \{[\eta] \in \Omega_\Lambda; \langle \eta, \lambda \rangle = 0\}$$

は $\lambda^2 \geq 0$ ならば空集合であり, $\lambda^2 < 0$ ならば空集合でない. 従って, $r(\Lambda) < 12$ の時, $\mathcal{H}_\Lambda = 0$ である.

Theorem 5.1 ([16]). $M \subset \mathbb{L}_{K_3}$ を原始的 2-elementary 双曲型格子とし, $\Lambda = M^\perp$ とする. 型 M のみに依存する定数 C_M が存在して, 次の等式が $\mathcal{M}_\Lambda^0 \setminus \mathcal{H}_\Lambda$ 上で成り立つ:

$$\tau_M^{\mathrm{spin}} = C_M \|\Psi_\Lambda(\cdot, 2^{g-1}F_\Lambda + f_\Lambda)\|^{-1/2}.$$

ここで, $(r, \delta) \neq (2, 0), (10, 0)$ の時 $f_\Lambda = 0$, $(r, \delta) = (10, 0)$ の時 $f_\Lambda = F_\Lambda$ であり, $(r, \delta) = (2, 0)$ の時 f_Λ は以下の様にと与えられる:

- $\Lambda = \mathbb{U}^\perp = \mathbb{U} \oplus II_{1,17}$ の時,

$$f_\Lambda(\tau) := E_4(\tau) / \eta(\tau)^{24} = \theta_{\mathbb{E}_8^+}(\tau) / \eta(\tau)^{24}.$$

- $\Lambda = \mathbb{U}(2)^\perp = \mathbb{U}(2) \oplus II_{1,17}$ の時,

$$f_\Lambda(\tau) := 8 \sum_{\gamma \in A_\Lambda} \left\{ \eta\left(\frac{\tau}{2}\right)^{-8} \eta(\tau)^{-8} + (-1)^\gamma \eta\left(\frac{\tau+1}{2}\right)^{-8} \eta(\tau+1)^{-8} \right\} \mathbf{e}_\gamma \\ + \eta(\tau)^{-8} \eta(2\tau)^{-8} \mathbf{e}_0$$

但し, $\theta_{\mathbb{E}_8^+}(\tau)$ は E_8 -型ルート格子のテータ級数である.

Theorem 5.1 より, 解析的振率不変量 τ_M^{spin} は Borcherds 積 $\Psi_\Lambda(\cdot, 2^{g-1}F_\Lambda + f_\Lambda)$ の解析的対応物である. さらに τ_M^{spin} は楕円モジュラー形式 $2^{g-1}F_\Lambda + f_\Lambda$ と等価であるという意味で楕円モジュラー的である. 今の所, τ_M^{spin} と等価な楕円モジュラー形式 $2^{g-1}F_\Lambda + f_\Lambda$ の幾何学的意味は不明である. その意味の解明が待たれる.

Theorem 5.1 から τ_M を導くために, スピン-1/2 ボゾン化公式を思い出す. (実際の証明では τ_M の方が先に求まり, それにスピン-1/2 ボゾン化公式を組み合わせる事で τ_M^{spin} が求まる.)

Theorem 5.2 ([1], [7]). 種数 g のコンパクト Riemann 面 C と C 上の Kähler 形式 ω に対して, g のみに依存する定数 c_g が存在して, 任意の非有効半標準束 Σ に対して, 次の等式が成り立つ:

$$\text{Vol}(C, \omega) \tau(C, \omega) \cdot \tau(C, \Sigma; \omega)^2 = c_g \|\theta_{a,b}(\Omega(C))\|^{-4}.$$

ここで, $a, b \in \{0, 1/2\}^g$ は (C のレベル 2-構造を固定することにより得られる) Σ に対応するテータ指標であり, $\Omega(C)$ は C の周期である.

定数 c_g は $g = 0$ の時は \mathbf{P}^1 に対する算術的 Riemann-Roch 定理から求まり, $g = 1$ の場合は Ray-Singer の定理 [22] から従い, $g > 1$ の場合には Wentworth [26] が決定した.

Theorem 5.3 ([16]). $M \subset \mathbb{L}_{K3}$ を原始的 2-elementary 双曲型格子とし, $\Lambda = M^\perp$ とする. 型 M のみに依存する定数 C_M が存在し, 次の等式が \mathcal{M}_Λ^0 上で成り立つ:

(1) $(r, \delta) \neq (2, 0), (10, 0)$ の時,

$$\tau_M^{-2^g(2^g+1)} = C_M \|\Psi_\Lambda(\cdot, 2^{g-1}F_\Lambda + f_\Lambda)\| \cdot J_M^* \|\chi_g^\delta\|.$$

(2) $(r, \delta) = (2, 0), (10, 0)$ の時,

$$\tau_M^{-(2^g-1)(2^g+2)} = C_M \|\Psi_\Lambda(\cdot, 2^{g-1}F_\Lambda + f_\Lambda)\| \cdot J_M^* \|\Upsilon_g\|.$$

歴史的には τ_M がまず先に導入され, τ_M^{spin} の導入はごく最近なのであるが, Theorem 5.1 と Theorem 5.3 を見比べると, τ_M^{spin} の方がより基本的な不変量であるように見える. しかし, 弦理論における重要性という点では, 今の所 τ_M の方に軍配が上がる. それを次節で説明する.

6. 3次元 CALABI-YAU 多様体の BCOV 不変量と τ_M の関係

n 次元連結コンパクト Kähler 多様体 X が以下の条件を充す時, Calabi-Yau 多様体と呼ばれる:

$$(1) K_X \cong \mathcal{O}_X, \quad (2) h^{0,q}(X) = 0 \quad (0 < q < n).$$

Calabi-Yau 曲面は $K3$ 曲面に他ならない.

6.1. BCOV 不変量. 物理学者 Bershadsky-Cecotti-大栗-Vafa [2] は高種数曲線に関するミラー対称性を研究し, 特に A-模型での楕円曲線の数え上げ問題が B-模型においては或る解析的振率に対応すると予想した. 彼等の予想に従えば, 3次元 Calabi-Yau 多様体の解析的振率不変量が得られるはずである. 筆者とその共同研究者はこの不変量を BCOV 不変量と呼び, 具体的に次の様に与えた [9].

X を 3次元 Calabi-Yau 多様体とし, γ をその Kähler 形式とする. (X, γ) の BCOV 振率を次式で定義する:

$$T_{\text{BCOV}}(X, \gamma) := \exp\left\{-\sum_{p,q \geq 0} (-1)^{p+q} pq \zeta'_{p,q}(0)\right\} = \prod_{p \geq 0} \tau(X, \Omega_X^p)^{(-1)^p p}.$$

また, 格子 $H^2(X, \mathbf{Z})_{\text{fr}} = H^2(X, \mathbf{Z}) / \text{Tors } H^2(X, \mathbf{Z})$ の γ に関する余体積を次式で定める:

$$\text{Vol}_{L^2}(H^2(X, \mathbf{Z}), [\gamma]) := \text{Vol}(H^2(X, \mathbf{R}) / H^2(X, \mathbf{Z}), [\gamma]).$$

Definition 6.1 ([2], [9]). 次式で定まる実数を X の BCOV 不変量と言う:

$$\begin{aligned} \tau_{\text{BCOV}}(X) &:= \text{Vol}(X, \gamma)^{-3 + \frac{\chi(X)}{12}} \text{Vol}_{L^2}(H^2(X, \mathbf{Z}), [\gamma])^{-1} T_{\text{BCOV}}(X, \gamma) \\ &\quad \times \exp\left[-\frac{1}{12} \int_X \log\left(\frac{i\eta \wedge \bar{\eta} \text{Vol}(X, \gamma)}{\gamma^3/3! \|\eta\|_{L^2}^2}\right) c_3(X, \gamma)\right]. \end{aligned}$$

ここで, η は非零な X 上の標準形式である.

弦理論では

$$F_1 = -\log \tau_{\text{BCOV}}$$

が B -模型における種数 1 弦振幅関数である. 計量 γ が Ricci 平坦ならば,

$$\frac{i\eta \wedge \bar{\eta}}{\gamma^3/3!} = \frac{\|\eta\|_{L^2}}{\text{Vol}(X, \gamma)}$$

が成り立つので, $\tau_{\text{BCOV}}(X)$ は以下のように簡単な表示を持つ:

$$\tau_{\text{BCOV}}(X) = \text{Vol}(X, \gamma)^{-3+\frac{\chi(X)}{12}} \text{Vol}_{L^2}(H^2(X, \mathbf{Z}), [\gamma])^{-1} T_{\text{BCOV}}(X, \gamma).$$

さらに X が偏極 Ricci 平坦 Calabi-Yau 多様体で $[\gamma] = c_1(L)$ (L は X の偏極を与える豊富直線束) ならば, $\text{Vol}(X, \gamma), \text{Vol}_{L^2}(H^2(X, \mathbf{Z}), [\gamma]) \in \mathbf{Q}$ は偏極を固定した変形に対して定数である. 従って, 偏極 Ricci 平坦 Calabi-Yau 多様体のモジュライ空間上では $\tau_{\text{BCOV}}(X)$ と $T_{\text{BCOV}}(X, \gamma)$ に本質的な差はない.

Theorem 6.2 ([9]). 3次元 Calabi-Yau 多様体 X に対して, $\tau_{\text{BCOV}}(X)$ は Kähler 形式の選び方に依らず, $\tau_{\text{BCOV}}(X)$ は X の不変量である. 特に, τ_{BCOV} は 3次元 Calabi-Yau 多様体のモジュライ空間上の関数を与える.

BCOV 不変量は次の様にも理解される. 複素直線 $\lambda_{\text{BCOV}}(X)$ を次式で定義する:

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{BCOV}}(X) &:= \bigotimes_{p \geq 0} \lambda(\Omega_X^p)^{(-1)^p p} = \bigotimes_{p, q \geq 0} (\det H^q(X, \Omega_X^p))^{(-1)^{p+q} p} \\ &= \det H^2(X, \Omega_X^1)^{-1} \otimes (\det H^1(X, \Omega_X^2))^{-2} \otimes (\det H^0(X, \Omega_X^3))^{-3} \\ &\quad \otimes \bigotimes_{r=1}^3 (\det H^{2r}(X, \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{C})^r. \end{aligned}$$

$\lambda_{\text{BCOV}}(X)$ 上の Quillen 計量と L^2 計量を $\|\cdot\|_{\lambda_{\text{BCOV}}(X), L^2, \gamma}$ と $\|\cdot\|_{\lambda_{\text{BCOV}}(X), Q, \gamma}$ で表す. 定義により, 次式が成り立つ:

$$\|\cdot\|_{\lambda_{\text{BCOV}}(X), Q, \gamma}^2 = T_{\text{BCOV}}(X, \gamma) \|\cdot\|_{\lambda_{\text{BCOV}}(X), L^2, \gamma}^2.$$

一般に, $\|\cdot\|_{\lambda_{\text{BCOV}}(X), L^2, \gamma}$ と $\|\cdot\|_{\lambda_{\text{BCOV}}(X), Q, \gamma}$ のどちらも γ の選び方に依存する. しかし, $\|\cdot\|_{\lambda_{\text{BCOV}}(X), Q, \gamma}$ を僅かに補正して得られる次の計量は γ の選び方に依存しない.

Theorem 6.3 ([9]). 以下の $\lambda_{\text{BCOV}}(X)$ 上の Hermite 構造は Kähler 形式 γ の選び方に依らない:

$$\|\cdot\|_{\lambda_{\text{BCOV}}}^2 := \text{Vol}(X, \gamma)^{\frac{\chi(X)}{12}} A(X, \gamma) \|\cdot\|_{\lambda_{\text{BCOV}}(X), Q, \gamma}^2.$$

但し, $A(X, \gamma)$ は次式で与えられる:

$$A(X, \gamma) := \exp \left[-\frac{1}{12} \int_X \log \left(\frac{i\eta \wedge \bar{\eta} \text{Vol}(X, \gamma)}{\gamma^3/3! \|\eta\|_{L^2}^2} \right) c_3(X, \gamma) \right].$$

この意味で Hermite 直線 $(\lambda_{\text{BCOV}}(X), \|\cdot\|_{\lambda_{\text{BCOV}}})$ は X の不変量である. この Hermite 直線を X の BCOV 直線と呼ぶ.

階数 1 の自由 \mathbf{Z} -加群 $\bigotimes_{r=1}^3 (\det H^{2r}(X, \mathbf{Z}))^r$ の生成元を \mathbf{e} とする. 上の事実から複素直線

$$\lambda := \det H^2(X, \Omega_X^1)^{-1} \otimes (\det H^1(X, \Omega_X^2))^{-2} \otimes (\det H^0(X, \Omega_X^3))^{-3}$$

は γ の選び方に依らない次の Hermite 構造を持つ:

$$\|(\cdot) \otimes \mathbf{e}\|_{\lambda_{\text{BCOV}}}^2.$$

一方, X が 3 次元 Calabi-Yau 多様体なので 3 次コホモロジー群は原始的元より成り, その結果コホモロジー $H^{p,q}(X, \mathbf{C})$ ($p+q=3$) 上の L^2 -計量はカップ積のみで定まり計量 γ には依存しない. 従って, λ 上の計量

$$\|\cdot\|_{\lambda, L^2}^2$$

は γ の選び方に依らない. BCOV 不変量はこれらの λ 上に存在する二つの内在的な Hermite 構造の比として与えられる:

$$\tau_{\text{BCOV}}(X) = \frac{\|(\cdot) \otimes \mathbf{e}\|_{\lambda_{\text{BCOV}}}^2}{\|\cdot\|_{\lambda, L^2}^2}.$$

τ_{BCOV} の複素ヘッシアンを与える式を述べる. そのために, 3 次元 Calabi-Yau 多様体の族 $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{M}$ に対する Weil-Petersson Kähler 形式を次式で定める:

$$\omega_{\text{WP}} := -dd^c \log \|\eta\|_{L^2}^2, \quad \eta \in \Gamma(\mathcal{M}, f_*K_{\mathcal{X}/\mathcal{M}}).$$

Theorem 6.4 ([4], [2], [9], [31]). $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{M}$ を 3 次元 Calabi-Yau 多様体の族とし, その小平-Spencer 写像が同型であると仮定する. $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{M}$ の判別式軌跡を $D = \sum_{i \in I} D_i$ とする. この時, 有理数 $a_i \in \mathbf{Q}$ ($i \in I$) が存在して, 次のカレントの等式が \mathcal{M} 上で成り立つ:

$$-dd^c \log \tau_{\text{BCOV}} = \text{Ric} \omega_{\text{WP}} + \left(h^{1,2} + 3 + \frac{\chi_{\text{top}}}{12} \right) \omega_{\text{WP}} + \sum_{i \in I} a_i \delta_{D_i}.$$

また, D_i 上の一般ファイバーが n_i 個の通常二重点を持つ Calabi-Yau 多様体ならば, $a_i = -n_i/6$ である.

Remark 6.5. (1) $c_1(K_{\mathcal{M}}) = -[\text{Ric} \omega_{\text{WP}}]_{\text{dR}}$ が \mathcal{M} のコンパクト化から分岐因子を除外した開集合上で成り立つので, 次の等式が分岐因子の外側で成り立つ:

$$c_1(K_{\mathcal{M}}) = \left(h^{1,2} + 3 + \frac{\chi_{\text{top}}}{12} \right) c_1(\lambda) + \sum_{i \in I} a_i c_1(D_i).$$

ここで, $\lambda = f_*K_{\mathcal{X}/\mathcal{M}}$ は Hodge 束である. モジュラー多様体のトロイダルコンパクト化に対しては, 同様の等式が $a_i = -1$ として成り立つ事が知られている.

(2) $(\mathcal{M}, \omega_{\text{WP}})$ がモジュラー多様体 (有界対称領域の算術群による商空間) に同型の時, τ_{BCOV} は \mathcal{M} 上の保型形式の Petersson ノルムである. さらに, \mathcal{M} の管状領域表示が標準座標で与えられるならば, 種数 1 のミラー対称性は

τ_{BCOV} が無限積展開を持つ保型形式の Petersson ノルムで与えられる

ことを主張する. 残念ながら, この条件を充す Calabi-Yau 多様体の族を見つける事は容易ではない.

6.2. Borcea-Voisin 多様体の BCOV 不変量.

Definition 6.6. (S, θ) を 2-elementary K3 曲面とし, T を楕円曲線とする. この時, 軌道体

$$X_{(S, \theta, T)} := \frac{S \times T}{\theta \times (-1_T)}$$

を $\text{Sing}(X_{(S, \theta, T)})$ においてブローアップしたものを $\tilde{X}_{(S, \theta, T)}$ とする. 3 次元 Calabi-Yau 多様体 $\tilde{X}_{(S, \theta, T)}$ を Borcea-Voisin 多様体と言う. $\tilde{X}_{(S, \theta, T)}$ の型を (S, θ) の型として定める:

$$H^2(S, \mathbf{Z})^\theta = \{l \in H^2(S, \mathbf{Z}); \theta^*l = l\}.$$

M 型 2-elementary K3 曲面の不変量 τ_M と M 型 Borcea-Voisin 多様体の BCOV 不変量 τ_{BCOV}^M の間には次の関係が成り立つ.

Theorem 6.7 ([12], [9], [33]). (S, θ) を M 型 2-elementary $K3$ 曲面とし, T を楕円曲線とする. この時, 格子 M のみに依存する定数 C_M が存在して, 次の等式が成り立つ:

$$\tau_{\text{BCOV}}(\tilde{X}_{(S, \theta, T)}) = C_M \tau_M(S, \theta)^{-4} \|\eta(T)^{24}\|^2.$$

即ち, モジュライ空間上の関数として以下の等式が成り立つ:

$$\tau_{\text{BCOV}}^M = C_M \tau_M^{-4} \|\eta^{24}\|^2.$$

Theorem 6.7 により, Borcea-Voisin 多様体に対して, BCOV 不変量と τ_M は等価である. さらに τ_M は楕円モジュラー形式と等価であったから, 結局 Borcea-Voisin 多様体の BCOV 不変量あるいは F_1 は楕円モジュラー的である. ミラー対称性を仮定すればこのようにして得られる楕円モジュラー形式は (ミラー) Borcea-Voisin 多様体の楕円曲線の数え上げ問題に関係すると期待される.

筆者は BCOV 不変量が Calabi-Yau 多様体の双有理不変量なのではないかと予想したが [9], これについては数体上で定義される Calabi-Yau 多様体に対する Maillot-Rössler の結果 [15] が知られているのみであり, 今後の研究の進展が待たれる.

筆者の知る限り, BCOV 不変量が具体的に計算されている Calabi-Yau 多様体はごく僅かであり, Borcea-Voisin 多様体とミラー 5 次超曲面に限られる. ミラー 5 次超曲面の BCOV 不変量については [9] を参照されたい. 3次元 Calabi-Yau 軌道体に対しても BCOV 不変量を拡張することができる [33]. 実は 3次元 Calabi-Yau 軌道体が適当な条件を充たす時, τ_M^{spin} に相当する BCOV 不変量 $\tau_{\text{BCOV}}^{\text{spin}}$ を構成することができる. $\tau_{\text{BCOV}}^{\text{spin}}$ に F_1 のような物理的意味があるのかどうか筆者は知らないが, もしそうだとすれば $\tau_{\text{BCOV}}^{\text{spin}}$ のミラー対称として現れる数え上げ不変量は少なくとも Borcea-Voisin 軌道体の場合には楕円モジュラー形式の Fourier 係数となり, その意味で楕円モジュラー的であることが期待される.

REFERENCES

- [1] Alvarez-Gaumé, L., Moore, G., Vafa, C. *Theta functions, modular invariance, and strings*, Commun. Math. Phys. **106** (1986), 1–40.
- [2] Bershadsky, M., Cecotti, S., Ooguri, H., Vafa, C. *Kodaira-Spencer theory of gravity and exact results for quantum string amplitudes*, Commun. Math. Phys. **165** (1994), 311–427.
- [3] Bismut, J.-M. *Equivariant immersions and Quillen metrics*, J. Differential Geom. **41** (1995), 53–157.
- [4] Bismut, J.-M., Gillet, H., Soulé, C. *Analytic torsion and holomorphic determinant bundles I, II, III*, Commun. Math. Phys. **115** (1988), 49–78, 79–126, 301–351.
- [5] Borchers, R.E. *Automorphic forms with singularities on Grassmannians*, Invent. Math. **132** (1998), 491–562.
- [6] Borchers, R.E. *Reflection groups of Lorentzian lattices*, Duke Math. J. **104** (2000), 319–366.
- [7] Bost, J.-B., Nelson, P. *Spin- $\frac{1}{2}$ bosonization on compact surfaces*, Phys. Rev. Letters **57** (1986), 795–798.
- [8] D’Hoker, E., Phong, D.H. *On determinants of Laplacians on Riemann surfaces*, Commun. Math. Phys. **104** (1986), 537–545.
- [9] Fang, H., Lu, Z., Yoshikawa, K.-I. *Analytic torsion for Calabi-Yau threefolds*, J. Differential Geom. **80** (2008), 175–259.
- [10] Fried, D. *Analytic torsion and closed geodesics on hyperbolic manifolds*, Invent. Math. **84** (1986), 523–540.
- [11] Gillet, H., Soulé, C. *An arithmetic Riemann-Roch theorem*, Invent. Math. **110** (1992), 473–543.
- [12] Harvey, J., Moore, G. *Exact gravitational threshold correction in the Ferrara-Harvey-Strominger-Vafa model*, Phys. Rev. D **57** (1998), 2329–2336.
- [13] Igusa, J.-I. *Theta Functions*, Springer, Berlin, (1972).
- [14] Kokotov, A., Korotkin, D. *Tau-functions on spaces of abelian differentials and higher genus generalizations of Ray-Singer formula*, J. Differential Geom. **82** (2009), 35–100.

- [15] Maillot, V., Rössler, D. *On the Birational Invariance of the BCOV Torsion of Calabi-Yau Threefolds*, Commun. Math. Phys. **311**, (2012) 301–316.
- [16] Ma, S., Yoshikawa, K.-I. *K3 surfaces with involution, equivariant analytic torsion, and automorphic forms on the moduli space IV*, preprint, arXiv:1506.00437
- [17] Ma, X. *Submersions and equivariant Quillen metrics*, Ann. Inst. Fourier **50** (2000), 1539–1588.
- [18] McIntyre, A., Park, J. *Tau function and Chern-Simons invariant*, Adv. Math. **262** (2014), 1–58
- [19] McIntyre, A., Takhtajan, L. A. *Holomorphic factorization of determinants of Laplacians on Riemann surfaces and a higher genus generalization of Kronecker’s first limit formula*, Geom. Funct. Anal. **16** (2006), 1291–1323.
- [20] Nikulin, V.V. *Integral symmetric bilinear forms and some of their applications*, Math. USSR Izv. **14** (1980), 103–167.
- [21] Nikulin, V.V. *Factor groups of groups of automorphisms of hyperbolic forms with respect to subgroups generated by 2-reflections*, J. Soviet Math. **22** (1983), 1401–1476.
- [22] Ray, D.B., Singer, I.M. *Analytic torsion for complex manifolds*, Ann. of Math. **98** (1973), 154–177.
- [23] Sarnak, P. *Determinants of Laplacians*, Commun. Math. Phys. **110** (1987), 113–120.
- [24] Scheithauer, N. R. *On the classification of automorphic products and generalized Kac-Moody algebras*, Invent. Math. **164** (2006), 641–678.
- [25] Yau, S.-T. *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère Equation, I*, Commun. Pure Appl. Math. **31** (1978), 339–411
- [26] Wentworth, R.A. *Gluing formulas for determinants of Dolbeault laplacians on Riemann surfaces*, Commun. Anal. Geom. **20** (2012), 455–499.
- [27] Yoshikawa, K.-I. *Discriminant of theta divisors and Quillen metrics*, J. Differential Geom. **52** (1999), 73–115.
- [28] Yoshikawa, K.-I. *K3 surfaces with involution, equivariant analytic torsion, and automorphic forms on the moduli space*, Invent. Math. **156** (2004), 53–117.
- [29] Yoshikawa, K.-I. *K3 surfaces with involution, equivariant analytic torsion, and automorphic forms on the moduli space II*, J. reine angew. Math. **677** (2013), 15–70.
- [30] Yoshikawa, K.-I. *K3 surfaces with involution, equivariant analytic torsion, and automorphic forms on the moduli space III*, Math. Zeit. **272** (2012), 175–190.
- [31] Yoshikawa, K.-I. *Degenerations of Calabi-Yau threefolds and BCOV invariants*, International J. Math. **26** (2015), 1540010 (33 pages).
- [32] 吉川 謙一 *対合付き K3 曲面と解析の損率*, 数学 **68** (2016), 225–245.
- [33] Yoshikawa, K.-I. *Analytic torsion for Borcea-Voisin threefolds*, “Geometry, Analysis and Probability” in Honor of Jean-Michel Bismut, Bost, J.-B., Hofer, H., Labourie, F., Le Jan, Y., Ma, X., Zhang, W. (Eds) Progress in Math. **310** (2017), 279–361.
- [34] Zograf, P. G. *Determinants of Laplacians, Liouville action, and an analogue of the Dedekind η -function on Teichmüller space*, unpublished manuscript (1997).

〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学 大学院理学研究科 数学教室
E-mail address: yosikawa@math.kyoto-u.ac.jp