# Kähler商空間G/Hに対する超対称非線形表現Lagrangian

九後 太一
京都産業大学 理学部/益川塾
15th Oka Symposium, Dec. 3-4, 2016
@奈良女子大学理学部数学教室

1

## 世界はComplex

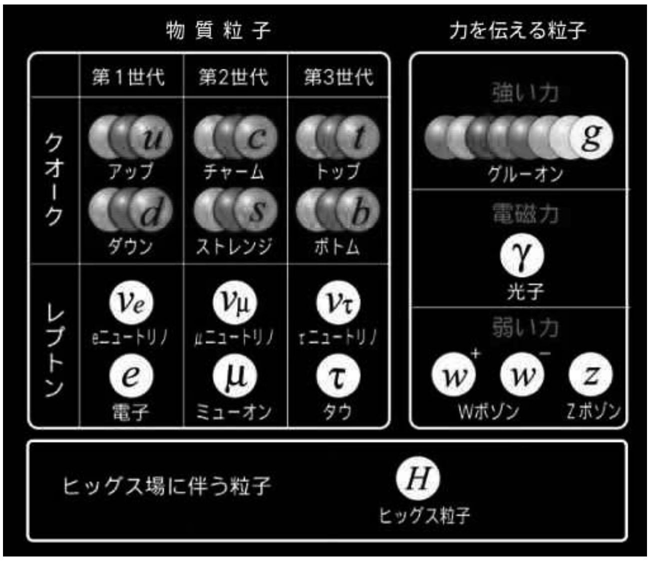
- 標準模型の明らかにしたこと:

1. 自然界の全ての相互作用（強・弱・電磁・重力）は
   ゲージ相互作用　(local gauge invariance)
   SU(3)×SU(2)×U(1) ×Poincare群

2. 基本粒子（物質場）は複素表現
   Complex repr.（= カイラル in 物理）

2

# 基本粒子=場




- 実は、クォーク・レプトンは、

  Right-handed 成分

  と

  Left-handed 成分

  が別表現

  under

  $SU(3)_c \times SU(2)_W \times U(1)_Y$

KEKハイライトページより https://www.kek.jp/ja/NewsRoom/Highlights/20120727150000/

3

# Dirac場はLorentz群の可約表現

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_{L\alpha} \\ \psi_R{}^{\dot\alpha} \end{pmatrix} \qquad \gamma_5 = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

カイラリティ

$$\psi_L = \frac{1-\gamma_5}{2}\psi \qquad 2 \text{ of } SL(2,C)$$

$$\psi_R = \frac{1+\gamma_5}{2}\psi \qquad 2^* \text{ of } SL(2,C)$$

C変換

Charge Conjugation:

$$\psi_R{}^{\dot\alpha} \to \epsilon_{\alpha\beta}\left(\psi_R{}^{\dot\alpha}\right)^* \equiv \psi^c{}_{L\alpha}$$

すべてL-基底に直せる

4

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L : \ (\mathbf{3},\mathbf{2})_{\frac{1}{6}}$$

$(SU(3)_c,\ SU(2)_W)_Y$

$$\begin{aligned} u_R &: \ (\mathbf{3},\mathbf{1})_{+\frac{2}{3}} \\ d_R &: \ (\mathbf{3},\mathbf{1})_{-\frac{1}{3}} \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} u_L^c &: \ (\mathbf{3}^*,\mathbf{1})_{-\frac{2}{3}} \\ d_L^c &: \ (\mathbf{3}^*,\mathbf{1})_{+\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

5

# 一世代分の物質場

Quark: $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L : \ (\mathbf{3},\mathbf{2})_{\frac{1}{6}}$ $\quad u_L^c : \ (\mathbf{3}^*,\mathbf{1})_{-\frac{2}{3}}$, $\quad d_L^c : \ (\mathbf{3}^*,\mathbf{1})_{+\frac{1}{3}}$

Lepton: $\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L : \ (\mathbf{1},\mathbf{2})_{-\frac{1}{2}}$ $\quad e_L^c : \ (\mathbf{1},\mathbf{1})_{+1}$, $\quad \left(\nu_{eR} : \ (\mathbf{1},\mathbf{1})_0\right)$

$SU(3)_c \times SU(2)_W \times U(1)_Y$ のComplex表現

6

# 大統一理論では

SU(5)

$$\left.\begin{array}{l} d_L^{\mathrm{c}} : \ (\mathbf{3}^*, \mathbf{1})_{+\frac{1}{3}} \\ \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L : \ (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-\frac{1}{2}} \end{array}\right] \longrightarrow \psi_i = \begin{pmatrix} d^{\mathrm{c}} \\ e \\ -\nu_e \end{pmatrix}_L \ : \ \mathbf{5}^*$$

+

$$\left.\begin{array}{l} u_L^{\mathrm{c}} : \ (\mathbf{3}^*, \mathbf{1})_{-\frac{2}{3}} \\ \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L : \ (\mathbf{3}, \mathbf{2})_{\frac{1}{6}} \\ e_L^{\mathrm{c}} : \ (\mathbf{1}, \mathbf{1})_{+1} \end{array}\right] \longrightarrow \psi^{[ij]} : \quad \mathbf{10}$$

7

# SO(10), $E_6$ , …

- SO(10) ⊃SU(5)
  spinor 16 = 10+5*+1
- $E_6$ ⊃ SO(10) ⊃SU(5)
  27= 16 + 10 +1 = (10+5*+1)+(5+5*)+1

- Note: $E_7$, $E_8$ は、実表現のみ（複素表現を持たない）

8

# 大統一群と例外群: $E_n$

$E_7$ 133

↓

$E_6$ 78

↓

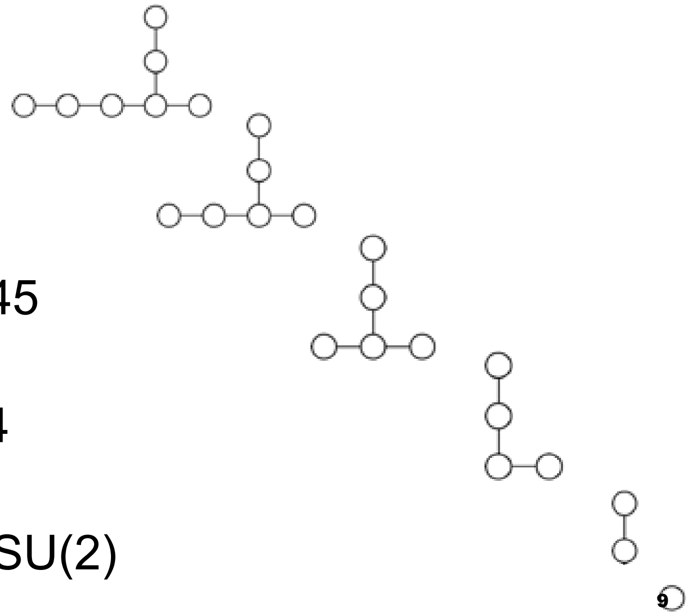
$E_5$ = SO(10) 45

↓

$E_4$ = SU(5) 24

↓

$E_3$ = SU(3)×SU(2)



9

# 世代の起源へ

- Globalな対称性Gが部分群Hへ自発的に破れる:G → H と、破れた生成子G/Hに対応する massless 南部-Goldstoneボソン(spin0)が現れる。
- もしSUSY(超対称性)があれば、NGボソンは、Quasi-NG fermion と呼ばれるmassless (spin 1/2) フェルミオン相棒を伴う。— NG chiral超多重項 (Buchmüller-Peccei-Yanagida'87, Ong'83 )
- Kugo-Yanagida 1984

3世代　from $E_7$/SU(5)×SU(3)×U(1)

10

## $E_7 \to SU(5)\times SU(3)\times U(1)$の自発的破れで現れる NG chiral multiplets

$E_7 \to SU(5)\times SU(3)\times U(1)$ $(SU(5), SU(3))_{U(1)}$

$$133 = (24 + 8 + 1) \quad \leftarrow \text{ unbroken generators}$$
$$\left.\begin{array}{l} + (10, 3^*)_1+(5^*,3)_2+(5,1)_3 \\ + (10^*, 3)_{-1}+(5, 3^*)_{-2}+(5,1)_{-3} \end{array}\right\rangle \text{c.c.}$$

Three generations 3×(10+5*) + 5 + singlet ！
実NGボソンは破れた生成子の個数 50×2個（c.c.の両方）だけ現れるが、NG chiral superfieldsは片一方のみ!

Chiral superfield ～複素数

11

## これからのstory

- SUSY理論の複素構造：Kähler 多様体
- G→H に伴うNGボソンのLagrangian: 非線形表現 based on coset G/H ←CWZ理論
- SUSY理論での非線形表現：G/Hが等質Kähler多様体の場合 ←BKMU理論
- BKMU Kähler potential の完全性

12

# 1 SUSY理論の複素構造:Supersymmetry, Superspace

**Superalgebra:**

$$\boxed{\{Q_\alpha,\, \bar{Q}_{\dot\beta}\} = 2i(\sigma_\mu)_{\alpha\dot\beta}P^\mu}$$

where $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$

**Superspace:** $\boxed{(x^\mu, \theta_\alpha, \bar\theta^{\dot\alpha}) \qquad \mu = 0,1,2,3, \quad \alpha, \dot\alpha = 1,2}$

$\theta_\alpha, \bar\theta^{\dot\alpha}$: Grassmann SL(2,C) L and R spinors

$$\xi^\mu P_\mu \;:\; x^\mu \;\to\; x^\mu + \xi^\mu$$

$$\varepsilon^\alpha Q_\alpha + \bar\varepsilon_{\dot\alpha}\bar{Q}^{\dot\alpha} \;:\; \begin{cases} \theta^\alpha \;\to\; \theta^\alpha + \varepsilon^\alpha \\ \bar\theta_{\dot\alpha} \;\to\; \bar\theta_{\dot\alpha} + \bar\varepsilon_{\dot\alpha} \\ x^\mu \;\to\; x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar\varepsilon - i\varepsilon\sigma^\mu\bar\theta \end{cases}$$



$$\text{並進、SUSY変換}: \begin{cases} P_\mu \;=\; \dfrac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu \\ Q_\alpha \;=\; \dfrac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\bar\theta^{\dot\beta}\partial_\mu \\ \bar{Q}_{\dot\alpha} \;=\; -\dfrac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}} + i\theta^\beta(\sigma^\mu)_{\beta\dot\alpha}\partial_\mu \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \text{共変微分}: \begin{cases} D_\alpha \;=\; \dfrac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\bar\theta^{\dot\beta}\partial_\mu \\ \bar{D}_{\dot\alpha} \;=\; -\dfrac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}} - i\theta^\beta(\sigma^\mu)_{\beta\dot\alpha}\partial_\mu \end{cases}$$

which are **anticommutative** with $Q$ and $\bar{Q}$: $\{D, Q\} = \{\bar{D}, Q\} = \{D, \bar{Q}\} = \{\bar{D}, \bar{Q}\} = 0$. すなわち、$\Phi(x, \theta, \bar\theta)$がsuperfieldなら$D_\alpha\Phi$や$\bar{D}_{\dot\alpha}\Phi$もsuperfields：

$$\delta_Q(\varepsilon)\Phi = (\varepsilon Q + \bar\varepsilon\bar{Q})\Phi \quad \to \quad \delta_Q(\varepsilon)\bar{D}_{\dot\alpha}\Phi = (\varepsilon Q + \bar\varepsilon\bar{Q})\bar{D}_{\dot\alpha}\Phi$$

$$\boxed{\text{Chiral superfield } \phi(x,\theta,\bar\theta) \quad \leftrightarrow \quad \text{Complex variable}}$$

**Chiral superfield** $\phi(x,\theta,\bar\theta)$: defined by $\bar D_{\dot\alpha}\phi(x,\theta,\bar\theta) = 0$
$\rightarrow$ 本質的には$\bar\theta$-independent で complex: Noting

$$\bar D_{\dot\alpha} y^\mu = \bar D_{\dot\alpha}\theta = 0, \qquad \text{for } \; y^\mu \equiv x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar\theta$$

we see ( $\varphi(x)$: complex scalar field )

$$\boxed{\phi(x,\theta,\bar\theta) = \varphi(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta^2 F(y)}$$
$$= \varphi(x) + i(\theta\sigma^\mu\bar\theta)\partial_\mu\varphi(x) + \frac{1}{4}\theta^2\bar\theta^2\Box\varphi(x)$$
$$+ \sqrt{2}\theta\psi(y) - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta^2\partial_\mu\psi(x)\sigma^\mu\bar\theta + \theta^2 F(y)$$

. その複素共役は **anti-chiral superfield** $\bar\phi(x,\theta,\bar\theta)$: $D_\alpha\bar\phi = 0$

$$\bar\phi(x,\theta,\bar\theta) = \varphi^*(y^*) + \sqrt{2}\bar\theta\bar\psi(y^*) + \bar\theta^2 F^*(y^*) \quad \text{with} \;\; y^{*\mu} \equiv x^\mu - i\theta\sigma^\mu\bar\theta$$



**SUSY invariant action**: for arbitrary functions $K(z,z^*)$ and $W(z)$,

$$\boxed{\int d^4x \int d^2\theta d^2\bar\theta \; K(\phi,\bar\phi), \qquad \int d^4x \Big( \int d^2\theta \, W(\phi) + c.c. \Big)}$$

($\because$ SUSY 変換$Q,\bar Q$は、$\theta$の次数を上げる部分は、$\partial_\mu$に比例)
The simplest kinetic term:

$$\int d^2\theta d^2\bar\theta \; \phi\bar\phi = -\partial^\mu\varphi\cdot\partial_\mu\varphi^* - i\psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar\psi + FF^* + (\text{t.d.})$$

Generally,

$$\int d^2\theta d^2\bar\theta \; K(\phi,\bar\phi) = g_{ij^*}(\varphi,\varphi^*)\left(-\partial^\mu\varphi^i\cdot\partial_\mu\varphi^{j*} - i\psi^i\sigma^\mu\partial_\mu\bar\psi^{j^*}\right) + \cdots$$

where

$$g_{ij^*}(\varphi,\varphi^*) = \frac{\partial^2 K(\varphi,\varphi^*)}{\partial\varphi^i\,\partial\varphi^{*j}} \tag{1}$$

SUSY theory lives in **Kähler manifold** with complex coordinates $\varphi^i$ !

1) $g_{ij}(\varphi,\varphi^*) = g_{i^*j^*}(\varphi,\varphi^*) = 0$ (hermitian manifold)

2) fundamental 2-form $\Omega \equiv \dfrac{1}{2} g_{ij^*}\, d\varphi^i \wedge d\varphi^{j*}$ is closed :

$$d\Omega = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial g_{ij^*}}{\partial \varphi^k} = \frac{\partial g_{kj^*}}{\partial \varphi^i} \quad \text{and} \quad \frac{\partial g_{ij^*}}{\partial \varphi^{*k}} = \frac{\partial g_{ik^*}}{\partial \varphi^{*j}}\ .$$

## 2 Coleman-Wess-Zumino Nonlinear Realization

*Coleman, Wess and Zumino, Phys.Rev. 177(1969)2239*
*Callan, Coleman, Wess and Zumino, Phys.Rev. 177(1969)2247*
Globalな対称性$G$が部分群$H$に自発的に破れた場合:

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{G} = \{ & S_A \in \mathcal{H}, & X_I \in \mathcal{G}-\mathcal{H} & \} \\ & \uparrow & \uparrow & \\ & \text{unbroken} & \text{broken generators} & \end{array}$$

generatorsは皆、基本表現における*anti-hermitian*行列としておく

$$\mathrm{tr}\,(S_A S_B) = \delta_{AB}, \quad \mathrm{tr}\,(X_I X_J) = \delta_{IJ}, \quad \mathrm{tr}\,(S_A X_I) = 0 \qquad (2)$$

massless NG（南部-Goldstone）ボソンは、対称性の破れた生成子$X_I$と同じ数だけ現れる。ので、NGボソンは実数スカラー場$\pi^I(x)$でラベル



出来る。そのLagrangian密度は一般にNonlinear sigma modelと呼ばれ

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{IJ}(\pi) \partial^\mu \pi^I\, \partial_\mu \pi^J$$

と書かれる。$G$-不変性の要求からこのLagrangianを決めたい。対称性$H$は線形に表現されているが、それ以外の$G$の対称性は非線形に実現されているので、**Nonlinear Realization** と呼ばれる。

CWZ のbasic variables: $\in$ right coset $G/H$:

$$U(\pi) = e^{\pi\cdot X}, \qquad \pi\cdot X \equiv \pi^I(x) X_I$$

$G$-変換則：

$$g \in G \text{ に対し } \quad gU(\pi) = U(\pi')h(\pi,g), \quad h(\pi,g) \in H,$$

This defines the non-linear $G$-transformation: $\pi \ \rightarrow\ \pi'$

$$U(\pi) \quad \rightarrow \quad U(\pi') = gU(\pi)h^{-1}(\pi,g)$$

Now try to find Invariant metric and Lagrangian under this transformation.

Maurer-Cartan 1-form:

$$\omega(\pi) = U^{-1}(\pi)dU(\pi) = \omega^I(\pi)X_I + \omega^A(\pi)S_A \in \mathcal{G}$$

which transforms

$$\begin{aligned}\omega(\pi') &= U^{-1}(\pi')dU(\pi') = h(\pi,g)U^{-1}(\pi)g^{-1}\,d\Big(gU(\pi)h^{-1}(\pi,g)\Big)\\ &= h(\pi,g)\omega(\pi)h^{-1}(\pi,g) + h(\pi,g)\,dh^{-1}(\pi,g)\end{aligned}$$

Since $hdh^{-1} \in \mathcal{H}$, the broken generator part transforms homogeneously:

$$\omega^I(\pi')X_I = h(\pi,g)\omega^I(\pi)X_I h^{-1}(\pi,g)$$

Generally, $\{\omega^I(\pi)\}$ splits into some $H$-irreducible subsets: Then, since

$$\mathrm{tr}\,(\sum_{I\in<I_0>}\omega^I(\pi)X_I)^2 = \sum_{I\in<I_0>}\omega^I(\pi)\omega^I(\pi) \tag{3}$$

($<I_0>$ は　代表ラベル $I_0$ の $X_{I_0}$ の属する $H$-既約な subset) is clearly $G$-invariant, general $G$-invariant metric is given by

$$ds^2 = \frac{1}{2}g_{IJ}(\pi)d\pi^I d\pi^J = \frac{1}{2}\sum_I x_{<I>}\omega^I(\pi)\omega^I(\pi) \tag{4}$$

where coefficients $x_{<I>}$ are constant on each $H$-irreducible pieces.



## 3 G/H: Kähler manifold case

| 実場 | | 半分の複素場 |
|---|---|---|
| $\{\pi^I\}$ | $\longrightarrow$ | $\{\varphi^i\}$ |
| $\{X_I\} = \{X_i^1, X_i^2\}$ | | $\{X_i\}$ |

complex generators $\quad X_i = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \qquad \bar{X}_i = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

anti-hermitian generators $\quad X_i^1 = i(X_i + \bar{X}_{i^*}) = \begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix} \sim i\sigma_1$

$$X_i^2 = X_i - \bar{X}_{i^*} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \sim -i\sigma_2$$

# 4 Bando-Kuramoto-Maskawa-Uehara Nonlinear Realization

*BKMU, Prog.Theor.Phys. 72(1984)313, ibid 72(1984)582*

$$X_I \in G/H \quad \to \quad \begin{cases} X_i & \text{Complex broken generators} \in G^{\mathrm{c}} \\ \bar{X}_{i^*} & \text{nilpotent matrix} \in G^{\mathrm{c}} \end{cases}$$

$$S_A \in H \quad \to \quad \begin{cases} S_a & \in \text{semi-simple part } H_{\mathrm{S.S.}} \\ iY_\alpha & \in \text{center of } H \end{cases}$$

Complex unbroken subgroup $\hat{H} = \{\bar{X}_{i^*},\ S_a,\ iY_\alpha\}$
NG complex coordinate $\varphi^i(x) \leftrightarrow\ \phi(x,\theta,\bar{\theta})$
BKMU's Basic variable

$$\xi(\varphi) = e^{\varphi^i X_i} \in G^{\mathrm{c}}/\hat{H}$$

$G$-変換則：

$$g \in G \text{ に対し} \quad g\xi(\varphi) = \xi(\varphi')\hat{h}(\varphi, g), \quad \hat{h}(\varphi, g) \in \hat{H}$$

This defines the non-linear $G$-transformation: $\varphi\ \to\ \varphi'$

$$\xi(\varphi) \quad \to \quad \xi(\varphi') = g\,\xi(\varphi)\,\hat{h}^{-1}(\varphi, g)$$



Now try to find Invariant metric and Lagrangian under this transformation.
BKMU 処方:

1) find $\hat{H}$ or a set $\{X_i\}$
2) find projection matrices $\eta_i$ s.t.
$\hat{H}\eta_i = \eta_i \hat{H}\eta_i, \qquad (\eta_i^2 = \eta_i,\ \eta_i^\dagger = \eta_i)$

Then, possible Kähler potential is given by

$$\boxed{K(\phi, \bar{\phi}) = \sum_i c_i \ln \det\nolimits_{\eta_i}(\xi^\dagger(\bar{\phi})\xi(\phi))}$$

Proof of Invariance:

$$\begin{aligned} &\ln \det\nolimits_\eta(\xi(\bar{\phi}')^\dagger \xi(\phi')) \\ &= \ln \det\nolimits_\eta\big(\eta \hat{h}^{-1\dagger}(\bar{\phi}, g)\xi^\dagger(\bar{\phi})g^\dagger\, g\xi(\phi)\,\hat{h}^{-1}(\phi, g)\eta\big) \\ &= \ln \det\nolimits_\eta\big(\eta \hat{h}^{-1\dagger}(\bar{\phi}, g)\eta \cdot \eta\xi^\dagger(\bar{\phi})\xi(\phi)\eta \cdot \eta\hat{h}^{-1}(\phi, g)\eta\big) \\ &= \ln \det\nolimits_\eta(\hat{h}^{-1\dagger}(\bar{\phi}, g)) + \ln \det\nolimits_\eta(\xi^\dagger(\bar{\phi})\xi(\phi)) + \ln \det\nolimits_\eta(\hat{h}^{-1}(\phi, g)) \end{aligned}$$

第1,3項は、(anti-)holomorphicなので$\int d^2\theta d^2\bar{\theta}\, F(\phi) = 0$、よって
$\int d^2\theta d^2\bar{\theta}\, K(\phi, \bar{\phi})$は不変。

## 5 BKMU's potentialの完全性

*K.Itoh, T.Kugo and H.Kunitomo, Nucl.Phys. B263 (1986),295.*

| | | |
|---|---|---|
| 1) | how to find the set $\{X_i\}$ $\rightarrow$ invariant complex structure | |
| 2) | how to find $\eta_i$ $\rightarrow$ # of free parameters in $K(\phi,\bar{\phi})$ | |
| 3) | Complete? | |

定理 [Borel]:

Let $G$ be compact and semisimple. Then,
$G/H$ : Kählerian $\Leftrightarrow$ $H$ is a centralizer of a torus

*A. Borel, Proc. Natl.Acad.Sci.* **40** *(1954) 1147;*
*A. Borel and F. Hirzebruch, American J. Math.* **80** *(1958) 458.*

Torus $= U(1)^k$ $\rightarrow$ $\exists \boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_k)$ .

$H$: centralizer $\rightarrow$ $H$ がTorusと可換なmaximal subgroup in $G$

物理屋の言い方では、$\boldsymbol{Y}$-charge が0のgenerators は $S_A \in H$ が全てで、他のbroken generators $X_I \in G/H$ は、必ずnon-zero chargeを持つ



上の1）の問題「$\{X_i\}$の選び方」に対しての答え:
$X_I$ $\rightarrow$ $(X_i,\ \bar{X}_{i^*})$ への分解の仕方は、

$$\begin{array}{cc} \{\ X_i, & \bar{X}_{i^*}\ \} \\ \uparrow & \uparrow \\ \text{negative} & \text{positive } \boldsymbol{Y}\text{-charge} \end{array}$$

positive, negative は、roots の場合と同様、$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_k)$ chargesの順序の取り方による

$\rightarrow$ $\boxed{\text{異なるcomplex strucure の入れ方の数} = \text{orderingの取り方の数}}$

上の2）の問題「$\eta_i$の見つけ方」に対しての答え:
表現空間のbase vector を$H$-既約部分空間に分解：

$$\psi = \begin{array}{c} \boldsymbol{y}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_r \end{array} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_r \end{pmatrix}$$

各$H$-既約空間のベクトルは同じ$\boldsymbol{Y}$-chargeの値 $\boldsymbol{y}_i$ を持

ち、$\boldsymbol{y}_1 > \boldsymbol{y}_2 > \cdots > \boldsymbol{y}_r$ の順に並べれば、

$$\forall \eta_i = \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

の形の projection $\eta_i$ は、$\hat{H}\eta_i = \eta_i \hat{H} \eta_i$ を満たす。$\hat{H}$ の generators

$$\hat{\mathcal{H}} = \{\bar{X}_{i^*}, S_a, iY_\alpha\}$$

のうち、$\bar{X}_{i^*}$ は $\boldsymbol{Y}$-charge の値を増やし、$S_a, Y_\alpha$ は変化させないから。



## 最後に完全性について

Key observation:
Kähler $G/H$ は，BKMU variable でも CWZ variable でも記述可。

$$\begin{array}{rcl} \text{BKMU variable}: \quad \xi(\varphi) & = & e^{\varphi^i X_i} \\ \updownarrow & & \\ \text{CWZ variable}: U(\varphi, \varphi^*) & = & e^{\varphi^i X_i} \, e^{a^{i^*} \bar{X}_{i^*}} e^{b^a S_a} e^{i c^\alpha Y_\alpha} \\ & = & \xi(\varphi) \cdot e^{a \cdot \bar{X}} e^{b \cdot S} e^{i c \cdot Y} \end{array} \tag{6}$$

$U^\dagger U = 1$（および$b$, $c$：純虚数）を要求すると、$a(\varphi,\varphi^*), b(\varphi,\varphi^*), c(\varphi,\varphi^*)$ は、$(\varphi,\varphi^*)$ の関数として unique に決まる。

また、BKMU と CWZ の $G$-変換則を比較すると、

$$c_\alpha(\varphi', \varphi'^*) = c_\alpha(\varphi, \varphi^*) + \frac{1}{2}\Big(\gamma_\alpha(\varphi, g) - \gamma^*_\alpha(\varphi^*, g)\Big)$$

ただし、$\gamma_\alpha(\varphi, g)$ は、BKM変換則の $\hat{h}(\varphi, g) = e^{\alpha \cdot \bar{X}} e^{\beta \cdot S} e^{i\gamma \cdot Y}$ の最後の因子。

この式は、$c_\alpha(\varphi,\varphi^*)$ が Kähler potential の候補関数であることを示している。しかも、実は、BKMU の公式

$$\ln \det_{\eta_i}(\xi^\dagger(\bar{\phi})\xi(\phi))$$

で計算されるものが、この$c_\alpha(\varphi,\varphi^*)$の線形結合であることが(6)の式からすぐわかる。また、一つの表現で可能な$\eta_i$を全てとれば、$k$個全ての$c_\alpha(\varphi,\varphi^*)$を取り出すことが出来ることがわかる。

Maurer-Cartan 1-form を(6)式のparametrization の$U$を使って計算すれば、

$$\begin{aligned} \omega = U^{-1}dU &= \omega^i X_i + \omega^{i^*}\bar{X}_{i^*} + \omega^a S_a + i\omega^\alpha Y_\alpha \\ \omega^i &\propto d\varphi, \qquad \omega^{i^*} \propto d\varphi^* \end{aligned} \tag{7}$$

となり、

命題1：

最も一般的な$G$-不変なmetricのfundamental 2-formは

$$\Omega = g_{ij^*}(\varphi,\varphi^*)d\varphi^i \wedge d\varphi^{*j} = \sum_i x_{<i>}\omega^i \wedge \omega^{*i}$$

で与えられる。ただし、係数$x_{<i>}$は、$H$-既約成分上では定数.



命題2：

$\Omega$がclosed $d\Omega=0$のためには,$x_{<i>}$は

$$x_{<i>} + x_{<j>} = x_{<k>} \qquad \text{for} \ \ \forall i,j,k \ \ \text{with} \ \ f_{ij}{}^k \neq 0$$

を満たすことが必要十分.

この性質は$x_{<i>}$が、roots $\boldsymbol{\alpha}_i$のlinear mappingを与えることを示しており、従って、双対ベクトル$\forall\boldsymbol{v}$が存在して、$x_{<i>} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\alpha}$である。Cartan generators $\boldsymbol{H}$の線形結合のcharge $Y \equiv \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{H}$ を定義すれば、$x_{<i>}$は、broken generator $X_i$の$Y$-charge である：$[Y, X_i] = x_{<i>}X_i$. しかし、$x_{<i>}$は$H$-既約セクター上で定数だから、$Y$は$H$のcenterにはいっており、$Y_\alpha(\alpha = 1,\cdots,k)$の線形結合で書けている。したがって

命題3：

$G$-不変 closed fundamental 2-form $\Omega$を与える係数$x_{<i>}$は, generator $X_i$の持つ，ある$H$のcentral charge $\exists Y = \sum_\alpha v_\alpha Y_\alpha = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{Y}$の値の(マイナス)である：$[Y, X_i] = -x_{<i>}X_i$

（マイナス符号を入れたのは、$X_i$ が負の $Y$-チャージを持つという規約とあわせるため。）

定理：

central charge $Y = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{Y}$ に対応する $G$-不変 計量 $g_{ij^*}(\varphi,\varphi^*)$ を与える Kähler potential は

$$K(\varphi,\varphi^*) = 2i\sum_\alpha v_\alpha c_\alpha(\varphi,\varphi^*) \equiv 2ic(\varphi,\varphi^*)$$

Proof)

$$[Y,X_i] = -x_{<i>}X_i,\quad [Y,\bar{X}_i] = x_{<i>}\bar{X}_i \quad \text{ゆえ}$$
$$[Y,\omega] = -x_{<i>}\big(\omega^i X_i - \omega^{i^*}\bar{X}_{i^*}\big) \quad\to\quad \mathrm{tr}\,\big([Y,\omega]\wedge\omega\big) = -2x_{<i>}\omega^i\wedge\omega^{i^*}$$
$$\therefore\ \Omega = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\big([Y,\omega]\wedge\omega\big) = -\mathrm{tr}\,\big(Y\omega\wedge\omega\big) = d\,\mathrm{tr}\,\big(Y\omega\big) \quad (\because\ d\omega = -\omega\wedge\omega)$$
$$\omega = U^{-1}dU = U^{-1}d_\varphi U + U^{-1}d_{\varphi^*}U$$

第２項の $d_{\varphi^*}$ の方から評価。$U = \xi(\varphi)\,e^{a\cdot\bar{X}}e^{b\cdot S}e^{ic\cdot Y}$ を代入して、$\xi(\varphi)$ は



$\varphi^*$ に依らないので

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\,\big(YU^{-1}d_{\varphi^*}U\big) &= \mathrm{tr}\,\big(Ye^{-ic\cdot Y}e^{-b\cdot S}e^{-a\cdot\bar{X}}\,d_{\varphi^*}\big(e^{a\cdot\bar{X}}e^{b\cdot S}\big)e^{ic\cdot Y}\big)\\ &\quad+\mathrm{tr}\,(Y\,Y_\alpha)id_{\varphi^*}c_\alpha \qquad (\text{use }\ \mathrm{tr}\,(Y\,Y_\alpha) = v_\alpha)\\ &= \mathrm{tr}\,\big(Ye^{-b\cdot S}e^{-a\cdot\bar{X}}\,d_{\varphi^*}\big(e^{a\cdot\bar{X}}e^{b\cdot S}\big)\big) + id_{\varphi^*}(v_\alpha c_\alpha)\end{aligned}$$

第１項は、$d_{\varphi^*}$ 微分が $\bar{X}$ や $S$ 比例項を出すので、$Y$ と直交して tr は０。

$d_\varphi$ 項に対しては、$U^{-1}d_\varphi U = U^\dagger d_\varphi U^{\dagger-1}$ を用いれば、また $\xi(\varphi)$ 部分が効かない計算が出来て

$$\mathrm{tr}\,\big(Y\,U^{-1}d_\varphi U\big) = -id_\varphi(v_\alpha c_\alpha)$$

したがって、

$$\begin{aligned}\Omega &= -id(d_\varphi - d_{\varphi^*})(v_\alpha c_\alpha)\\ &= 2id_\varphi d_{\varphi^*}c(\varphi,\varphi^*)\\ &= \frac{\partial^2(2ic(\varphi,\varphi^*))}{\partial\varphi^i\partial\varphi^{*j}}d\varphi^i d\varphi^{*j}\end{aligned}$$

Implying

$$g_{ij^*}(\varphi,\varphi^*) = \frac{\partial^2(2ic(\varphi,\varphi^*))}{\partial\varphi^i\partial\varphi^{*j}} \qquad\qquad q.e.d.$$

講演では触れられなかったが、命題1〜3および定理の意味するところから、結局、$Y$-チャージ$Y = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{Y}$を指定する$k$成分ベクトル$\boldsymbol{v} = (v_1, \cdots, v_k)$の取り方が、複素構造（複素座標の選び方）自体からKählerポテンシャルまで、全てを一意的に決定していることがわかる。

実際、ベクトル$\boldsymbol{v} = (v_1, \cdots, v_k)$を与えれば、先ず$Y$-チャージ$Y = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{Y}$が指定され、次にbroken generators $\{ X_I \}$の中から、その$Y$-固有値が負の生成子をcomplex broken generators $\{ X_i \}$に選べば良い。そうすると、$[Y, X_i] = -x_{<i>} X_i$で決まる値$x_{<i>}$は全て正（で、$H$-既約成分上で定数）であり、命題1のfundamental 2-form $\Omega = \sum_i x_{<i>} \omega^i \wedge \omega^{*i}$の与える計量$g_{ij^*}$は正定値である。また、この計量を与えるKählerポテンシャルが、$K = \sum_\alpha v_\alpha c_\alpha(\varphi, \varphi^*)$となる。

標語的に言えば、ベクトル$\boldsymbol{v}$の向きが複素座標のセットを決め、$\boldsymbol{v}$の大きさが計量の係数の大きさを決める。

$X_i$の$\boldsymbol{Y} = (Y_1, \cdots, Y_k)$チャージの値を$\boldsymbol{y}_i$とすれば、上の係数$x_{<i>}$は、$\boldsymbol{Y}_i$チャージベクトル$\boldsymbol{y}_i$の$\boldsymbol{v}$方向への射影$x_{<i>} = \boldsymbol{y}_i \cdot \boldsymbol{v}$で与えられる。$\boldsymbol{v}$の方向を連続的に変えていって、$x_{<i>} = \boldsymbol{y}_i \cdot \boldsymbol{v}$がだんだん小さくなって、遂に0を切って負になったとすると、計量が正定値でなくなることを意



味する。が、この場合、broken generator $X_i$の$Y$チャージ$-\boldsymbol{y}_i \cdot \boldsymbol{v}$が正になることを意味するので、最早$X_i$は（$Y$チャージ負の条件で選ばれる）complex broken generatorではなく、今まで$\bar{X}_{i^*}$と呼んでいたgeneratorと入れ替えねばならないことを意味する。このcomplex座標の入れ替えを行えば、計量は再び正定値となる。したがって、異なる複素構造の境界は、ある$X_i$の$\boldsymbol{Y}$チャージ$\boldsymbol{y}_i$が$\boldsymbol{v}$と直交するという条件で指定される。

Example: *K.Itoh, T.Kugo and H.Kunitomo, Prog.Theor.Phys. 75 (1986),386.*
**Grassmann mfd** $G/H = SU(l+m+n)/S[U(l)\times U(m)\times U(n)]$
Two central charges ($k=2$):

$$Y_1 = \begin{array}{c} \\ l \\ m \\ n \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} l & m & n \end{array} \\ \begin{pmatrix} n\mathbf{1}_l & & \\ & 0 & \\ & & -l\mathbf{1}_n \end{pmatrix} \end{array}, \qquad Y_2 = \begin{array}{c} \\ l \\ m \\ n \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} l & m & n \end{array} \\ \begin{pmatrix} m\mathbf{1}_l & & \\ & -(l+n)\mathbf{1}_m & \\ & & m\mathbf{1}_n \end{pmatrix} \end{array}.$$

The (real) unbroken and broken generators are

$$\begin{array}{c} \\ l \\ m \\ n \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} l & m & n \end{array} \\ \begin{pmatrix} SU(l) & & \\ & SU(m) & \\ & & SU(n) \end{pmatrix} \end{array} \in \mathcal{H}, \qquad \begin{array}{c} \\ l \\ m \\ n \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} l & m & n \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \bar{A} & \bar{B} \\ A & 0 & \bar{C} \\ B & C & 0 \end{pmatrix} \end{array} \in \mathcal{G}-\mathcal{H}.$$



vector in representation space:

$$\psi \;=\; \begin{array}{c} l \\ m \\ n \end{array}\!\!\begin{pmatrix} \psi_l \\ \psi_m \\ \psi_n \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{— } Y_1 = n \\ \text{— } Y_1 = 0 \qquad \uparrow \text{ larger} \\ \text{— } Y_1 = -\ell \end{array}$$

$Y = Y_1$ chargeと選んだときのprojection operators 二つ：

$$\eta_1 = \begin{array}{c} \\ l \\ m \\ n \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} l & m & n \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{1}_l & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \qquad \eta_2 = \begin{array}{c} \\ l \\ m \\ n \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} l & m & n \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{1}_l & & \\ & \mathbf{1}_m & \\ & & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

BKMU basic variable:

$$\xi(\phi) \;=\; e^{\phi^A A+\phi^B B+\phi^C C} \;=\; \begin{array}{c} \\ l \\ m \\ n \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} l & m & n \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \phi^A & \mathbf{1} & 0 \\ \phi'^B & \phi^C & \mathbf{1} \end{pmatrix} \end{array}$$

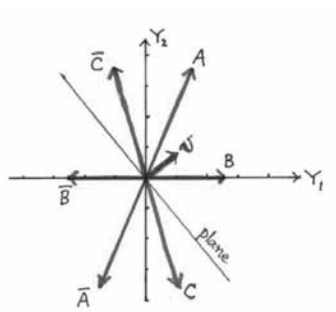
$$\phi'^B \equiv \phi^B + \phi^C\phi^A.$$

Then two independent Kähler potentials are

$$
\begin{aligned}
K_1 &= \ln \det{}_{\eta_1}(\xi^\dagger \xi) = \ln \det_{l\times l}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \bar\phi_A & \bar\phi'_B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\ \phi^A \\ \phi'^B\end{pmatrix}\right] \\
&= \ln \det_{l\times l}\left(\mathbf{1} + \bar\phi_A\phi^A + \bar\phi'_B\phi'^B\right) \\
K_2 &= \ln \det{}_{\eta_2}(\xi^\dagger \xi) = \ln \det_{(l+m)\times(l+m)}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \bar\phi_A & \bar\phi'_B \\ 0 & \mathbf{1} & \bar\phi_C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{1} & 0\\ \phi^A & \mathbf{1} \\ \phi'^B & \phi^C\end{pmatrix}\right] \\
&= \ln \det_{(l+m)\times(l+m)}\begin{pmatrix}\mathbf{1} + \bar\phi_A\phi^A + \bar\phi'_B\phi'^B & \bar\phi_A + \bar\phi'_B\phi^C \\ \phi^A + \bar\phi_C\phi'^B & \mathbf{1} + \bar\phi_C\phi^C\end{pmatrix} \\
&= K_1 + \ln \det_{m\times m}(\mathbf{1} + \bar\phi_C\phi^C) \\
&\quad + \ln \det_{m\times m}\Big(\mathbf{1} - (\mathbf{1} + \bar\phi_C\phi^C)^{-1}(\phi^A + \bar\phi_C\phi'^B)\times \\
&\qquad\qquad \times(\mathbf{1} + \bar\phi_A\phi^A + \bar\phi'_B\phi'^B)^{-1}(\bar\phi_A + \bar\phi'_B\phi^C)\Big)
\end{aligned}
$$



$k = 2$ であるこの Grassmann manifold の例では、$\boldsymbol{Y}$ チャージは 2 次元ベクトルであり簡単に図示できる。broken generators $\{A, B, C, \bar A, \bar B, \bar C\}$ の $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2)$ チャージをプロットすれば右図のようになる。$\boldsymbol{v}$ ベクトルを図のようにとれば、それに直交する面の $\boldsymbol{v}$ の反対側にある broken generators が、今の場合、$\{\bar B, \bar A, C\}$ が negative $Y = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{Y}$ チャージを持つ complex broken generators である。$\boldsymbol{v}$ の方向をまわして行くと、omplex broken generators のセットは、次に $\{\bar A, C, B\}$、次いで $\{C, B, A\}$、$\{B, A, \bar C\}$, $\{A, \bar C, \bar B\}$, $\{\bar C, \bar B, \bar A\}$、となる。これらが不変複素構造の全てであり、この図より $\{C, A, \bar B\}$ のセットは不可能であることが明白であることに注意したい。




最後に、筆者に岡シンポジウムで話す機会を与えて下さった松澤淳一氏と見目正克氏に感謝の意を表したいと思います。