完備リーマン多様体の体積と非線形方程式の解の漸近挙動

関西大学　システム理工学部　数学科

竹腰 見昭

1

序

複素平面 $\mathbb{C}$ 内の領域 $z \in \mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ 上の実数値関数 $u(z) \geqq 0$ で, 定数 $\lambda > 0$ に対して方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} \log u(z) \pm \lambda u(z) = 0$$

あるいは不等式

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} \log u(z) \pm \lambda u(z) \geqq 0$$

を満たす $u(z)$ の存在, 非存在は, 特に $\mathcal{D} = \{ \ z \in \mathbb{C} \ ; \ |z| < r \ \} \ (r > 0)$ あるいは $\mathcal{D} = \mathbb{C}$ のとき, $\mathcal{D}$ の関数論的, 複素微分幾何学的性質と深い関連をもち様々な理解が可能である. 例えば, $\mathcal{D}$ が前者であれば, $|f(z)| < 1$ を満たす非定数正則関数 $f(z)$ に対して $u(z) = |f'(z)|^2/(1 - |f(z)|^2)^2$ は $\mathcal{D}$ 上で等式 $\partial^2 \log u / \partial z \partial \overline{z} = 2u$ を満たすが, $\mathcal{D}$ が後者であればこのような u は自明 $u \equiv 0$ なものしか存在しない. さらに関数論で学ぶ正則関数に対する Schwarz の補題は上の不等式を満たす $u(z)$ の有界性から導かれる. 私がこのような立場から Schwarz の補題を学んだのは, 修士課程の時代にある先輩から教えていただいた, 小林昭七氏の著書

Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings, Marcel Dekker, 1970

からであった. それ以来, このテキストは私の座右の書となった. このテキストから Schwarz の補題が Ahlfors により再発見されたこと（Ahlfors-Schwarz の補題（後述））を知り, 著者自身によるその一般化も可能であることを学んだ. この結果には関数論的に重要な２つの性質が含まれる. ひとつはすでに述べた上の不等式を満たす $u(z)$ の有界性と, いまひとつは正則写像による小林の距離の diatance decreasing property である. この書の本来の目的は Schwarz の補題をモデルとする小林擬距離の導入とその基本的性質の導出および小林擬距離の複素多様体間の正則写像の研究への応用が主題であるのだが, S.T.Yau による論文

S.T. Yau, A general Schwarz lemma for Kähler manifolds, Amer. J. Math., Vol.100 (1978), 197-203

との出会いを契機として私本人の興味は前者へと移っていった. この論文で用いられた Yau 本人によって定式化された『一般化された最大値原理』は私にとって非常に attractive な研究主題となった. しかもこの原理に関する新たな発見が結果的には多様体間の調和写像の値分布と深い関連をもつことになった.

この講演では最初の節で Ahlfors - Schwarz の補題にまつわる話題について解説し, 次節で完備リーマン多様体の測地球の体積の増大度からラプラシアンに関するある種の非線形不等式を満たす解の有界性を導くことで, Ahlfors-Schwarz, Kobayashi, Yau の結果や微分幾何学に現れるいくつかの非線形問題を説明できるという立場を紹介する.

§1. **Ahlfors-Schwarz の補題とその一般化**

序で述べた Ahlfors - Schwarz の補題は [1] L.A.Ahlfors の中で定式化されたもので関数論と微分幾何学双方の立場から大変興味のある定理である (なお, 以下に述べるさらなる定式化は序で述べた小林氏の著作による).

定理 1 (Ahlfors - Schwarz の補題). $(W, d\sigma^2)$ を計量 $d\sigma^2 = a_j dz_j d\bar{z}_j$ をもつ Riemann 面とし, その Gauss 曲率 $R_{d\sigma^2}$ が条件

$$R_{d\sigma^2} := -\frac{2}{a_j}\frac{\partial^2 \log a_j}{\partial z \partial \bar{z}} \leqq -\kappa < 0$$

を満たすとする. このとき正則写像 $f : D_r := \{\ |z| < r\ \} \subset \mathbb{C} \ \to\ W\ (\ r > 0\ )$ に対して

$$f^*\omega_{d\sigma^2} \leqq \frac{4}{\kappa}\omega_{D_r} \qquad \left(\ \text{ただし}\ \omega_{D_r} := \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\frac{r^2 dz \wedge d\bar{z}}{(r^2 - |z|^2)^2}\ \text{は}\ D_r\ \text{の Poincare 計量の Kähler 形式}\ \right).$$

が成り立つ. なおこの不等式は

$$f^*\omega_{d\sigma^2} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\xi(z)\ dz \wedge d\bar{z}\ \ i.e.,\ \xi(z) = \frac{1}{\pi}a_j(f(z))|f_z(z)|^2 \ \Longrightarrow\ \xi(z) \leqq \frac{4r^2}{\pi\,\kappa\,(r^2 - |z|^2)^2}$$

と同値であり, 特に $0 \leqq \xi(0) \leqq \dfrac{4}{\pi\,\kappa\,r^2}$ が成り立つ.

注意. D_r の Poincaré 計量 ω_{D_r} の Gauss 曲率 $R_{\omega_{D_r}}$ は簡単な計算により -4 であることが確かめられるので, 定理 1 に現れる比 $4/\kappa$ は実は $-4/-\kappa$ に等しい.

さてこの定理 1 より例えば, 複素平面 $\mathbb{C}$ から Gauss 曲率が負定数以下である計量をもつ Riemann 面 W への正則写像は定数に限ることが従う. 実際, $f : \mathbb{C} \to W$ を非定数正則写像とする. 座標変換を適当に施して $f(z)$ による $\xi(z)$ が $\xi(0) > 0 \iff f'(0) \neq 0$ を満たすと仮定してよい. 定理 1 より, 任意の $r > 0$ に対して

$$0 < \xi(0) \leqq \frac{4}{\pi\kappa r^2}$$

であるから, $r \to \infty$ として $\xi(0) = 0$ となり矛盾を得る. さらにこの定式化は Picard の小定理, 複素平面上の非定数整関数の除外値は高々 1 個である, の別証明をも与えている. 実際, 整関数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が $a,\ b \in \mathbb{C}$ $(a \neq b)$ を値としてとらないとする. 整関数 $(f(z) - a)/(b - a)$ の除外値は $\{0,\ 1\}$ であるから, f は正則写像 $f : \mathbb{C} \to W := \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ を与えると考えてよい. 一方, $W = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ 上にはモジュラー関数 $\lambda(z)$ を被覆写像 $\lambda : H := \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Im}(z) > 0\} \to W$ と見て Gauss 曲率が上から負定数で押さえられる計量が導入される. したがって f が定数関数であることが示される. なお, W 上に Gauss 曲率が上から負定数で押さえられる計量を具体的に構成すること自体も大変興味深い問題である. この点については上述の小林氏の著書および [5] H.Grauert, H.Reckziegel を参照されたい.

なお, 定理 1 は正則写像 $f : D_r \to W$ が distance decreasing property

$$\forall\ z,\ w \in D_r \quad \Longrightarrow \quad d_{d\sigma^2}(f(z), f(w)) \leqq \frac{4}{\kappa} d_{\omega_{D_r}}(z, w)$$

を満たすことも意味している. こうした議論は小林氏が提唱された小林の意味の双曲性 (Kobayashi Hyperbolicity) と大変深い関連性があり氏の著書の主題でもある.

さらに, 定理 1 は, $W = \mathbb{C}$ かつ $f =$ 恒等写像として, 複素平面上には Gauss 曲率が上から負定数で押さえられる計量は存在しないことをも意味している. この視点から定理 1 は次のように定式化できる.

定理 2. D_r 上の C^2 級非負値連続関数 $u(z)$ が $\{\ z \in D_r\ ;\ u(z) > 0\ \} \neq \phi$ 上, 不等式

$$\varDelta \log u(z) \geqq c\,u(z)\ , \quad c > 0 \qquad \left(\varDelta = 4\partial\overline{\partial} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\ , \quad z = x + iy \right)$$

を満たせば

$$\forall\ z \in D_r \quad \Longrightarrow \ u(z) \leqq \frac{4r^2}{c\,(r^2 - |z|^2)^2}$$

が成り立つ. 特に $0 \leqq u(0) \leqq \dfrac{4}{c\,r^2}$ が成り立ち, $\mathbb{C}$ 上の不等式 $\varDelta \log u(z) \geqq c\,u(z)$ を満たす非負値関数 u は自明な解 $u \equiv 0$ に限る .

定理 2 の証明の概略.

$0 < r' < r$ を満たす r' に対して $w(z) := \dfrac{(r'^2 - |z|^2)^2}{r'^2} u(z)$ は $\{|z| = r'\}$ 上で 0 をとるから, $u(z) \not\equiv 0$ ならば $w(z)$ は $D_{r'}$ 内のある点 z_0 で正の最大値をとる. 不等式

$$0 \geqq \varDelta \log w(z_0) = \varDelta \log u(z_0) + \varDelta \log \left((r'^2 - |z|^2)^2 \right) (z_0) \geqq cu(z_0) - \frac{4r'^2}{(r'^2 - |z_0|^2)^2}$$

から任意の $z \in D_{r'}$ に対して $w(z) \leqq w(z_0) \leqq 4/c$ が導かれる. ここで等式 $\Delta \log(r'^2 - |z|^2)^2 = \dfrac{-4r'^2}{(r'^2 - |z|^2)^2}$ を用いた. $r' \to r$ として結論をえる. 後半の主張は $u(z_0) > 0$ を満たす点が存在すれば, 座標変換により $z_0 = 0$ としてよい. 一方, $0 < u(0) \leqq \dfrac{4}{cr^2}$ が任意の $r > 0$ に対して成り立つから, $r \to \infty$ として $u(0) = 0$ となり矛盾を得る. □

私自身は大阪大学の理学部に所属していた頃から定理 1 を定理 2 で書き換えて講義してきた. さて Ahlfors - Schwarz の補題は高次元複素多様体間の正則写像への拡張が可能である.

定理 3 ([8] S.Kobayashi). $(\mathcal{D}, g) \subset \mathbb{C}^m$ を有界対称領域とし, g の正則断面曲率は負定数 A 以上とする. (N, h) を正則断面曲率負定数 B 以下である Kähler 多様体とする. $f\colon \mathcal{D} \to N$ が正則写像とすれば $f_*\omega_N \leqq \dfrac{A}{B}\omega_M$, *i.e.*, $u := \mathrm{Trace}_g f_*\omega_N \leqq \dfrac{A}{B}$, が成り立つ (ここで $\omega_{\mathcal{D}}$, ω_N はそれぞれの Kähler 計量の Kähler 形式である).

この一般化で大切なのは $\mathcal{D}$ と N の複素次元に制限がないことである. 小林氏はまず $\mathcal{D}$ が単位円盤の場合に示し, 次に $\mathcal{D}$ が多重円盤の場合に示して最終的に有界対称領域の均質性を用いて議論を完成させている. この小林氏による結果はさらに Yau により次の形に一般化された.

定理 4 ([17] S.T.Yau). (M, g) を完備 Kähler 多様体でその Ricci 曲率は下に有界, *i.e.*, $\mathrm{Ric}_g \geqq A$, $A \in \mathbb{R}$, とする. (N, h) は Kähler 多様体でその正則断面曲率は上から負定数で押さえられている, *i.e.,* $\mathrm{Bisectional}_h \leqq B < 0$, とする. このとき $f : M \to N$ が非定数正則写像であれば $A \leqq 0$ かつ $f_*\omega_h \leqq \dfrac{A}{B}\omega_g$ が成り立つ.

この結果より Ricci 曲率が非負な完備 Kähler 多様体 (M, g), *i.e.*, $A = 0$, から正則断面局率が上から負定数でおさえられる Kähler 多様体 (N, h) への正則写像は定値写像に限ることが従い, とくに Ricci 曲率が非負な完備 Kähler 多様体 (M, g) 上では Picard の小定理が成り立つことが分かる. なお, $\dim_{\mathbb{C}} M = \dim_{\mathbb{C}} N$ の場合には定理 4 はさらなる一般化が可能である (後述の定理 10 と系 11, 12 を参照のこと). 定理 1 を用いた Picard の小定理の証明では複素平面が Einstein-Kähler 計量である Poincaré 計量をもつ領域 (D_r, ω_{D_r}) の増大列の極限として得られることが決定的であったが, 一般の Kähler 多様体ではこのような性質はとても期待できない. Yau はこの困難を [16] S.T.Yau の中で自身が示した以下の結果を用いることにより克服した.

定理 5 ([16] S.T.Yau). (M,g) を完備 Riemann 多様体でその Ricci 計量は下に有界とする, *i.e.,* $\mathrm{Ric}_g \geqq A$ を満たす定数 $A \in \mathbb{R}$ が存在する. このとき M 上の上に有界な任意の C^2- 級関数 u と任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$1)\quad \sup_M\ u - \varepsilon < u(x_\varepsilon)\ ,\quad 2)\quad |\nabla u|(x_\varepsilon) < \varepsilon\ ,\quad 3)\quad \mathit{\Delta}_g u(x_\varepsilon) < \varepsilon$$

を満たす点 $x_\varepsilon \in M$ が存在する.

なお, $\mathit{\Delta}_g u = \mathrm{div}_g(\nabla u)$ は計量 g に関する Laplacian である. この結果は後に『一般化された最大値原理』と呼ばれるようになる. 実際, $\sup_M u = u(x_0)$ となる点 $x_0 \in M$ が存在すれば, $\nabla u(x_0) = 0$, $\mathit{\Delta}_g u(x_0) \leqq 0$ であるから $x_\varepsilon = x_0$ とすればよく, 定理 5 は Ricci 曲率が下に有界という曲率条件があれば, この事実が漸近的に成り立つことを意味している.

定理 4 の証明の概略.

$u := \mathrm{Trace}_g f_* \omega_N$ とすれば u は [12] V.C.Lu により Chern-Lu の不等式

$$\Delta_g \log u \geqq R_M - R_N(f)u$$

を満たす (序で述べた不等式のように, この種の不等式は正則写像の値分布論を展開する上で極めて重要な役割を果たしている). ここで R_M は g の Ricci 曲率の点 $x \in M$ における下限, $R_N(f)$ は点 $f(x) \in N$ における h の正則断面曲率の上限を表している. これより u は Chern-Lu の不等式と仮定より以下の不等式 $(*)$

$$\mathit{\Delta}_g u \geqq R_M u - R_N(f)u^2 \quad \Longrightarrow \quad \mathit{\Delta}_g u \geqq Au - Bu^2 \qquad (*)$$

を満たす. さて定理 5 より M 上の下に有界な C^2- 級関数 w に対して, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$1')\quad w(x_\varepsilon) < \inf_M\ w + \varepsilon\ ,\quad 2')\quad |\nabla w|(x_\varepsilon) < \varepsilon\ ,\quad 3')\quad \Delta_g w(x_\varepsilon) > -\varepsilon$$

を満たす点 $x_\varepsilon \in M$ が存在する. 任意の定数 $c > 0$ に対して $w := \dfrac{1}{\sqrt{u+c}}$ とおき, w に $1')$, $2')$, $3')$ と $(*)$ を適用して結論をえる (実質上 $c = 1$ で十分). この証明では u の上からの有界性 ($\Longleftrightarrow\ \inf_M w > 0$) さえも上の諸性質から導かれることが本質的である. $\square$

定理 5 の証明の概略.

一点 $p \in M$ を固定して, $r(x) := \mathrm{dist}_g(x,p)$ とおく. 任意の $k \in \mathbb{N}$ について $w_k(x) = \dfrac{u(x)-u(p)+1}{(\log(r(x)^2+2))^k}$ ($x \in M$) とおけば $w_k(p) = \dfrac{1}{(\log 2)^k} > 0$ かつ $\lim_{r(x)\to\infty} w_k(x) = 0$ であるから, (M,g) の完備性により

$$1) \quad w_k(x_k) = \sup_M w\ , \quad 2) \quad \nabla w_k(x_k) = 0\ , \quad 3) \quad \Delta_g w_k(x_k) \leqq 0$$

を満たす点 $x_k \in M$ が存在する. 1), 2), 3) の計算を実行し展開して結論をえる (このとき k は与えられた $\varepsilon > 0$ に対して十分大きくとる必要がある). ただし, 関数 $r(x)$ したがって関数 $w_k(x)$ はすべての点で必ずしも微分可能ではないので, ある工夫が必要である. また必然的に $\Delta_g r$ の評価も必要となる. この点に関して Yau は [2] E.Calabi の結果を上述の論文 [16] S.T.Yau の中で

$$x \notin p \text{ の } \textit{cut locus} \ \&\ r(x) \geqq 1 \implies \Delta_g r(x) \leqq \frac{m-1}{r(x)} + \max\{0, A_m\}\ ;\ A_m := \sqrt{(m-1)\max\{0,-A\}}$$

の形に一般化し, 定理 5 の証明に適用している. $A=0$ のときが Calabi による結果である. □

いずれにしても定理 1 – 定理 4 の証明で (そして定理 5 の証明においてさえ) 基本となるのは与えられた関数 $u(x)$ から, 強制的にある点 z_0 で最大値をとる関数 $w(x)$ を構成して, その点における

$$1) \quad w(z_0) = \sup\ w\ , \quad 2) \quad \nabla w(z_0) = 0\ , \quad 3) \quad \Delta_g w(z_0) \leqq 0$$

という 2 つの等式と不等式を元の $u(x)$ に関して展開して所要の結果をえるという手法である. そこでは多変数実関数の極値における偏導関数の挙動という基本的性質 2), 3) 以外に特に超越的な手法は用いられていない. 次節では定理 5 で求めた点 x_ε を完備多様体上の積分 (測地球の体積の漸近挙動) を用いて求めるという手法を紹介する.

§2. 完備 Riemann 多様体の体積の増大度と非線形方程式の解の漸近挙動

この節では第 1 節で述べた Ahlfors-Schwarz の補題や一般化された最大値原理の成立の一つの根拠となっている『完備計量の曲率条件』をより一般的な『完備計量による測地球の体積の増大度』で置き換えることができるという立場を拙論 [14], [15] K.Takegoshi にしたがって紹介する.

次の定理を用いると前節で展開された議論の根底に横たわる諸問題を (すべてではないが) 原理的に説明することが可能である.

定理 6 ([14], [15] K.Takegoshi). (M, g) を完備 Riemann 多様体とし, $a > 0,\ -\infty < b \leqq 2,\ C > 0,\ \delta > 0$ を定数とする. $r(x) = \mathrm{dist}_g(p, x)$ をある点 $p \in M$ からの距離関数, $V(r)$ を p 中心, 半径 $r > 0$ の測地球 $B_p(r)$ の体積とする. M 上の C^2- 級関数 u が

$$\Delta_g u \geqq \frac{C}{(1+r)^b} u^{a+1} \quad on \quad \{\ u > \delta > 0\} \neq \phi$$

を満たせば, 次の漸近的体積評価が成り立つ.

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\log V(r)}{r^{2-b}} = \infty \qquad \left(\ resp. \quad \liminf_{r\to\infty} \frac{\log V(r)}{\log r} = \infty \right) \quad if \quad b < 2 \ \ (\ resp.\ b = 2\ ).$$

定理 6 の証明の概略.

$\sup\limits_M u < \infty$ ならば条件より u は $\{u > \delta\}$ 上で $u^* := \sup_M u$ に到達しないから $v = 1/(u^* - u)$ を考える. v は $\{v > 1/(u^* - \delta)\} \neq \phi$ 上で $a = 1$ に対して $\Delta_g v \geqq C_1 \delta^{a+1} v^2/(1 + r_*)^b$ を満たすから, 最初から $\sup\limits_M u = \infty$ と仮定して一般性を失わない. 任意の $C_2 > 0$ について $\{u > C_2 + \delta\} \neq \phi$ であるから, u を $u/(C_2 + \delta)$, $C_1 > 0$ を $C_3 := C_1(C_2 + \delta)^a > 0$ で置き換えて

$$\Delta_g u \geqq \frac{C_3}{(1+r)^b} u^{a+1} \quad on \quad \{u > 1\} \neq \phi$$

が成り立つ. ここで滑らかな非負値単調増加関数 $\lambda(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ で

$$\lambda(t) > 0 \ \ (\ t > 0\ )\,, \quad \lambda(t) \equiv 0 \ \ (\ t \leqq 0\ )\,, \quad \lambda'(t) > 0 \ \ (\ t > 0\ )\,, \quad \lambda'(t) \equiv 1\ (\ t \geqq 1 + c\ ,\ c > 0\ )$$

を満たす関数 $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ をとり, $r > 0,\ p > 0$ に対して

$$F(r, p) := \int_{B_r} \lambda'(u^p)\, dv_g \quad (\ \leqq V(r)\ )\ , \quad Q(r, p) := \int_{B_r} \lambda'(u^p) \cdot u^{p+a}\, dv_g$$

とおく. $\Delta_g u$ の満たす上の不等式を用いて $p = p(r) = a^2 C_3 (1 + r)^{2-b}/2^9$ と $Q(r, p(r))$ に対する L^p-評価を実行することにより, $C_3 > 0$ に依存して, 任意の $r \geqq r_1$ のとき

$$F(r, p(r)) \leqq k_b(r) \left(\frac{1}{2}\right)^{p(r)} F(2r, p(2r))$$

が成り立つ $r_1 > 0$ が存在することが分かる. ここで関数 $k_b(r)$ は $0 \leqq b \leqq 2$ のとき $k_b(r) \equiv 1$, $b < 0$ のとき $k_b(r) = (1 + 2r)^{-b}$ を満たす. この不等式より $r \geqq r_2 > r_1$ ならば

$$b < 2 \implies 0 < C_3 C_4 \leqq \frac{\log F(r, p(r))}{r^{2-b}} \qquad \left(\ resp. \quad b = 2 \implies 0 < C_3 C_5 \leqq \frac{\log F(r, p(r))}{\log r} \ \right)$$

が成り立つ $r_2 > 0$ と定数 $C_4 > 0$ (*resp.* $C_5 > 0$) が存在する. $F(r, p(r)) \leqq V(x)$ であり $C_3 = C_1(C_2+\delta)^a > 0$ において $C_2 > 0$ は任意に大きくとれるので結論が成り立つ. □

注意 1. Riemann 多様体 (M, g) 上の C^2- 級関数 u と定数 $p > 1$ に対して

$$\Delta_{g,p}u := \mathrm{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)$$

で定義される微分作用素 $\Delta_{g,p}$ を $p-$Laplacian と呼ぶ. 一般に, この微分作用素の主要部は $1 < p < 2$ ならば特異点をもち, $p > 2$ ならば退化している. この定義にしたがうと一般の Laplacian Δ_g は $2-$Laplacian であり, 定理 6 に現れる r の指数 2 は Laplacian $\Delta_g = \Delta_{g,2} = \mathrm{div}_g(\nabla u)$ が $2-$Laplacian であること, *i.e.*, $p = 2$, に由来する次元などに依らない絶対定数である.

定理 6 から Yau による定理 4, *i.e.*, Schwarz の補題の一般化, の別証明与えることができる.

定理 6 を用いた定理 4 の別証明.

$u = \mathrm{Trace}_g f_*\omega_h \geqq 0$ は定理 4 の証明中で使われた不等式 $(*)$ により

$$\Delta_g u \geqq Au - Bu^2$$

を満たす. $u \not\equiv 0$ とする. $A \geqq 0$ ならば u は $-B > 0$ に対して

$$\Delta_g u \geqq -Bu^2$$

を満たすから, $a = 1,\ b = 0,\ C = -B$ に対して定理 6 を適用すると

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\log V(r)}{r^2} = \infty$$

を得る. しかし, 一方で Ricci 曲率が下に有界であることから, 十分大きい任意の $r > 0$ について

$$V(r) \leqq \exp(Cr + C')\ ,\quad C = C(A) > 0\ ,\quad C' > 0$$

が成り立つ (以下の注意 2 を参照のこと) から矛盾を得る. したがって f が非定値写像ならば, $A < 0$ が成り立つ. $u > 0$ のとき u は

$$\Delta_g u \geqq -Bu^2\left(1 - \frac{A}{Bu}\right)$$

を満たす. さて $\{1 - (A/Bu) > 0\} \neq \phi$ ($\Longleftrightarrow$ $\{u > A/B\} \neq \phi$) ならば, 十分小さい任意の $0 < \delta < 1$ に対して $\{1 - (A/Bu) > \delta\} \neq \phi \Longleftrightarrow \{u > A/B(1-\delta)\} \neq \phi$ であるが, 上の変形式より定理 6 から

$$\Delta_g u \geqq -B\delta u^2 \quad on \quad \{u > A/B(1-\delta)\} \neq \phi \implies \liminf_{r\to\infty} \frac{\log V(r)}{r^2} = \infty$$

となり, やはり矛盾を得る. したがって $\{u > A/B(1-\delta)\} = \phi$ であり $\delta \to 0$ として $\{u > A/B\} = \phi,\ i.e.,\ u \leqq \dfrac{A}{B}$ をえる. $\square$

注意 2. (M, g) が完備 Riemann 多様体であるとき, 上の別証明の中で述べた Ricci 曲率と多様体の体積評価の関係については次が成り立つ.

(M, g) の Ricci 曲率が, $r(x) := \mathrm{dist}_g(x, p)$ $(x,\ p \in M)$ と定数 $b \leqq 2,\ C \geqq 0$ に対して

$$\mathrm{Ric}_g(x) \geqq -C(1 + r(x))^{2(1-b)}$$

を満たすならば $b < 2$ のとき $\displaystyle\lim_{r\to\infty} \frac{\log V(r)}{r^{2-b}} < \infty$, $b = 2$ のとき $\displaystyle\lim_{r\to\infty} \frac{\log V(r)}{\log r} < \infty$ が成り立つ. 一方で, 体積有限な非コンパクト実２次元完備 Riemann 多様体 (M, g) で g の断面曲率が $\mathrm{Ric}_g(x) \sim -r(x)^{2+a}$ $(x \in M,\ a > 0)$ を満たす例が存在する (cf. [10] P.Li, R.Schoen).

定理 6 と上の定理 4 の別証明からただちに次の系が得られることは容易に分かる.

定理 6 の系 I. $(M, g),\ a > 0,\ -\infty < b \leqq 2,\ C > 0$ を定理 6 と同様とする. $b < 2$ かつ $\displaystyle\liminf_{r\to\infty} \frac{\log V(r)}{r^{2-b}} < \infty$ $\left(resp.\ b = 2 \text{ かつ } \displaystyle\liminf_{r\to\infty} \frac{\log V(r)}{\log r} < \infty \right)$ ならば, $\{\ u > 0\ \} \neq \phi$ を満たす M 上の任意の C^2- 級関数 u と $0 < \delta < \displaystyle\sup_M\ u$ $(\leqq \infty)$ を満たす任意の δ に対して, 集合

$$\left\{\ \varDelta_g u < \frac{C}{(1+r)^b} u^{a+1}\ \right\} \cap \{\ u > \delta > 0\ \}$$

は空でない非有界集合である.

次の系 II は明らかにある非線形微分不等式を満たす非負値解の非存在性が完備 Riemann 多様体の体積の漸近挙動により統制されることを意味している.

定理 6 の系 II. $(M, g),\ a > 0,\ -\infty < b \leqq 2,\ C > 0$ を定理 6 と同様とする. $b < 2$ かつ $\displaystyle\liminf_{r\to\infty} \frac{\log V(r)}{r^{2-b}} < \infty$ $\left(resp.\ b = 2 \text{ かつ } \displaystyle\liminf_{r\to\infty} \frac{\log V(r)}{\log r} < \infty \right)$ ならば, 不等式 $\varDelta_g u \geqq \dfrac{C}{(1+r)^b} u^{a+1}$ を満たす非負値解 u は自明な解 $u \equiv 0$ に限る.

例えば定理 2 と上の系 II の $b = 2$ の場合に関連して次をえる.

定理 7. $\mathbb{C}$ 上には Gauss 曲率 R が

$$R(z) := -\frac{2}{g(z)} \frac{\partial^2\ \log g(z)}{\partial z \partial \bar{z}} \leqq -\frac{C}{1+|z|^2} \quad (\ C > 0\ )$$

をみたす Kähler 計量 $d\sigma^2 = g(z)dzd\bar{z}$ は存在しない.

注意 3. 複素多様体の小林の意味での双曲性については序で述べた小林氏の著作を参照していただきたいが, 定理 7 は複素平面 $\mathbb{C}$ と単位円 $\{z \in \mathbb{C} \ ; \ |z| < 1\}$ が双正則同値ではないことを, 小林の意味での双曲性によって判定できることと関連している. 実際, 次が成り立つ (cf.[6] R.E. Greene, H.Wu).

Theorem G ([6] R.E. Greene, H.Wu). (M, g) を断面曲率が非正である単連結完備 Kähler 多様体とし, ある点 $p \in M$ に対して $r(x) = \mathrm{dist}_g(x, p)$ とおく. g の $x \in M$ における断面曲率が $-C/(1+r(x)^2)$ 以下であれば (M, g) は小林の意味で完備双曲的である.

さて Yau が定理 4 を示すときに用いた定理 5 に関して系 I より次を得る.

定理 8. 完備 Riemann 多様体 (M, g) に対して定理 6 と同じ記号を用いる. (M, g) が

$$b < 2 \ \text{かつ} \ \liminf_{r\to\infty} \frac{\log V(r)}{r^{2-b}} < \infty \qquad \left(\mathit{resp.} \quad b = 2 \ \text{かつ} \ \liminf_{r\to\infty} \frac{\log V(r)}{\log r} < \infty \right)$$

を満たすならば, M 上の上に有界な任意の C^2- 級関数 u と任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$1) \ \sup_M \ u - \varepsilon < u(x_\varepsilon) < \sup_M \ u \ , \quad 3) \ \ \Delta_g u(x_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{(1 + r(x_\varepsilon))^b}$$

を満たす点 $x_\varepsilon \in M$ が存在する. さらに u に対して, 不等式 $\Delta_g u \geqq \lambda(u)$ を満たす連続関数 $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在すれば 点 x_ε を 1), 3) かつ 2) $|\nabla u|(x_\varepsilon) < \varepsilon$ を満たすようにとれる.

定理 8 の証明の概略. u は M 上 $u < u^* := \sup_M u$ を満たすと仮定してよい. $0 < w = \dfrac{1}{1 + \sup_M u - u} < 1$ とおく. 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある点 $y \in M$ をとり

$$\varepsilon_* = \frac{\min\{\varepsilon, \ u^* - u(y)\}}{1 + \min\{\varepsilon, \ u^* - u(y)\}} > 0$$

とおくと $x \in \{w > 1 - \varepsilon_*\}$ ならば $u(y) < u(x)$ が成り立つ. 定理 6 の系 I より $a = 1, \ C = \varepsilon > 0, \delta = 1 - \varepsilon > 0$ として

$$\varGamma_1 := \left\{ \ \Delta_g w < \varepsilon \frac{w^2}{(1 + r)^b} \ \right\} \cap \{w > 1 - \varepsilon_*\} \neq \phi$$

は非有界集合である. 一方, 直接計算により

$$\Delta_g w = w^2 \Delta_g u + 2w^3 |\nabla u|^2$$

であるから

$$x \in \varGamma_1 \implies \Delta_g u(x) < \frac{\varepsilon}{(1 + r(x))^b} \quad \& \quad u(y) \leqq u(x)$$

を得る. したがって y として $u^* - \varepsilon < u(x')$ を満たす点 $x' \in M$ をとれば結論を得る.

後半の証明では w を w^p に置き換え w^p $(p \in \mathbb{N})$ に対して $\mathit{\Gamma}_p \neq \phi$ であることが分かる. さらに $\{\mathit{\Gamma}_p\}$ は単調減少性 $\mathit{\Gamma}_{p+1} \subset \mathit{\Gamma}_p$ を満たすことが確かめられる. 完備性と仮定より $\cap_{p=1}^{\infty}\mathit{\Gamma}_p = \phi$ が成り立つことから $\mathit{\Delta}_g u \geqq \lambda(u)$ を満たす連続関数 λ が存在すれば $|\nabla u|(x_\varepsilon) < \varepsilon$ を満たす点 $x_\varepsilon \in M$ を見つけることができる. □

注意 4. 一般化された最大値原理については次の予想がある (cf. [14] Takegoshi).

予想. 完備 Riemann 多様体 (M, g) のある点 $p \in M$ について

$$\int_1^{\infty} \frac{rdr}{\log V(x)}\ dr = \infty$$

が成り立てば (M, g) で一般化された最大値原理が成り立つ.

上の積分が有限となる体積条件を満たす (M, g) で $\sup_M u < \infty$ かつ $\mathit{\Delta}_g u \geqq c > 0$ となる滑らかな正値関数 u をもつ例が知られている .

定理 8 の証明から分かるように 1), 3) を満たす点全体 $\mathit{\Gamma}_1$ は（空でない非有界集合であるから）かなり大きな集合であるが, その反面同時に $|\nabla u|$ が十分小さくなる点を見つけるのはそう簡単ではないことが分かる. なお, 後半の主張に関して, $\mathit{\Delta}_g u$ が下に有界ならば $\lambda \equiv \inf_M \mathit{\Delta}_g u$ とおいてやればよい (例えば, $\mathit{\Delta}_g u \geqq 0$ ならば $\lambda \equiv 0$ とできる). このような条件下で 1), 2), 3) を満たす点の存在, *i.e.,* 一般化された最大値原理, は調和写像の値分布や完備 Riemann 多様体の共形変換の等長性に関してより詳しい結果をもたらす. 例えば定理 8 の応用として次をえる (cf. [13] Omori).

定理 9. (M, g) を完備 Riemann 多様体 , (N, h) を断面曲率が非正な単連結完備 Riemann 多様体とする. 調和写像 $f : (M, g) \to (N, h)$ の微分 df が

$$\|df\|^2 \geqq \frac{C}{(1+r)^b} \quad (\ C > 0\ ,\quad b \leqq 2\ )$$

を満たすとき

$$b < 2\ \ \&\ \ \liminf_{r\to\infty} \frac{\log V(r)}{r^{2-b}} < \infty \qquad \left(\ \mathit{resp.}\ \ b = 2\ \ \&\ \ \liminf_{r\to\infty} \frac{\log V(r)}{\log r} < \infty\ \right)$$

ならば f による M の像 $f(M) \subset N$ は非有界である. 特に $(N, h) = (\mathbb{R}^n, g_e)$ であれば, $0 \leqq b \leqq 2$ のとき $f(M)$ は $\mathbb{R}^n$ の非退化な錘には含まれない.

ここで集合 $A \subset \mathbb{R}^m$ が非退化な錘に含まれるとは, ベクトル $\mathbf{a} \neq \mathbf{o} \in \mathbb{R}^m$, 正数 $0 < \delta < 1$ と任意の $\mathbf{x} \in A$ に対して $\dfrac{<\mathbf{x}, \mathbf{a}>}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{a}\|} \geqq \delta$ が成り立つことである. $<\cdot,\cdot>$ は $\mathbb{R}^m$ の標準内積であり $\|\mathbf{x}\|$ は標準内積に関する $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ のノルムである.

Ahlfors-Schwarz の補題とその一般化は 2 つの多様体間の正則写像による距離関数の distance decreasing property を意味するが, 同次元の多様体間の正則写像についてもある条件下で体積要素の volume decreasing property が成立する (cf. [9] Kobayashi, [11] Li-Yau, [15] Takegoshi). この性質も正則写像の値分布と関連がある. 例えば, 定理 4 の別証明とほぼ同様な議論を用にいることより, 次が成り立つ.

定理 10. $f : (M,g) \to (N,h)$ を m 次元完備 Kähler 多様体 (M,g) から m 次元 Kähler 多様体への正則写像とし, V_M, V_N をそれぞれ g, h に関する体積要素とする. (M,g) が

$$(**) \qquad \liminf_{r\to\infty} \frac{\log V(r)}{r^2} < \infty$$

を満たし, g の Scalor 曲率が下に有界, *i.e.,* $\mathrm{Scal}_g \geqq K$, かつ h の Ricci 曲率が負定数以下, *i.e.,* $\mathrm{Ric}_g \leqq L < 0$ であれば $K \leqq 0$ であり $u_f := f^*V_N/V_M$ は $u_f \leqq (K/mL)^m$ を満たす. とくに $K \geqq 0$ ならば任意の正則写像 $f : (M,g) \to (N,h)$ は M 上いたるところ退化する, *i.e.,* f の Jacobian は恒等的に 0 である.

なお, この定理の証明にも $u = u_f^{1/2m}$ に対する Chern-Lu 型の不等式が用いられる (cf.[4] S.S.Chern). また, 注意 2 より条件 $(**)$ は曲率条件, 任意の $x \in M$ に対して $\mathrm{Ric}_g(x) \geqq -C(1 + r(x))^2$ が成り立つ, で置き換えることもできる.

m 次元複素多様体 X の余次元 1 の解析集合 D が単純正規交叉的な因子であるとは, 任意の点 $p \in D$ において正則な局所座標近傍系 $\{U, (z_1, z_2, \cdots, z_m)\}$ で $D \cap U = \{z_1 \cdots z_k = 0\}$ $(1 \leqq k \leqq m)$ を満たすものが存在しかつ D の既約成分がすべて非特異であるときにいう. 定理 10 から Picard の小定理の高次元化である次の系を得る.

系 11. N はコンパクト m 次元代数多様体, K_N をその標準直線束とする. $D \subset N$ は単純正規交叉的な因子で $[D] \otimes K_N$ が小平の意味で正な直線束であれば, 定理 10 の条件 $(**)$ を満たしかつ Scalor 曲率が非負である m 次元完備 Kähler 多様体 (M,g) から $N \setminus D$ への任意の正則写像は退化する.

系 11 の条件下で $N \setminus D$ 上には負曲率をもつ完備 Einstein-Kähler 計量が導入されることが知ら

れているから定理 10 より結論が従う訳である. この系は $(M,g)=(\mathbb{C}^m,g_e)$ の場合は [3] J.Carlson, P.Griffiths の中で示されている. さらに類似の結果として次が成り立つ.

系 12. $\mathcal{D}\subset\mathbb{C}^m$ を有界対称領域とし, Γ を $\mathcal{D}$ の自己同型群の部分群で有限指数をもつとする. 定理 10 の条件 $(**)$ を満たしかつ Scalor 曲率が非負である m 次元完備 Kähler 多様体 (M,g) から商空間 $N:=\mathcal{D}/\Gamma$ への任意の正則写像は退化する.

この場合 Γ は固定点をもたずに $\mathcal{D}$ に作用するので $N=\mathcal{D}/\Gamma$ は非特異準射影的代数多様体となることが知られている. さらに $\Gamma-$ 不変な $\mathcal{D}$ の Bergman 計量 から N 上には正則断面曲率が負定数以下となる Kähler 計量が導入されるので定理 10 より結論が従う. この系も $(M,g)=(\mathbb{C}^m,g_e)$ の場合は [7] P.Griffiths, J.King の中で示されている. また一般に, A をアフィン代数多様体とするとき, A から $N=\mathcal{D}/\Gamma$ への正則写像は, A を開集合として含む (コンパクト) 代数多様体から N のコンパクト化への有理型写像として拡張されることが知られている (cf. [7] P.Griffiths, J.King).

あとがき

今回の講演内容を自身で俯瞰してみて未解決な問題, とくに注意 4 で述べた一般化された最大値原理の予想は今後も追跡してみたいと考えている. この話題については完備 Riemann 多様体上の熱方程式の基本解である熱核の漸近挙動と深い関連があることが以前から知られている. 微分幾何学の分野からのアプローチは Li と Yau による 1980 年代の仕事以来顕著な進展はみられないようだし, 今後どのような進展を見せるのか検討もつかないというのが現状である. 最後に今回, 岡シンポジュウムの講演の機会を与えていただいた組織委員の方々に感謝申し上げます.

参考文献

[1] L.A.Ahlfors, An extension of Schwarz's lemma, Trans. A.M.S., 43 (1938), 359-364

[2] E.Calabi, An extension of E.Hopf's maximum principle with an application to Riemannian geometry, Duke Math. J., 25 (1958), 45-56

[3] J.Carlson, P.Griffithe, A defect relation for equidimensional holomorphic mappings between algebraic varieties, 95 (1972), 557-584

[4] S.S.Chern, On holomorphic mappings of Hermitian manifolds of the same dimension, Proc. Symp.

Pure Math, 11 (1968), 157-170

[5] H.Grauert, H.Reckziegel, Hermitesche Metriken und normale Familien holomorpher Abbildungen, Math. Zeit., 89 (1965), 108-125

[6] R.E,Greene, H.Wu, Function theory on manifolds which possess a pole, Springer Verlag, Lecture Notes in Math., 699 (1979)

[7] P.Griffiths, J.King, Nevanlinna theory and holomorphic mappings between algebraic varieties, Acta Math., 130 (1973), 145-220

[8] S.Kobayashi, Distance, holomorphic mappings and the Schwarz lemma, J.Math.Soc.Japan, 19 (1967), 481-485

[9] S.Kobayashi, Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings, An Introduction (Second Edition), World Scientific Publ., 2005

[10] P.Li, R.Schoen, L^p and mean value properties of subharmonic functions on Riemmanian manifolds, Acta Math., 153 (1984), 279-301

[11] P.Li, S.T.Yau, Curvature and holomorphic mappings of complete Kähler manifolds, Comp. Math., 73 (1990), 125-144

[12] V.C.Lu, Holomorphic mappings of complex manifolds, J. Differential Geometry 2 (1966), 299-312

[13] H.Omori, Isometric immersions of Riemannian manifolds, J. Math. Soc. Japan 19 (1967), 205-214

[14] K.Takegoshi, A volume estimate for strong subharmonicity and maximum principle on complete Riemannian manifols, Nagoya Math.J., 151 (1998), 25-36

[15] K.Takegoshi, A priori upper bounds of solutions satisfying a certain differential inequality on complete manifolds, Osaka J. Math., 43 (2006), 791-806

[16] S.T.Yau, Harmonic functions on complete Riemannian manifolds, Comm. Pure and Appl. Math., 28 (1975), 201-228

[17] S.T. Yau, A general Schwarz lemma for Kähler manifolds, Amer. J. Math., Vol.100 (1978), 197-203