巾零幾何・巾零解析の展開
-幾何と微分方程式に対する KLEIN-CARTAN プログラム-

森本　徹

はじめに

それぞれ固有の内容を持つ様々な幾何，様々な微分方程式が無数にあり，それらは互いに密接に関係し合いながら広大な世界を成している．Klein-Cartan プログラムをいわば縦糸にそして巾零の方法を横糸にしてその世界の曼荼羅を画きたいという思いをいつ頃からか持った．

幾何には内在的幾何と外在的幾何の違いがある．微分方程式系には線形と非線形の違いがあり，さらに有限型と無限型の区別がある．この区別は幾何にも伝播する．これらが縦横に関係し合う様を見止めたいのである．

これまで少しずつ積み重ねてきた構想を以下簡単に述べたい．

巾零の方法． 空間は微分可能多様体 M であるとすれば，空間の一点 x における空間の第一次近似はその点における接ベクトル空間 T_xM である．しかし空間がフィルター付き多様体 $(M, \mathfrak{f})$ であるとすれば，一点 x における空間の第一次近似は階数付き巾零 Lie 代数 $\mathrm{gr}\,\mathfrak{f}_x$ となる．フィルター $\mathfrak{f}$ が自明なときには，$(M, \mathfrak{f})$ は M に帰し，$\mathrm{gr}\,\mathfrak{f}_x$ は T_xM（自明な階数付けを持った可換 Lie 代数）に帰する．

フィルター付き多様体上の幾何構造，微分方程式をこの階数付き巾零 Lie 代数を元にして研究することを巾零幾何，巾零解析と呼んでいる．これは従来の研究の精密化であると同時に一般化である．空間のより精密な第一次近似に基づいているからであり，またフィルターが自明な場合として従来の研究を含んでいるからである．従ってこれまでより，より深い対象の理解とより有効な応用が期待されるのである．この巾零の見方は Élie Cartan に端を発し田中昇によってはっきりとした形を得たものであり，筆者もその発展に多少の寄与をしてきた．

1870 年春. ピタゴラス，ユークリッド以来の長い幾何の流れ，Newton，Leibniz からの微分法，Galois からの群論が一つに集まりそしてそこから新しい発展が始まったのは，1870 年の Paris においてであった．この年の春 Sophus Lie と Felix Klein はドイツから連れ立って Paris に遊学し，フランスの若い数学者 Gaston Darboux，Camille Jordan らと交流を持った．Galois が没して約 40 年 Jordan の新著 Traité des substitutions [18] はふたりに決定的な影響を与えた．Lie は群が幾何や微分方程式の研究においても重要な役割を演じるであろうことを見抜き直ちに連続変換群の理論の建設に取り掛かった．Klein は 1872 年有名

関孝和数学研究所，岡数学研究所．

な Erlangen Programm を発表し，射影幾何，Möbius 幾何，ユークリッド幾何，非ユークリッド幾何，接触幾何などそれまでに登場してきた様々な幾何を等質空間の幾何として群論的に統一的に捉え相互の関係を明らかにすることを提唱した．また Darboux は Monge 以来のフランスの伝統を継ぐ幾何解析の名人であった．

Cartan 20 世紀の始まり． Lie，Klein，Darboux の流れを受け，群を中心に幾何と微分方程式を統合的にそして自在に研究したのが Élie Cartan である．膨大な仕事を残し，20 世紀の微分幾何のほとんどが Cartan から流れ出ていると言っても過言ではない．晩年 jubilé で，1894 年から 1909 年 Montpellier, Lyon, Nancy とフランスの地方で過した 15 年間を「それは静寂の中の思索の歳月であり，私のその後の仕事の全てはこの時期の熟考の中にその芽を見出す」と回想している．実際，特に 1900 年から 10 年間の論文は圧巻である ([9])．

1900 年初頭，Cartan は，外微分形式の理論を発展させそれを駆使して，一つには幾何構造の一般同値問題を研究し "動標構の束" の方法を編み出した (動標構の方法は Euler の時代からあるが，Cartan の独創は動標構の束を考えたことである)．また一つには一般の偏微分方程式系を Pfaff 系を用いて研究し今日 Cartan-Kähler の定理として知られている包合系の理論を建てた．それらを基礎にして無限次元の連続変換群の研究を展開し，単純無限次元連続変換群を分類した．また 1910 年の論文 Les systèmes de Pfaff à cinq variables [6] では例外型単純 Lie 代数 G_2 と微分式系の幾何と微分方程式の織り成す玄妙な世界の扉を開いた．

Espace généralisé. 一般相対性理論の波を受けて 1922 年 Cartan は espace généralisé の考えを発表し幾何の新しい枠組を提唱した ([7])．今日 Cartan 接続を備えた空間あるいは Cartan 幾何と呼ばれるものである．その枠組は Klein 幾何を含むと同時に，それまで Klein 幾何の枠外に孤立していた Riemann 幾何をもその枠組に取り入れ，さらにユークリッド幾何の変形が Riemann 幾何であるように，射影幾何や Möbius 幾何などの Klein 幾何の変形をも自然にその枠組に取りいれるものである．さらにその枠組において Klein 幾何と同様に群が基本的な役割を演じるのである．Klein を遥かに超えた vaste synthèse を達成したと Cartan は誇らしげに述べている ([8])．しかし Cartan のこれらの論文はみな難解で同時代のどれだけの人がよく理解し得ただろうか．

第 2 次世界大戦後． ようやく Ehresmann らにより主ファイバー束，G-構造，接続など，Cartan が幾何学的直感に従って駆使した方法の多くが現代的な言葉に定式化されるようになる．

特に，Chern, 倉西，Spencer, Singer-Sternberg, Guillemin, Quillen, Goldschmidt らにより無限次元 Lie 擬群，幾何構造の一般同値問題，偏微分方程式系の形式理論などが現代的に定式化されるようになり，延長，Spencer コホモロジー群，包合系などの重要な概念が明らかになった (例えば [38] を参照)．

そしてCartanの動標構束の方法はG-構造の理論により一応の解釈を得るようになったが，理論の面においても幾何の具体的な問題への応用という面においても，まだ十分なものではなかった．

特に，Cartanの上述の1910年の論文における5変数空間でのPfaff式系（双対で言えば微分式系）の幾何，そしてそれに対するCartan接続の構成はG-構造の理論だけからではよく説明のつくものではなかった．

巾零幾何． 1960年代に入り田中は強擬凸CR構造に対してCartan接続を構成し([41])，続いて一般の微分式系の研究に進んだ．微分式系がブラケットによって空間を張るとき，微分式系の生成するフィルターが巾零Lie代数を定めることに着目し，それを元にした幾何構造の延長理論を展開し，巾零幾何の基礎を築いた([42])．1960年代の後半である．

また私は1970年代の終わりフランスに滞在中，幾何構造の同値問題に立ち返り，それがまだ理論として完成していないことを感じ，幾何構造を扱う自然でもっとも一般な枠組として高次の非可換枠束の概念を導入して，幾何構造の同値問題を解く一般的方法を与えた([25])．そしてその後その枠組を巾零幾何の枠組に拡張し，フィルター付き多様体上のタワーの幾何として，幾何構造を扱う一般的でかつ応用にも適した枠組を構築した([28])．その中にKlein幾何，Cartan幾何が自然に包摂され，G-構造や一般化されたG-構造は“切断された”タワーとして現われるのである．このようにして幾何構造の俯瞰図が得られ具体的な応用も見た．

巾零解析． フィルター付き多様体上の（無限小）変換群や幾何構造の研究において，ある特定のフィルターが代数的あるいは幾何学的な装いを持って現われ重要な役割を演じるが，実は，⟨⟨フィルター付き多様体上の微分作用素に対して重み付き次数というものが定義でき，代数的あるいは幾何学的なそれらのフィルターは微分作用素に対するその重み付き次数に由来している⟩⟩というこの事実に気付いたとき，新たな道が開け，フィルター付き多様体上の微分方程式系をこの重み付き次数を元にして系統的に研究すること一巾零解析一が始まった．出発となったのは，フィルター付き多様体$(M, \mathfrak{f})$とその上のフィルター付きベクトル束Eに対して定義されk階の重み付きジェット束$\mathcal{J}^{(k)}E$と呼ばれるものおよび次の完全列である：

$$0 \to \mathrm{Hom}(U(\mathrm{gr}\,\mathfrak{f}), \mathrm{gr}\,E)_k \to \mathcal{J}^{(k)}E \to \mathcal{J}^{(k-1)}E \to 0$$

ここでは階数付き巾零Lie代数$\mathrm{gr}\,\mathfrak{f}_x$およびその普遍展開環$U(\mathrm{gr}\,\mathfrak{f}_x)$が従来の理論の接ベクトル空間$T_xM$およびその対称テンソル積$Sym(T_xM)$に代わって中心的な役割を演じる．

この舞台装置ができると，フィルター付き多様体$(M, \mathfrak{f})$上の微分方程式系Rに対して形式解があるかどうかを調べる形式理論は通常の場合の自然な拡張として展開でき，形式解が存在するための判定条件として重み付き包合系の概念が定式化される([30])．

しかしながら，重み付き包合的な微分方程式系は，従来とは異なり特異点を許容しうるので，収束解（解析的な解）を持つことは一般に

期待できないのである．そこにおいてこれまでの Cartan-Kähler 理論と事情が大きく変わり，解析理論の困難が生じる．

幸運にも，いろいろ異なった分野の数学，特に，岡-Grauert- Malgrange の流れを持つ優近傍定理，subRiemann 幾何の指数写像に関する微妙な定理，解析幾何における Gabrièlov の深い定理との思いがけない出会いがあり，それらを経て，くっきりとした定理が得られた ([29])．すなわち，

重み付き包合的な微分方程式系に対して常に形式的 Gevrey 解が存在する．そしてフィルター付き多様体が Hörmander 条件を満たしていれば，形式 Gevrey 解は解析的な解になる．

これは Cartan-Kähler 定理の非自明な拡張であり，特異点を許容する微分方程式系の広い範囲のクラスに対しても解析的な解の存在が言えるのである．

微分方程式に対する Klein-Cartan プログラム． 微分方程式系は有限型と無限型に別れる．解空間の可能な次元が高々有限か無限かの違いである．有限型の微分方程式系はホロノミック系とも呼ばれる．上に述べた解析理論の難しさは無限型特有のことであり，有限型のときは本質的には常微分方程式に帰着し解析的な難しさは生じない．

しかしながら具体的な幾何の多くは幾何構造として有限型の微分方程式系と結びついている．有限次元 Lie 群，Riemann 幾何，共形幾何，射影幾何などすべての Cartan 幾何がそうである．従って有限型の微分方程式系に対する定理が幾何におもしろい応用をもたらすこともある．例えば，有限型の微分方程式系の解空間の次元が有限次元であることより，有限型の幾何構造の自己同型群は有限次元の Lie 群となることが導かれる．従来の見方では無限型であるものが，巾零という細かいフィルターを通してみることにより，重み付きの意味で有限型となることがあり，巾零のご利益が現われることも多い．subRiemann 幾何の自己同型群が有限次元の Lie 群となるという定理はその一例である ([32])．

微分方程式系が与えられたとき，有限型か無限型かを判定することは原理的には計算可能である．しかし実際には大抵実行不可能に近い．

では有限型の微分方程式系を出来るだけ沢山構成的に見出せないだろうか．あるいは有限型の微分方程式系はどれくらいあるのだろうか．あるいはもっと遡って微分方程式系は一体どれくらいあるのだろうか．

これは実に茫漠とした問いに見えるが，それと同じぐらい茫漠とした問 ⟨⟨ 幾何構造はどれくらいあるのだろうか ⟩⟩ という問にタワーの理論はある意味で答えて来ているのである．微分方程式系に対してもこのようなアプローチを進めたい．それが微分方程式に対する Klein-Cartan プログラムである．微分方程式系の Klein モデルを考えそれからの変形として，さらにそれらからの次々の合成によって一般の微分方程式系を捉えたいのである．

我々の考え [31] によれば，微分方程式系の Klein モデルは階数付き推移的 Lie 代数 $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}_p$ と階数付き $\mathfrak{g}$-加群 $V = \bigoplus V_q$ の組 $(\mathfrak{g}, V)$ である．有限型に限るならば $\mathfrak{g}, V$ はともに有限次元である．その中でも元素にあたるものは，$\mathfrak{g}$ が単純 Lie 代数で V はその既約表現となると

きである．またそれらの階数付けは $\mathfrak{g}$ の放物型部分 Lie 代数を指定することによって与えられる．各 $(\mathfrak{g}, V)$ に対して典型的な微分方程式系が存在し，この型を持つ微分方程式系の族 $\mathcal{D}(\mathfrak{g}, V)$ が決まるのである．様々な $(\mathfrak{g}, V)$ について $\mathcal{D}(\mathfrak{g}, V)$ を研究しそれら相互の関係も調べようというのがこのプログラムの目指すところである．

有限型の線形微分方程式系． われわれは Boris Doubrov と待田芳徳との共同研究 [12] によって次の結果を得ている．

$\mathfrak{g}$ は単純な階数付き Lie 代数，V は既約表現とし，$\mathcal{ILD}(\mathfrak{g}, V)$ は $(\mathfrak{g}, V)$ 型の形式的可解な線形微分方程式系の全体とする．各 $R \in \mathcal{ILD}(\mathfrak{g}, V)$ に対して (P, ω, χ) を規準的に構成するアルゴリズムが得られるのである．ここで R をフィルター付き多様体 $(M, \mathfrak{f})$ 上の微分方程式系とすると，P は $(M, \mathfrak{f})$ 上の主ファイバー束でその構造群 $\hat{G}^0$ は $(\mathfrak{g}, V)$ から一定の方法で決まる Lie 群，ω は $\mathfrak{gl}(V)$ に値をとる P 上の 1 次微分形式，χ は $\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{gl}(V)/\hat{\mathfrak{g}})_+$ に値をとる P 上の関数で ω から決まる．そして χ が R の完全不変量となる．不変量が消えれば R は典型的な微分方程式系に同型となる．さらに不変量はコホモロジー群 $H^1_+(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{gl}(V)/\hat{\mathfrak{g}})$ が消えれば $\chi = 0$ となる．またこのコホモロジー群は Kostant の方法 ([19]) を使って Lie 代数のルート系を用いて計算でき，多くの $(\mathfrak{g}, V)$ に対してこのコホモロジー群は消えて剛性が成り立つ．またそのコホモロジーが自明とならないような $\mathfrak{g}$ も特定できる．

注意すべき非常に重要なことは，形式的可解な有限型の線形微分方程式系の幾何と旗多様体の部分多様体の外在的幾何がカテゴリーとして同型である，ということである．従って線形微分方程式系に対して不変量を構成することは旗多様体の部分多様体に対して不変量を構成することと同じなのである．

階数付き Lie 代数 $\mathfrak{g}$ と階数付き $\mathfrak{g}$ 加群の組 $(\mathfrak{g}, V)$ が線形微分方程式系のモデルになると言ったが，最も簡単な階数付き Lie 代数は $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ でその階数付けは $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ と各 1 次元空間への Borel 分解である．そして 2 変数 n 次斉次多項式の空間への表現がその既約表現である．これに対応する線形の微分方程式系は $n+1$ 階の線形常微分方程式であり，対応する旗多様体への埋込みは n 次元射影空間の中の曲線である．線形常微分方程式の不変量については古くから研究され，特に Wilczynski [47] は，Lie の微分不変量の考えに従い，その不変量を完全に決定している．背足豊 ([36] ,[37]) はこれを Cartan の動標構束の考えで捉え直し，$\mathfrak{g}$ が深さ 1 の階数付き単純 Lie 代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ の場合に動標構束を構成し不変量を求める方法を確立した．巾零解析の考えの下に，背足の結果を任意の深さを持つ階数付き Lie 代数に拡張したのが上記の我々の結果である．

外在的幾何に対する Klein-Cartan プログラム． よく知られているように幾何には内在的幾何と外在的幾何がある．最初に話した幾何構造の同値問題は内在的幾何の基本問題でありタワーの理論は内在的幾何について俯瞰的な理解を与えるものであるといえよう．

他方，外在的幾何も幾何のいたるところで現れる．ユークリッド空間内の曲線論，曲面論はよく知られているが，射影空間やGrassmann多様体の中の部分多様体などもあるし，任意の等質空間 G/H に対してその部分多様体の外在的幾何が考えられる．それら外在的幾何の不変量はどのように求まるか．これまで個々の幾何においてそれぞれ詳しい研究が進められている．しかしそれらの間に共通の原理はないのだろうか，と昔から時々思っていた．

これまで個々の外在的幾何の面白さに囚われ外在的幾何のなす森にまで関心が向かわなかったように思われる．最近，線形微分方程式系の幾何と関係し，旗多様体での外在的幾何の一般的考察へと導かれたが，外在的幾何のほとんどは旗多様体の外在的幾何の特殊化として現れることを考えると，これでようやく外在的幾何の森を眺め始めたのではなかろうか．そして内在的幾何の森と外在的幾何の森を同じ地平に眺めることができるようになり，相互の関係についても関心が高まってきている．例えば，$(\mathfrak{g}, V)$ 型の外在的幾何と $\mathfrak{g}$ 型のCartan幾何とはどのようにかかわり合うか．その外在的幾何の不変量からCartan幾何の不変量はどのように決まるか，といったGaussのTheorem egregiumの一般化が，問題として提起される．

有限型非線形微分方程式系に対するKlein-Cartanプログラム． 線形微分方程式系と外在的幾何が対応したが，非線形微分方程式系と内在的幾何と密接に関係する．ここで少しそのことに触れておこう．非線形微分方程式の幾何学的な研究はMonge, Darboux, Goursat と古くから進められてきたが，特にCartanは2階の非線形常微分方程式の不変量を求めるTresseの仕事をPfaff系を用いて幾何構造の不変量を求めることに捉え直した．そしてこの見方はChernにより3階の常微分方程式に拡張された．この現代的な考察は，Gardner をはじめ多くの人によって進められたが，佐藤-吉川[35]は田中のCartan接続を用いる方法を与えている．田中は一般の形式的可解で有限型の非線形微分方程式系に対して幾何学的な定式化をし，その中の顕著なクラスに対してCartan接続を構成し，不変量を求める系統的な方法を与えている([46] [11])．また山口は[48]において包合的な偏微分方程式系の幾何学化について考察している．

第3節で述べた巾零解析の発展を念頭においたとき，微分方程式の幾何学的研究において，微分方程式系を従来の枠組だけではなく巾零解析の枠組で捉えそれを幾何学化していくことが望まれる．線形の場合はこれが見事に成功したが，非線形の場合もおもしろい進展をもたらすのではないかと期待される．

無限． 有限型の微分方程式系の幾何については前でも述べたがかなり詳しく分かって来ている．しかし無限型の微分方程式系については，解の存在定理など解析的な結果は得られているが，その幾何についてはほとんど未踏である．無限型のときも，微分方程式系のKleinモデルの代数的骨組はやはり組 (g, V) で与えられる．ここで g は有限次元または無限次元の推移的階数付Lie代数であるが，V は無限次元の階数

付き g 加群である．このような (g,V) の Klein モデルの変形は Cartan 幾何としてどのように捉えられるだろうか．それらの不変量はどうなっているだろうか．線形の微分方程式系には旗多様体 $Flag(V)$ の外在的幾何が対応するが，V は無限次元である．その幾何は Cartan 幾何とどのように関係するだろうか．無限型の微分方程式系の Klein-Cartan プログラムもしっかりと考えてみたい．

一つの単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ とその一つの既約表現 V を持ってきても既にそこにその型の内在的幾何，外在的幾何，線形，非線形の微分方程式系の成す固有の世界が広がっている．V が有限次元の場合だけでなく無限次元の場合にも面白いものがあると期待するのである．

第１節でフィルター付き多様体の定義を与える．フィルター付き多様体の各点にはその第１近似として階数付きの巾零 Lie 代数が定まる．フィルターが自明なときにはそれは接ベクトル空間そのものを可換 Lie 代数とみたものである．このフィルター付き多様体が巾零幾何・巾零解析の舞台となる．

第２節ではタワーの概念を説明する．G 構造，一般化された G 構造，Klein 幾何，Cartan 幾何がタワーの幾何の中にどのように入っているかを見る．

第３節ではフィルター付き多様体上の微分方程式系を扱う．フィルター付き多様体上の微分作用素に対してフィルターに付随した重み付き次数を定義し，この重み付き次数を元にして微分方程式を解析し巾零解析を概観する．

第４節ではまず形式的可解な有限型線形微分方程式系の幾何と旗多様体における外在的幾何が同型であることを示す．それらに対して元素に当たるものは何か，そしてそれからの変形とは，変形の不変量はどのように求められるか，といった問題を考察する．最後に２，３の注意を付け加えた．

なお，この原稿を書く中で，平仮名，漢字，カタカナ，英語，仏語などの使い分けに気になることがしばしばあったが，特別のルールは設けないことにした．従って例えば，ある所では tower，別な所ではタワーであったりするが，この種の不統一はお許し頂きたい．

1. フィルター付き多様体

まず次の定義から始めよう．

定義 1. 微分可能多様体 M の接束 TM のフィルター $\mathfrak{f}=\{\mathfrak{f}^p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ で次の条件を満たすものを M の接フィルターと呼び，それを備えた多様体 $(M,\mathfrak{f})$ をフィルター付き多様体と呼ぶ．

i) $\mathfrak{f}^p$ は TM の部分束で　$\mathfrak{f}^p\supset\mathfrak{f}^{p+1}$.
ii) $\mathfrak{f}^0=0$ かつ $\mu\geq 0$ が存在して　$TM=\mathfrak{f}^{-\mu}$.
iii) $[\underline{\mathfrak{f}^p},\underline{\mathfrak{f}^q}]\subset\underline{\mathfrak{f}^{p+q}}$, ここで $\underline{\mathfrak{f}^p}$ は $\mathfrak{f}^p$ の切断の芽のなす層を表す．

$(M,\mathfrak{f})$ をフィルター付き多様体とする．M の点 x に対して

$$\operatorname{gr}\mathfrak{f}_x=\bigoplus_{p\in\mathbb{Z}}\operatorname{gr}_p\mathfrak{f}_x,\quad \operatorname{gr}_p\mathfrak{f}_x=\mathfrak{f}_x^p/\mathfrak{f}_x^{p+1}$$

とおく．ここで $\mathfrak{f}_x^p$ は $\mathfrak{f}^p$ の x 上の でのファイバーを表す．ベクトル場の交換子積は交代双一次写像

$$[\ ,\ ] : \mathrm{gr}\,\mathfrak{f}_x \times \mathrm{gr}\,\mathfrak{f}_x \to \mathrm{gr}\,\mathfrak{f}_x$$

を導き，$\mathrm{gr}\,\mathfrak{f}_x$ は Lie 代数の構造を持つ．

$$[\mathrm{gr}_p\,\mathfrak{f}_x, \mathrm{gr}_q\,\mathfrak{f}_x] \subset \mathrm{gr}_{p+q}\,\mathfrak{f}_x$$

が成り立つので $\mathrm{gr}\,\mathfrak{f}_x$ は階数付き Lie 代数であり巾零である．このように各 x に対して巾零 Lie 代数 $\mathrm{gr}\,\mathfrak{f}_x$ が定まる．これを $(M, \mathfrak{f})$ の x におけるシンボル代数という．

フィルター付き多様体 $(M, \mathfrak{f})$ の各点 x での第一次近似は，従来の接ベクトル空間 T_xM に代わり，シンボル代数 $\mathrm{gr}\,\mathfrak{f}_x$ であるとみなし，フィルター付き多様体の幾何構造や微分方程式をこの巾零 Lie 代数を元にして研究することを巾零幾何・巾零解析と呼ぶ．

例 1 (自明なフィルター付き多様体)**.** 任意の微分可能多様体 M は，自明な接フィルター: $\mathfrak{f}^{-1} = TM$ を備えたフィルター付き多様体とみなせる．$x \in M$ でのシンボル代数は接ベクトル空間 T_xM を自明な階数付けを持った可環 Lie 代数と見なしたものである．

M を微分可能多様体とする．TM の部分束 D あるいはその双対 $D^{\perp} \subset T^*M$ は微分方程式や幾何の重要な対象として古くから研究され，Pfaff system, differential system, distribution(in the sense of Chevalley), vector distribution などいろいろな呼び名で呼ばれてきた．

例 2. $\mathfrak{f}^{-1} = D, \mathfrak{f}^{-2} = TM$ とおくと，$(M, \mathfrak{f})$ はフィルター付き多様体となる．D が完全積分可能ということと $\mathrm{gr}\,\mathfrak{f}_x$ が任意の $x \in M$ に対して可換となることが同値である．D が接触構造ならば　$gr\mathfrak{f}_x$ は　任意の x に対して Heisenberg Lie 代数に同型となる．

一般に部分ベクトル束 $D \subset TM$ に対して層 $\mathcal{D}^p$ $(p \in \mathbb{Z})$ を次のように定義する：$\mathcal{D}^p = 0$ $(p \geq 0), \mathcal{D}^{-1} = \underline{D}$ とおき　$p \leq -1$ に対して，

$$\mathcal{D}^{p-1} = \mathcal{D}^p + [\mathcal{D}^{-1}, \mathcal{D}^p]$$

と定める．すると

$$[\mathcal{D}^p, \mathcal{D}^q] \subset \mathcal{D}^{p+q}$$

が成り立つ．

すべての p に対してベクトル束 D^p が存在して $\mathcal{D}^p = \underline{D^p}$ が成り立つとき，D は regular であるという．　また $\bigcup \mathcal{D}^p = \underline{TM}$ が成り立つとき，D は Hörmander 条件を満たす，あるいは bracket generating である，という．

例 3. 微分式系 $D \subset TM$ が regular で Hörmander 条件を満たすとき，$\mathfrak{f}^p = D^p$ とおくと $(M, \mathfrak{f})$ はフィルター付き多様体となる．このフィルター $\mathfrak{f}$ を D から生成されるフィルターと呼ぶ．

一般にフィルター付き多様体 $(M, \mathfrak{f})$ のシンボル代数は点 $x \in M$ 毎に決まっているので互いに同型になるとは限らないが，ある階数付き巾零 Lie 代数 $\mathfrak{n} = \bigoplus \mathfrak{n}_p$ が存在して任意の $x \in M$ に対して $\mathrm{gr}\,\mathfrak{f}_x$ が $\mathfrak{n}$ に階

数付き Lie 代数として同型となるとき，$(M,\mathfrak{f})$ はタイプ $\mathfrak{n}$ の定シンボルを持つという．

$\mathfrak{n}=\bigoplus_{p<0}\mathfrak{n}_p$ を有限次元階数付き巾零 Lie 代数とする．N は $\mathfrak{n}$ を Lie 代数に持つ Lie 群とする．左移動により TN と $\mathfrak{n}\times N$ を同一視し，

$$\mathfrak{f}^p=\mathfrak{n}^p\times N,\quad \mathfrak{n}^p=\bigoplus_{i\geq p}\mathfrak{n}_i$$

N の接フィルターを決める．明らかに $(N,\mathfrak{f})$ はタイプ $\mathfrak{n}$ のフィルター付き多様体である．これをタイプ $\mathfrak{n}$ の典型という．

例 4 (旗多様体)**.** (V,ϕ) は有限次元フィルター付きベクトル空間とする．$\phi=\{V^p\}$ は V の部分ベクトル空間の列で次を満たすとする．

$$V=V^0\supset V^1\supset\cdots\supset V^{\tau+1}=0$$

$GL(V)$ は V の線形自己同型全体のなす Lie 群，$\mathfrak{gl}(V)$ はその Lie 代数とする．そのフィルターを

$$\mathfrak{gl}(V)^p=\{A\in\mathfrak{gl}(V)|AV^i\subset V^{i+p},\ \forall i\}$$

によって定義すると

$$[\mathfrak{gl}(V)^p,\mathfrak{gl}(V)^q]\subset\mathfrak{gl}(V)^{p+q}$$

が成り立つ．

V^p での V^{p+1} の補空間 V_p を選んで

$$V=\bigoplus V_p$$

と表し

$$\mathfrak{gl}(V)_p=\{A\in\mathfrak{gl}(V)|AV_i\subset V_{i+p},\ \forall i\}$$

とおくと

$$[\mathfrak{gl}(V)_p,\mathfrak{gl}(V)_q]\subset\mathfrak{gl}(V)_{p+q}$$

が成り立ち

$$\mathfrak{gl}(V)=\mathrm{gr}\,\mathfrak{gl}(V)=\bigoplus\mathfrak{gl}(V)_p$$

と同一視される．

$\mathfrak{gl}(V)^k$ $(k\geq 0)$ は $\mathfrak{gl}(V)$ の Lie 部分環となる．それに対応する $GL(V)$ の Lie 部分群を $GL(V)^k$ で表す．ϕ と同型なフィルター $a\phi$ $(a\in GL(V))$ の全体のなす集合は等質空間であり $GL(V)/GL(V)^0$ と表せる．これをタイプ ϕ の旗多様体と呼び $\mathrm{Flag}(V,\phi)$ で表す．

$\mathrm{Flag}(V,\phi)$ は $\{\mathfrak{gl}(V)^p\}$ から誘導される左不変なフィルター $\mathfrak{f}$ を持ちフィルター付き多様体になる．これはタイプ $\mathfrak{gl}(V)_-=\bigoplus_{p<0}\mathfrak{gl}(V)_p$ の典型的フィルター付き多様体と局所同型である．

特に，$\dim V=3,\dim\phi^0=3,\dim\phi^1=2,\dim\phi^2=1,\dim\phi^3=0$ のとき $\mathrm{Flag}(V,\phi)$ は空飛ぶ飛行機の相空間を表すと見なすことができる．$\varphi\in\mathrm{Flag}(V,\phi)$ に対して φ^1 は主翼の成す平面，φ^2 は主軸の成す直線と見なすのである．ただし重心の位置および主翼と主軸の向きは問題にしない．このとき接触構造 $\mathfrak{f}^{-1}$ は，φ^2 は平面 φ^1 の中を動き φ^1 は直線 φ^2 の周りを回る，そのような φ の動きの無限小の方向を表していると見ることができる．

2. フィルター付き多様体上の幾何構造

空間 X とその上の幾何構造 S を考える．そのような組が (X,S), (X',S') と二組あったとする．このとき (X,S) と (X',S') は互いに同値（同型）であろうか，これを問うのが幾何構造の同値問題である．

任意の $x \in X, x' \in X'$ に対して x の近傍から x' の近傍への局所同型写像が存在するとき，この同値問題は局所自明であるという．例えば，複素構造や葉層構造は次元とランクだけで局所的な形が決まるので局所自明である．しかし Riemann 構造，CR 構造，微分式系などは局所非自明である．

よく知られているように Riemann 構造の不変量は曲率テンソルおよびその次々の共変微分たちで生成される．従って Riemann 構造は高度に局所非自明である．

また例えば n 次元多様体 M 上の幾何構造としてランク r の微分式系，即ち部分ベクトル束 $D \subset TM$ を考えよう．D が完全積分可能とか接触構造とか特別の場合は局所自明となるが，一般にはこれもまた高度に局所非自明である．

Cartan は 1910 年の論文 Systèmes de Pfaff à cinq variables ... において 5 次元多様体上のランク 2 の微分式系の不変量を決定し 14 次元の例外単純 Lie 代数 G_2 が深く関係することを示し，微分式系の幾何の見事な手本を与えた．しかしこの論文はその難解さでも有名で，従来の G-構造の理論からではとてもよく説明できない．これが巾零幾何の源泉の一つでもあった．今日では巾零幾何を通じて極めて自然に明瞭に理解されるのである．

このように多くの幾何構造は局所的にも非自明であり．まず局所同値問題を問題とする．与えられた幾何構造 (X,S) の局所不変量を完全に決定すること，あるいはそれを決定する道筋を明らかにすることが問題となる．そしてそれが本節の主題である．

我々がここで空間 X として考えるものはフィルター付き多様体 $(M,\mathfrak{f})$ である　勿論，フィルターが自明な場合として，通常の多様体も含まれる．そしてフィルター付き多様体 $(M,\mathfrak{f})$ 上の幾何構造を考える．その例は幾何や微分方程式の研究から豊富に現れる．

例えば CR 構造や subRiemann 構造などもその例である．subRiemann 幾何は幾何や微分方程式は勿論制御理論や確率論など数学のいろいろな分野と関係し近年関心の高まり出した分野である．まだ一般によく知られていないようなのでここで定義を与えておこう．

定義 2. M を微分可能多様体とする．接束 TM の部分束 D とその上の Riemann 計量 s, 即ちファイバー毎の（正定値）対称双一次形式 $s : D \underset{M}{\times} D \to \mathbb{R}$ が与えられているとき，(D,s) を M 上の subRiemann 構造といい，それを備えた多様体 (M,D,s) を subRiemann 多様体という．またフィルター付き多様体 $(M,\mathfrak{f})$ 上の subRiemann 構造とは部分束 $\mathfrak{f}^{-1}$ 上の Riemann 計量のことである．

subRiemann 構造は $D = TM$ のときには通常の Riemann 構造に他ならない．subRiemann 多様体 (M,D,s) が与えられると，例 2 のように

フィルターを定義すれば，或いは，D が regular で bracket generating のとき，例 3 のようにフィルターを定義すれば s はフィルター付き多様体上の subRiemann 構造であると見なせる．このように subRiemann 幾何は Riemann 幾何の一般化であるが，Riemann 幾何と異なる点も多く，Riemann 幾何の常識から誤謬に陥ることもある．Riemann 構造の不変量は曲率とその共変微分たちであるが，subRiemann 構造に対しても曲率が定義できるであろうか．これに対する一般的な解答は巾零幾何を通してようやく初めて得られる ([32]).

これまで定義なしに幾何構造という言葉を使ってきたが，ここでその定義を与えよう．

定義 3. フィルター付き多様体上の幾何構造とはフィルター付き多様体上の tower のことである．

では tower とは何か．まずその代数的骨組み (skeleton) について述べよう．

定義 4. tower の skeleton とは次の条件を満たす組 (E, G) である．

i) G は Lie 群で E は G-加群である．

ii) G- 加群の単射 $\mathfrak{g} \to E$ が与えられていて $\dim E/\mathfrak{g} < \infty$ である．ただし $\mathfrak{g}$ は G の Lie 代数で随伴表現により G-加群と見なす．

iii) $E, G, \mathfrak{g}$ にはフィルター（すべて同じ記号 ϕ で表す）が与えられていて以下を満たす．

iv) $\phi^p E$ は G 不変で $\phi^p E = \phi^p \mathfrak{g}\,(p \geq 0)$, $\phi^p G$ は G の閉部分群で $\phi^p G = G\,(p \leq 0)$,　そして $\phi^p \mathfrak{g}$ は $\phi^p G$ の Lie 代数である．

v) 次の列は exact:

$$1 \to \phi^{k+1} G \to \phi^0 GL(E^{(k-1)})/\phi^{k+1} GL(E^{(k-1)})$$

ここで $E^{(k-1)} = E/\phi^k E$ であり，そのフィルターは $GL(E^{(k-1)})$ のフィルターを誘導する．

vi) $\bigcap \phi^p G = \{e\}$.

この定義の主要なところは条件 i), ii) である．

また非常に重要なことは，⟨⟨ E 従って G は無限次元となることも許す ⟩⟩ ということである．条件 iii) - vi) により，G は，無限次元の場合にでも，有限次元 Lie 群 $G/\phi^{k+1} G$ の射影的極限として，多様体の構造を持つのである．また，G および $\mathfrak{g}$ のフィルターは E のフィルターの負部分 $\{\phi^p E\}_{p<0}$ から条件 v) より一意的に決まることに注意する．

定義 5. フィルター付き多様体 $(M, \mathfrak{f})$ 上の skeleton (E, G) を持つ tower とは次を満たす組 (P, ω) である．

i) $\pi : P \to M$ は M 上の主ファイバー束でその構造群は G である．

ii) ω は E に値をとる P 上の一次微分形式で任意の $z \in P$ に対して $\omega_z : T_z P \to E$ はフィルターを保つ同型写像である．ただし $T_z P$ のフィルター $\mathfrak{f}^p_{TP}$ は $p < 0$ のとき $\mathfrak{f}^p_{TM}$ の逆像，$p \geq 0$ のとき $\phi^p \mathfrak{g}$ が

右作用により P のファイバー上に定める分布として定義されるものである．

iii) $R_a^*\omega = a^{-1}\omega,\ a \in G$，ただし R_a は a の右作用を表す．

iv) $\langle \omega, \tilde{A} \rangle = A,\ A \in \mathfrak{g}$．ただし $\tilde{A}$ は A の右作用により誘導される P 上のベクトル場を表す．

$P^{(k)} = P/\phi^{k+1}G,\ E^{(k)} = E/\phi^{k+1}$ とおき，P, E の truncation という．

$z \in P$ に対してその点の $P^{(k)}$ への射影を $z^{(k)}$ と書くと，同型写像 $\omega_z : T_{z^{(k)}}P^{(k)} \to E^{(k)}$ が誘導される．特に $k = 0$ のときはフィルター付きベクトル空間の同型 $(T_xM, \mathfrak{f}_x) \to (E/\mathfrak{g}, \phi)$ を導く．これは一般に $z^{(0)}$ だけからは決まらないが，同型 $\mathrm{gr}\,\mathfrak{f}_x \to \mathrm{gr}\,E/\mathfrak{g}$ は　$z^{(0)}$ だけで決まることに注意しておこう．

(P, ω) を $(M, \mathfrak{f})$ 上の tower とする．ω は P の接ベクトル束の自明化を 与え P 上の絶対平行性を定めている．従って

$$d\omega + \frac{1}{2}\gamma(\omega, \omega) = 0$$

を満たす写像

$$\gamma : P \to \mathrm{Hom}(\wedge^2 E, E)$$

が一意的に決まる．この写像は G-同変写像である，即ち

$$\gamma(za) = \rho(a^{-1})\gamma(z), \quad z \in P,\ a \in G$$

ここで ρ は自然に誘導される G の $\mathrm{Hom}(\wedge^2 E, E)$ への表現である．さらに ω の性質より

$$\gamma(z)(A, X) = AX,\ z \in P, A \in \mathfrak{g}, X \in E$$

が成り立つ．従って構造関数の $\mathrm{Hom}(\mathfrak{g} \otimes E, E)$ 成分は skeleton $(E, \mathfrak{g})$ から決まる．γ の残りの成分は，直和分解

$$E = V \oplus \mathfrak{g}$$

を一つ固定することにより

$$c : P \to \mathrm{Hom}(\wedge^2 V, E)$$

と表される．γ も c もともに P の構造関数と呼ばれる．

tower (P, ω) は $(M, \mathfrak{f})$ 上の幾何構造の内部構造を表現していると言える．skeleton (E, G) は基本的な群論的骨組を定め，構造関数 c がねじれ（変形）の度合いを示す量である．

我々はすべての幾何構造は tower として表現されるということを主張しているのである．これを納得するのに universal skeleton, universal tower の存在について述べよう．

まず，次の定義を与えよう：

定義 6. $\lambda : (E, G) \to (E', G')$ が底 k の skeleton の包含射であるとは，Lie 群の単射準同型 $\lambda_G : G \to G'$ と　単射 $\lambda_E : E \to E'$ が存在し次を満たすことである．

i) $\lambda_E(ax) = \lambda_G(a)\lambda_E(x), \quad a \in G, x \in E.$

ii) λ_E はフィルターを保つ写像でその $\mathfrak{g}$ への制限は λ_G の微分に一致する．

iii) 誘導写像 $E/\phi^{k+1}E \to E'/\phi^{k+1}E'$ は同型写像である．

同様に次の定義を与えよう：

定義 7. $(P,\omega),(P',\omega')$ はそれぞれ (E,G), (E',G') を skeleton に 持つ $(M,\mathfrak{f})$, $(M',\mathfrak{f}')$ 上の tower とする．バンドル写像 $\Lambda : P \to P'$ が底 k の包含射であるとは skeleton の底 k の包含射 $\lambda : (E,G) \to (E',G')$ が存在して 次を満たすことである：

i) $\Lambda(za) = \Lambda(z)\lambda_G(a), \quad a \in G, z \in P.$

ii) $\quad \Lambda^*\omega' = \lambda_E\omega.$

iii) 誘導写像 $P^{(k)} \to P'^{(k)}$ は同相写像である．

すると次の定理が得られる．

定理 1. k は -1 かそれより大きい整数とする．底 k の 包含射による順序関係に関して任意の *tower (*または *skeleton)* に対してそれを含む極大 なものが，同型を除いて一意的に存在する．

少し正確に述べよう．整数 $k \geq -1$ をひとつ止める．(E,G) を skeleton とすると，skeleton $(\hat{E},\hat{G})$ と底 k の包含射

$$\iota : (E,G) \to (\hat{E},\hat{G})$$

が存在して，任意の底 k の包含射 $\lambda : (E,G) \to (E',G')$ 　に対して底 k の包含射 $\iota' : (E',G') \to (\hat{E},\hat{G})$ が一意的に存在し $\iota' \circ \lambda = \iota$ となる．普遍性からこのような $\iota : (E,G) \to (\hat{E},\hat{G})$ は同型を除いて一意的に決まる．またそれは truncation $(E^{(k)},G^{(k)})$ の同値類にのみ関係して決まる．

$E = V \oplus \mathfrak{g}$ と補空間 V を選ぶと，$\iota : (E,G) \to (\hat{E},\hat{G})$ は一意的 canonical に構成される．これを $E^{(k)}$ の universal prolongation と呼び $(\hat{E}(E^{(k)}),\hat{G}(E^{(k)}))$ とも書く．

tower についても同様である．すなわち，(P,ω) を tower とすると，tower $(\hat{P},\hat{\omega})$ と 底 k の包含射

$$\iota : (P,\omega) \to (\hat{P},\hat{\omega})$$

が存在して，任意の底 k の包含射 $\Lambda : (P,\omega) \to (P',\omega')$ 　に対して底 k の包含射 $\iota' : (P',\omega') \to (\hat{P},\hat{\omega})$ が一意的に存在し $\iota' \circ \Lambda = \iota$ となる．普遍性からこのような $\iota : (P,\omega) \to (\hat{P},\hat{\omega})$ は同型を除いて一意的に決まる．またそれは truncation $P^{(k)}$, の同値類にのみ関係して決まる．

$E = V \oplus \mathfrak{g}$ と補空間 V を選ぶと，$\iota : (P,\omega) \to (\hat{P},\hat{\omega})$ は一意的 canonical に構成される．これを $P^{(k)}$ の universal prolongation と呼び $\mathcal{R}(P^{(k)})$ とも書く．

特にフィルター付き多様体 $(M,\mathfrak{f})$ の universal prolongation $\mathcal{R}(M,\mathfrak{f})$ は $(M,\mathfrak{f})$ 上の tower すべてを包含射により含み，$(M,\mathfrak{f})$ の無限次の非可換枠束と呼ばれる．

これがどんなものかフィルター $\mathfrak{f}$ が自明な場合に見ておこう．$\mathcal{R}(M)$ はその truncation $\mathcal{R}^{(k)}(M) = \mathcal{R}(M)/\phi^{k+1}\hat{G}(V)$ からなる主ファイバー

束の列の射影的極限として得られる:

$$\cdots \leftarrow \mathcal{R}^{(k-1)}(M) \leftarrow \mathcal{R}^{(k)}(M) \leftarrow \cdots \leftarrow \mathcal{R}(M)$$

主ファイバー束 $\mathcal{R}^{(k-1)}(M) \leftarrow \mathcal{R}^{(k)}(M)$ のファイバーには群 $\phi^k\hat{G}^{(k)}(V)$ が単純推移的に作用しているが，その Lie 代数は，フィルター $\mathfrak{f}$ が自明なときは，$V \otimes \otimes^{k+1}V^*$ に同型となる． 常識的な方法で定義される $k+1$ 次の枠束ではファイバーに作用する Lie 代数は $V \otimes S^{k+1}V^*$ と対称テンソル積 $S^{k+1}V^*$ である．我々の非可換枠束では通常の関係式 $\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}$ は仮定されず保留されているのである．ここに $\mathcal{R}(M)$ の高い普遍性が由来する．($\mathfrak{f}$ が自明でないときは，次の節で述べるように，重み付き次数 のテンソル積を考えればよい)．従って

$$\dim \mathcal{R}^{(k)}(M) = \sum_{p=0}^{k+1} \dim(V \otimes \otimes^p V^*)$$

となり，次元は対称積 S^pV^* ではなくテンソル積 $\otimes^pV^*$ のオーダーで増大する．

それの truncated bunndle $\mathcal{R}^{(0)}(M, \mathfrak{f})$ は，$\mathfrak{f}$ が自明なときは，$(M, \mathfrak{f})$ の通常の 1 次の枠束であり，$\mathfrak{f}$ が自明でないときは，$(M, \mathfrak{f})$ は重み付きの意味での 1 次の枠束である．従って $(M, \mathfrak{f})$ 上の tuncated tower $P^{(0)}$ はいわゆる G 構造と呼ばれるものである．フィルターが自明でないときは拡張された意味での G 構造 である．

通常幾何では幾何構造は G-構造や拡張された意味での G-構造など truncated tower という形で現れることが多い．しかし truncated tower はその上の universal tower と一対一に対応するので，truncated tower 達を扱う代わりに tower 達を扱う方がそれらの構造や相互の関係がはるかによく見えるのである．例えて言えば，これまで tower 達の足元しか見えていなかったのが，霧が晴れて立ち並ぶ tower たちが一望の下にくっきりと見えるようになったということだろうか．このように幾何構造の同値問題から tower のいわば "生態学" に導かれる．tower の中で美しいものはどんなものか．与えれた tower と同種なものの中からできるだけ美しいものを探し出せ，といったことを観察し考えることになる．ここで "美しい" という言葉を使ったが，単純とか簡単とかと言うような意味である．

tower (P, ω) の構造は skeleton (E, G) と構造関数 γ から決まるということを念頭に置き，より美しい tower は何かを見てみよう．

2.1. **Lie tower.** まず $G = \{e\}$，即ち，G が単位元 e のみからなる群のときを考えよう．$P = M$, $E = V$ で M 上の V に値を持つ一次微分形式 ω は各 $x \in M$ に対して線形同型写像

$$\omega_x : T_xM \to V$$

を与える．即ち，ω は M 上の絶対平行性と呼ばれるものである．

$$d\omega + \frac{1}{2}\gamma(\omega, \omega) = 0$$

を満たす構造関数 $\gamma : M \to \mathrm{Hom}(\wedge^2 V, V)$ が一意的に決まる．

この構造関数γが定数（一定）となる場合を考えよう．外微分をとると

$$\mathfrak{S}\gamma(\gamma(u,v),w)=0, \quad u,v,w\in V$$

が成り立つ．これはJacobiの恒等式であり，(V,γ)はγによりブラケットの定義されたLie代数であると見なせる．そのLie代数を$\mathfrak{l}$で表すと，(M,ω)はlをLie代数とする局所Lie群Lであると見なすことができ，ωはLのMaurer-Cartan formと同一視される．

従って$G=\{e\},\gamma\equiv const.$というもっとも簡単なtowerは（局所）Lie群の幾何構造である．

2.2. **Klein tower.** 次にskeleton (E,G)は任意であるが，構造関数γが定数となる場合を考えよう．今度はP上の絶対平行性ωの構造関数が一定なので(P,ω)が局所Lie群になり，ωはそのMaurer-Cartan formであり，EにはγをブラケットとするLie代数の構造が入る．そのLie代数を$\mathfrak{l}$と書けばそれはLie代数$\mathfrak{g}$の拡大であり，その上に群Gが作用しているのである．

このtowerはkleinの幾何（等質空間の幾何）

$$L\overset{G}{\to}L/G$$

の水平方向の無限小版を現している．ωはLのMaurer-Cartan formである．水平方向には大域的な群Lの作用を仮定していないがファイバー方向には大域的に群Gが作用しているのである．

$\mathfrak{l}$が有限次元のときは，これらのtowerの研究はLie群Lie代数論に帰し解析的には常微分方程式の枠内である．

2.3. **無限次元のKlein tower.** $\mathfrak{l}$が無限次元となる場合について少し述べておこう．構造関数γが定数ならば，$\mathfrak{l}=(E,\gamma)$はLie代数となることは先に見たとおりであるが，さらに推移的なフィルター付きLie代数と呼ばれるものになる．その定義を述べておこう．

定義 8. Lie代数$\mathfrak{l}$がfiltration $\{\mathfrak{l}^p\}_{p\in\mathbf{Z}}$を備えていて次を満たすときtransitive filtered Lie algebra (TFLA) of depth μという．

i) $\mathfrak{l}^p$は$\mathfrak{l}$の部分ベクトル空間で　$\mathfrak{l}^p\supset\mathfrak{l}^{p+1}$.

ii) $[\mathfrak{l}^p,\mathfrak{l}^q]\subset\mathfrak{l}^{p+q}$.

iii) $\mathfrak{l}^{-\mu}=\mathfrak{l}, \quad \bigcap\mathfrak{l}^p=0$.

iv) $\dim\mathfrak{l}/\mathfrak{l}^0<\infty$.

v) （推移性）　$p\geq 0, x\in\mathfrak{l}^p, [x,\mathfrak{l}^a]\subset\mathfrak{l}^{a+p+1},\ \forall a<0\Longrightarrow a\in\mathfrak{l}^{p+1}$

定義より$\mathfrak{l}$がTFLAならば　$\mathfrak{l}^p/\mathfrak{l}^{p+1}$は有限次元になることに注意しておく．上の$\mathfrak{l}=(E,\gamma)$が実際TFLAになることは容易に確かめられる．一般にTFLAの構造はどのように決まるか，[26]に従いざっと見てみよう．$\mathfrak{l}$をTFLAとする．　まずgrをとって，

$$\mathrm{gr}\,\mathfrak{l}=\bigoplus\mathrm{gr}_p\,\mathfrak{l}, \quad \mathrm{gr}_p\,\mathfrak{l}=\mathfrak{l}^p/\mathfrak{l}^{p+1}$$

とおくと$\mathrm{gr}\,\mathfrak{l}$は次にいうtransitive graded Lie algebraである．

定義 9. 階数付けられたLie代数 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{p\in\mathbf{Z}} \mathfrak{g}_p$ が次を満たすとき transitive graded Lie algebra (TGLA) という.

i) $[\mathfrak{g}_p, \mathfrak{g}_q] \subset \mathfrak{g}_{p+q}$
ii) $\mathfrak{g}_- = \bigoplus_{p<0} \mathfrak{g}_p$ は有限次元
iii) (推移性) $p \geq 0, x \in \mathfrak{g}_p, [x, \mathfrak{g}_-] = 0 \Longrightarrow x = 0$

TFLA $\mathfrak{l}$ に対して $\mathrm{gr}\,\mathfrak{l}$ が TGLA になることは明らかであろう.

ここで基礎的な概念 prolongation, generalized Spencer cohomology group について説明しておこう.

$\mathfrak{g}$ はLie代数, W は左 $\mathfrak{g}$ 加群とする. Lie代数の表現のコホモロジー群 $H^p(\mathfrak{g}, W)$ はよく知られているように次の微分複体のコホモロジー群として定義される.

$$\cdots \xrightarrow{\partial} \mathrm{Hom}(\wedge^p \mathfrak{g}, W) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Hom}(\wedge^{p+1}\mathfrak{g}, W) \xrightarrow{\partial} \cdots$$

ここで ∂ は $\alpha \in \mathrm{Hom}(\wedge^p\mathfrak{g}, W)$, $x_1, \cdots, x_{p+1} \in \mathfrak{g}$ に対して次の式で定義される.

$$\begin{aligned}(\partial\alpha)(x_1, \cdots, x_{p+1}) \quad &= \textstyle\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i-1}x_i\alpha(x_1, \cdots, \widehat{x_i}, \cdots, x_{p+1}) \\ &+ \sum_{i<j} \ (-1)^{i+j}\alpha([x_i, x_j], x_1, \cdots, \widehat{x_i}, \cdots, \widehat{x_j}, \cdots, x_{p+1})\end{aligned}$$

さて今 $\mathfrak{g}$ は階数付き Lie 代数 $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}_p$ で, W は階数付き $\mathfrak{g}$ 加群 $W = \bigoplus W_q$ で, $\mathfrak{g}_p W_q \subset W_{p+q}$ とする. 作用素 ∂ は次数を保つ写像なので次数が r の写像全体を $\mathrm{Hom}(\cdot)_r$ と表せば次の部分微分複体を得る:

$$\cdots \xrightarrow{\partial} \mathrm{Hom}(\wedge^p\mathfrak{g}, W)_r \xrightarrow{\partial} \mathrm{Hom}(\wedge^{p+1}\mathfrak{g}, W)_R \xrightarrow{\partial} \cdots$$

これの定めるコホモロジー群を $H^p_r(\mathfrak{g}, W)$ と表す. 以下では特に 巾零 Lie 代数 $\mathfrak{g}_- = \bigoplus_{p<0} \mathfrak{g}_p$ の $W = \bigoplus W_p$ への表現のコホモロジー群 $H^p_r(\mathfrak{g}_-, W)$ を考える. このコホモロジー群は, $\mathfrak{g}_- = \mathfrak{g}_{-1}$ のとき Spencer cohomology group, 一般のとき generalized Spencer cohomology group と呼ばれる. ここではそれらを区別せず単に Spencer cohomology group ということもある. また従来は $H^{s,p}(\mathfrak{g}, W)$ と書かれる:

$$H^{s,p}(\mathfrak{g}, W) = H^p_r(\mathfrak{g}, W), \quad ただし\ r = s + p - 1$$

定義 10. $H^p_r(\mathfrak{g}_-, W) = 0$ $(p = 0, 1, r \geq k+1)$ が成り立つとき W は $W^{(k)} = \bigoplus_{q\leq k} W_q$ の prolongation であるという.

次の命題は基本的である.

命題 1. 階数付き $\mathfrak{g}_-$ 加群 $W^{(k)}$ に対してその *prolongation* $\hat{W} = \bigoplus \hat{W}_q$ が同型を除いて一意的に存在する. またそれは次の意味で極大である: W' は階数付き $\mathfrak{g}_-$ 加群で

i) $\hat{W'}^{(k)} = \hat{W}^{(k)}$.
ii) $H^0_r(\mathfrak{g}, W') = 0$ $(r \geq k+1)$ ならば階数付き $\mathfrak{g}_-$ 加群としての単射 $W' \to \hat{W}$ が一意的に存在する.

階数付き $\mathfrak{g}_-$ 加群 $W^{(k)}$ に対して $k+1$ 次のコサイクルの空間

$$Z^1_{k+1}(\mathfrak{g}_-, W) = \{\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_-, W)_{k+1} | \partial\alpha = 0\}$$

は $W^{(k)}$ だけから決まる．これを $\hat{W}_{k+1}$ とおき $\hat{W}^{(k+1)} = W^{(k)} \oplus \hat{W}_{k+1}$ とおけば $\hat{W}^{(k+1)}$ は $\mathfrak{g}_-$ 加群になり，

$$H^p_{k+1}(\mathfrak{g}_-, \hat{W}^{(k+1)}) = 0 \ (p = 0, 1)$$

が成り立つ．これを繰り返せば $\hat{W}$ が得られる．極大性は容易に分かる．

特に，$\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}_p$ が TGLA ならば $\mathfrak{g}_- = \bigoplus_{p<0} \mathfrak{g}_p$ とおけば，$\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}_-$ 加群であり，generalized Spencer cohomology group $H^p_r(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ が定義される．推移性の仮定より，

$$H^0_r(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}) = 0 \ (r \geq 0)$$

が成り立っている．

$k \geq -1$ に対して $\mathfrak{g}^{(k)}$ の prolongation $\mathrm{Prol}(\mathfrak{g}^{(k)})$ は単に $\mathfrak{g}_-$ 加群になるだけでなく，$\mathfrak{g}^{(k)}$ のブラケットが自動的に拡張され TGLA になる．

次のコホモロジー群の有限性は重要である．

定理 2. *W は階数付きの $\mathfrak{g}_-$ 加群とし $H^0_r(\mathfrak{g}_-, W) = 0 \ (r > \nu_0)$ とする．整数 k_0 が存在して*

$$H^p_r(\mathfrak{g}_-, W) = 0 \ (r \geq k_0 + 1, \ \forall p)$$

が成り立つ．

この定理の証明には，一般の TGLA に対する証明 [26] がそのままこの場合にも通用する．

TFLA の構造は次の定理により有限次元の truncated TFLA から決まる．

定理 3. *TFLA $\mathfrak{l}$ に対して*

$$H^p_r(\mathrm{gr}\, \mathfrak{l}_-, W) = 0 \ (r \geq k+1, k \geq 0, p = 1, 2)$$

とすると $\mathfrak{l}$ は truncated TFLA $\mathfrak{l}^{(k)}$ から同型を除いて一意的に決まる．さらに

$$H^3_r(\mathfrak{g}_-, W) = 0 \ (r \geq k+1, k \geq 0)$$

ならば $\mathfrak{l}$ は $\mathfrak{l}^{(k)}$ から構成できる（あらかじめ $\mathfrak{l}$ の存在を仮定することなく）

上の定理の仮定を満たすとき TFLA $\mathfrak{l}$ は次数 k において重み付き包合的であるという．

TFLA $\mathfrak{l}$ を $\mathfrak{l}^{k+1}$ で割った truncated TFLA $\mathfrak{l}^{(k)}$ はもはや Lie 代数ではないが部分的な Lie 代数の構造を持っている．$H^1_r(\mathrm{gr}\, \mathfrak{l}_-, \mathrm{gr}\, \mathfrak{l}) = 0 (r \geq k+1)$ ならば，$\mathrm{gr}\, \mathfrak{l}$ は $\mathrm{gr}\, \mathfrak{l}^{(k)}$ の prolongation として完全に決まる．truncated TFLA $\mathfrak{l}^{(\ell)}$ から $\mathfrak{l}^{(\ell+1)}$ へ拡大する過程でコホモロジー群 $H^2_\ell(\mathrm{gr}\, \mathfrak{l}_-, \mathrm{gr}\, \mathfrak{l})$ がその拡大の自由度として現われ，それが消えていれば拡大は一意的となる．TFLA $\mathfrak{l}$ の具体的な構造の細部は勿論個々に異なり極めて複雑であろうが，$\mathfrak{l}^{(0)}$ から $\mathfrak{l}^{(1)}$, $\mathfrak{l}^{(1)}$ から $\mathfrak{l}^{(2)}$ へと次々生成拡大していくメカニズムは明瞭であり，実はこのメカニズムが Lie 代数に限らず，幾何構

造，微分方程式においても同じであり，重み付き包合性の概念が三者に共通の重要な役割を演じるのである．

有限次元 Klein tower と無限次元 Klein tower の幾何学的あるいは解析的な違いについて少し述べておこう．

次の問題を考えよう:$(P,\omega),(P',\omega')$ をともに構造関数が定数の tower, 即ち Klein tower とする．双方の skeleton と構造定数が同型（互いに対応し合う）ならば，局所同型 $f:(P,\omega)\to(P',\omega')$ が存在するか．

Lie 代数が互いに同型ならば tower （局所 Lie 群）として局所同型か，といってもよい．

有限次元のときには Frobenius の定理を用いて常微分方程式を解くことにより局所同型 f が求まる．

無限次元のときには Frobenius の定理にあたるものがない．重み付き包合的な truncated tower の概念が必要となる．無限次元の tower を比べる代わりに切断して包合的な truncated tower の間の局所同型を探す．それを求める方程式はもはや常微分方程式ではなく偏微分方程式系になる．重み付き包合的な偏微分方程式系の理論を用い，解析的なカテゴリーでは解が求まる．C^∞ では, いろいろな試みがあり肯定的な場合も多く知られているが，一般的なことはよく分っていない．

以上，Klein tower について述べた．まさに等質空間の幾何であるが，有限次元の場合と無限次元の場合には解析的に大きな差異がある．

2.4. **Cartan tower.** 次に skeleton (E,G) において E が Lie 代数の構造を持つ場合を考えよう．

定義 11. skeleton (E,G) で E が Lie 代数 $\mathfrak{l}$ に等しいとき，$(\mathfrak{l},G)$ を Klein skeleton という．

定義 12. Klein skeleton $(\mathfrak{l},G)$ を skeleton に持つ tower をタイプ $(\mathfrak{l},G)$ の Cartan tower という．

以下，Klein skeleton はもっぱら有限次元のもののみを考え，Cartan tower も有限次元のものを考える．$(\mathfrak{l},G)$ が Klein skeleton であるということは，Lie 代数 $\mathfrak{l}$ が G 加群であって $\mathfrak{g}$ を部分加群に含み，さらに G 作用の効果的であることなど，条件 iii) - vi) を満たすことであるが，有限次元の場合これらの条件は入れなくとも問題はない．従って Cartan tower とは Cartan 接続を備えた空間のことである．

(P,ω) をタイプ $(\mathfrak{l},G)$ の Cartan tower とする．$\mathfrak{g}$ の補空間 V をとり $\mathfrak{l}=V\oplus\mathfrak{g}$ と直和分解し，これに応じて

$$\omega=\omega_V+\omega_{\mathfrak{g}}$$

と分解すると，構造関数

$$c:P\to \mathrm{Hom}(\wedge^2 V,\mathfrak{l})$$

が決まり構造方程式

$$d\omega+\frac{1}{2}[\omega,\omega]=\frac{1}{2}c(\omega_V,\omega_V)$$

を満たす．この構造関数は Cartan 接続の曲率とも呼ばれる．これが恒等的に 0 ならば P は $\mathfrak{l}$ を Lie 代数とする局所 Lie 群になる．従ってタイプ $(\mathfrak{l}, G)$ の Cartan 接続は Klein の等質空間モデル $(\mathfrak{l}, G)$ からの変形した幾何構造を現していて曲率がその捻れの度合いを表し

Lie-Klein は様々な幾何を群を用いて等質空間の幾何として統一的に捉えようとした．しかし等質とは限らない Riemann 幾何はまったくその枠組から外れていた．Cartan は 1922 年 espace generalise という考えを創案し，Lie-Klein の考えをさらに広げ Riemann の幾何をもその新しい枠組みの中で群論的に統一的に捉えられることを示した．そしてさらにユークリッド幾何から Riemann 幾何への拡張と同様の拡張が Klein の様々な幾何に対してもこの枠組みの中で行うことができ，極めて広い幾何の統一を達成したと誇らしげに述べている ([7] , [8]) .

Cartan は，孤立していた Riemann 幾何も Kein 幾何と同じ枠組に入れる新しい枠組を考えたと言っているが，それは次の図によって理解されよう：

[Euclid]

$$\begin{array}{c} \mathcal{E}(n) \\ \big\downarrow {\scriptstyle O((n)} \\ \mathbf{E}^n \end{array} \qquad d\theta + \tfrac{1}{2}[\theta, \theta] = 0$$

[Riemann] .

$$\begin{array}{c} \mathcal{O}(M) \\ \big\downarrow {\scriptstyle O((n)} \\ (M, g) \end{array} \qquad d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = \frac{1}{2}K(\omega_{-1}, \omega_{-1})$$

n 次元ユークリッド空間はユークリッド運動群 $\mathcal{E}(n)$ を直交群 $O(n)$ で割った等質空間である．$\mathcal{E}(n)$ は $\mathbf{R}^n$ と $O(n)$ の半直積でその Lie 代数は $\mathbf{R}^n \oplus \mathfrak{o}(n)$ であり，$\mathcal{E}(n)$ の Maurer-Cartan form θ は値を $\mathbf{R}^n \oplus \mathfrak{o}(n)$ にとる．θ_{-1} を $\mathbf{R}^n$ 成分, θ_0 を $\mathfrak{o}(n)$ 成分とし

$$\theta = \theta_{-1} + \theta_0$$

と分解すると，構造方程式は次のよく知られた式になる：

$$d\theta + \frac{1}{2}[\theta, \theta] = 0 \iff \begin{cases} d\theta_{-1} + \theta_0 \wedge \theta_{-1} = 0 \\ d\theta_0 + \dfrac{1}{2}[\theta_0, \theta_0] = 0 \end{cases}$$

一方，(M, g) を n 次元 Riemann 多様体とする．M の各点 x での直交基底，即ち $\mathbf{E}^n$ から T_xM への直交写像をすべて寄せ集めたもの $O(M)$ は (M, g) の直交枠束と呼ばれ M 上の主ファイバー束で構造群は $O(n)$ である．$O(M)$ 上には canonical 1-form と呼ばれる $\mathbf{R}^n$ に値をとる 1-form ω_{-1} があるが，さらに Levi-Civita 接続形式と呼ばれる特別なもの ω_0 がある．これは $\mathfrak{o}(n)$ に値をとる 1-形式であり，$\omega = \omega_{-1} + \omega_0$ とおく

と次の構造方程式を満たす：

$$d\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega] = \frac{1}{2}K(\omega_{-1},\omega_{-1} \Longleftrightarrow \begin{cases} d\omega_{-1} + \omega_0 \wedge \omega_{-1} = 0 \\ d\omega_0 + \frac{1}{2}[\omega_0,\omega_0] = \frac{1}{2}K(\omega_{-1},\omega_{-1}) \end{cases}$$

ここで K は $O(n)$ 同変写像

$$K : O(M) \to \mathrm{Hom}(\wedge^2\mathbf{R}^2, \mathfrak{o}(n))$$

で Riemann 計量 g の曲率である．

このようにユークリッド空間 $\mathbf{E}^n$ にはその上の $O(n)$ 束 $\mathcal{E}(n)$ $\mathfrak{e}(n)$ に値を持つ 1 形式 θ が決まった．まったく同じように n 次元 Riemann 多様体 (M,g) にはその上の $O(n)$ 束 $O(M)$ と $\mathfrak{e}(n)$ に値を持つ 1 形式 ω が決まった．違うのは構造関数が $\mathbf{E}^n$ に対してはゼロとなっていることだけである．そして Riemann 空間はまったく非等質かもしれないが，群 $O(n)$ がやはり基本的な役割を演じているのである．

Cartan の思想は第 2 次世界大戦後 Ehresmann, Chern，倉西，Spencer らにより明確な概念に発展していったが，espace généralisé は今日の言葉では Cartan 接続を持つ空間のことである．上の例で見たように，Riemann 空間は Cartan 接続を持つ空間のもっとも簡単な例であるが，それが Cartan 接続を持つのは Levi-Civita 接続を持つことに由来し，Levi-Civita 接続を持つことは $\mathfrak{o}(V)$ の代数的な性質：その 1 回の prolongation が消えること (すなわち，階数付き Lie 代数 $\mathbf{R}^n \oplus \mathfrak{o}(n)$ の prolongation がそれ自身に一致すること）に由来している．Riemann 幾何を学んだ人には，上の構造方程式は Cartan 流の Riemann 曲率の定義として見慣れているものだが，そこには Klein 幾何から Cartan 幾何への飛躍があるのである．

Cartan 接続の次の例は共形構造に付随する Cartan 接続である．M 上の二つの Riemann 計量 g, g' は正の関数 ρ が存在して $g' = \rho g$ となるとき同値であるといい，その一つの同値類 $[g]$ を M 上の共形構造という．共形構造の典型的な等質空間は Möbius 空間である．射影空間 $P\mathbb{R}^{n+2}$ の中で

$$\sum_{k=1}^{n} (x^k)^2 - 2x^0x^{n+1} = 0$$

で定義される 2 次超曲面 Q は自然な平坦共形構造を持ち，

$$Q = L/G$$

と表せる．　ここで $L = O(n+1,1)$, G は　$[1,0,\ldots,0]$ を固定する部分群．L の Lie 代数 $\mathfrak{l}$ は階数付き Lie 代数 $\bigoplus \mathfrak{l}_p$ の構造を持つ：

$$\begin{aligned} \mathfrak{l} &= \mathfrak{l}_{-1} \oplus \mathfrak{l}_0 \oplus \mathfrak{l}_1 \\ &= \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{co}(n) \oplus (\mathbb{R}^n)^* \end{aligned}$$

そして G の Lie 代数は　$\mathfrak{l}_0 \oplus \mathfrak{l}_1 (= \mathfrak{co}(n) \oplus (\mathbb{R}^n)^*)$ である．Cartan によって既に知られていたのであるが，共形構造に対して $(\mathfrak{l}, G)$ タイプの Cartan 接続が canonical に構成できるのである．

ところでよく知られているように，M 上の共形構造と線形枠束 $F(M)$ の $CO(n)$ -部分束 $P^{(0)}$ とが 1 対 1 に対応する．従って共形構造に対して Cartan 接続を構成するためには次の図が可換となるようにバンドル P とその上の $\mathfrak{l}$ -valued 1-form ω を構成しなくてはならない．

$$\begin{tikzcd} P^{(0)} \arrow[d, "CO(n)=G^{(0)}"'] & P \arrow[l, "\phi^1 G"] \arrow[d, "G"] \\ M \arrow[r, equal] & M \end{tikzcd}$$

Riemann の場合はたまたま P が $P^{(0)}$ に一致したが，今度は新しくバンドル P を構成し，さらにその上に絶対平行性を与える微分形式 ω を構成しないといけないのである．Cartan 接続の構成はそれほど簡単ではない．実際 Cartan は共形構造，射影構造をはじめいろいろな幾何構造に対して巧妙で難解な計算を経て Cartan 接続を構成した．そのため長く一般の理解は得られなかった．Cartan 接続に関する本格的な研究は田中により進められた．彼は強擬凸 CR 構造に対して Cartan 接続の構成に成功し ([41], [43])，さらに進んで一般の階数付き単純 Lie 代数に付随する幾何構造に対して Cartan 接続を構成し [44]，微分方程式の幾何学的研究などに広く応用した．

しかしすべての幾何構造に対して Cartan 接続が作れる訳ではない．ではどのような幾何構造に対して Cartan 接続が構成できるのか．

truncated tower $P^{(k)}$ に対して，Cartan tower (P, ω) で truncation P/ϕ^{k+1} が $P^{(k)}$ に一致するものを canonical に構成できるための条件と構成方法を明らかすることが問題となる．

これに対して tower の考え方を用いて，Cartan 接続が構成できるためのほぼ best possible な条件とその統一的な構成方法を得た ([28])．そして新たな応用を見ている．

振り返ってみると，幾何構造の同値問題を考察していく中で tower の概念が生れたが，tower は Cartan 接続の自然な拡張になっている．タイプ $(\mathfrak{l}, G)$ の Cartan 空間 (P, ω) において $\mathfrak{l}$ を Lie 代数から加群 E へ，G を有限次元から無限次元へと解放することにより，Cartan 空間は tower へ広がる．tower は，一方では強い群論的な内部構造を持ち，他方では高い普遍性を獲得し，Lie-Klein 幾何，Cartan の espace généralisé, G 構造及び一般化された G 構造らすべての幾何構造をその tower の枠組の中に含んでいるのである．

3. フィルター付き多様体上の微分方程式

$(M, \mathfrak{f})$ をフィルター付き多様体とする．M 上のベクトル場 X に対して，X が $\mathfrak{f}^{-k}$ の切断のとき X の重み付き次数は k 以下であると定義し $w-ordX \leq k$ 書く．この定義は M 上の局所微分作用素に対しても自然に拡張される．この節ではフィルター付き多様体上の微分方程式をこの重み付き次数を用いて解析する．

今 $(M,\mathfrak{f})$ を３次元接触多様体として (x,y,z) をその局所座標で接触形式が

$$\omega = dz + \frac{1}{2}(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y})$$

で与えられているとする．

$$X = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}y\frac{\partial}{\partial z},\ Y = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}x\frac{\partial}{\partial z},\ Z = \frac{\partial}{\partial z}$$

とおくと，X,Y は $\mathfrak{f}^{-1}$ の切断で，重み付き次数は：

$$w-ordX = w-ordY = 1, w-ordZ = 2$$

さて次の二つの微分方程式を考えよう：

$$(1) \qquad (Z + aX^2 + bXY + cY^2)u + f = 0$$

$$(2) \qquad \begin{cases} (X^2 + a_1X + b_1Y + c_1)u + f_1 &= 0 \\ (Y^2 + a_2X + b_2Y + c_2)u + f_2 &= 0 \end{cases}$$

ここで $a,b,c,f,a_i,b_i.c_i,f_i\,(i=1,2)$ は x,y,z の関数とする．

これらの方程式は，共に重み付き次数２階の偏微分方程式であるが，解を持つだろうか．ここでは局所的な解を問題にする．

与えられた方程式を $X,Y,Z,X^2,XY,\ldots$ で次々微分していけば新たに高階の方程式が生成されもと方程式の解はそれらをも満たさないといけない．元の方程式にこのように微分した方程式を付け加えたものを元の方程式の prolongation と言う．これはすべての階数の微分を付け加えたものという意味で使う場合もあれば一階の prolongation, 二階の prolongation などと言い，一階までの微分を付け加えたもの，二階までの微分を付け加えたものを指すこともある．

微分方程式が M の一点 p の近傍で局所解 u を持つならば，その点において形式解を持たねばならない．形式解とは

$$(u(p),(Xu)(p),(Yu)(p),(X^2u)(p),\ldots)$$

とすべての微分の p における値の組で $(XYu)(p)-(YXu)(p)=(Zu)(p)$ など必要な交換関係をすべて満たし，かつ prologation のすべての方程式を p において満たすものである．

方程式 (2) の prolongation を少し計算してみると５階の微分はすべて

$$X^5u = \cdots, X^4Yu = \cdots, \ldots, YZ^2u = \cdots$$

ここで $\cdots$ は u の４階以下の微分であらわせる式，と書け，５階以上の微分はすべて４階までの微分で決まることになる．従って形式解の空間の次元は有限次元である．このようなものを有限型の方程式系という．

今の場合，$a_i = b_i = c_i = f_i = 0$ とすると形式解の自由度（次元）は８であることが分かる．しかしそうでない場合には prolongation の中にそれら係数に依存した関係式が現われ，解はそれらを満たさねばならないので，解の自由度はもっと小さくなりうるし，解が存在しないこ

ともある．このような関係式を両立条件（compatibility condition）という．

これに反して (1) の方程式の prolongation を計算すると，どの階数においても微分の値が一意に決まることはなくある自由度を持ち，形式解の空間が有限次元に止まらない．このような系を無限型という．

与えられた方程式系は有限型か無限型か，形式解が存在するかどうか．またそれを有限階までの情報だけで判定することができるだろうか，これらのことに対して明確な答えが形式理論によって与えられる．[30] に従ってその概略を見よう．

まず重み付きジェット束を定義しよう．

$(M, \mathfrak{f})$ をフィルター付き多様体とする．E は M 上のランク有限のベクトル束で部分ベクトル束の降下列

$$E = E^{\sigma} \supset \cdots \supset E^{p} \supset E^{p+1} \supset \cdots \supset E^{\tau+1} = 0$$

によってフィルター付けられているとする．簡単のため $\sigma = 0, \tau \geq 0$ とする．

整数 $k \geq 0$ に対して k 次の重み付きジェット束 $\mathcal{J}^{(k)}E$ を定義しよう：層 $\underline{E}$ の $a \in M$ での茎 $\underline{E}_a$ の部分空間 $\phi^{\ell}E$ を次の条件を満たす $s \in \underline{E}_a$ からなる集合とする：任意の微分作用素 P と $(E^{i+1})^{\perp}$ の切断 α が

$$w - ordP + i < \ell \quad ならば \quad (P\langle \alpha, s \rangle)_a = 0$$

そして次のように定義する．

$$\mathcal{J}^{(k)}E = \bigcup_{a \in M} \mathcal{J}_a^{(k)}E, \quad \mathcal{J}_a^{(k)}E = \underline{E}_a / \phi^{k+1}\underline{E}_a$$

$\mathcal{J}^{(k)}$ には次のような局所座標が入る．

M 上の局所ベクトル場の列 $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ が $(M, \mathfrak{f})$ の局所基であるとは任意の $p < 0$ に対して $\{X_1, \ldots, X_{rank\mathfrak{f}^p}\}$ が $\mathfrak{f}^p$ の局所基底となっていることであると定義する．multi-index $I = (i_1, \ldots, i_\ell)$, $1 \leq i_a \leq n$ に対して

$$w(I) = w - ordX_I, \ X_I = X_{i_1} \cdots X_{i_\ell}$$

とおく．

フィルター付きベクトル束の局所自明化

$$E^p = \bigoplus_{i \geq p} V_i \times M$$

をとり，E の切断 s を $u = (u_1, \ldots, u_\tau)$ (u_i はベクトル空間 V_i に値をとる関数) と表すことができる．x を M の局所座標とすると

$$(x, X_I u_q; w(I) + q \leq k)$$

が $\mathcal{J}^{(k)}E$ の局所座標を与える．ただし X_I たち の間には交換関係式があるので $X_I u$ たちはそれを満たしているとする．

$k \geq \ell$ ならば自然な射影 $\pi_{kl} : \mathcal{J}^{(k)}E \to \mathcal{J}^{(\ell)}E$ があり，その核として $\mathcal{J}^{(k)}E$ のフィルター $\phi\mathcal{J}^{(k)}E$ が定義される:

$$0 \to \phi^{\ell+1}\mathcal{J}^{(k)}E \to \mathcal{J}^{(k)}E \to \mathcal{J}^{(\ell)}E \to 0$$

特に $\phi^k\mathcal{J}^{(k)}E$ は $\mathcal{J}^{(k)}E$ のシンボルと呼ばれ次の完全列で明示的に表される：

$$0 \to \mathrm{Hom}(U(\mathrm{gr}\,\mathfrak{f}), \mathrm{gr}\,E)_k \to \mathcal{J}^{(k)}E \to \mathcal{J}^{(k-1)}E \to 0$$

ここで　$U(\mathrm{gr}\,\mathfrak{f})$ は　$\mathrm{gr}\,\mathfrak{f}_x$ の普遍被覆環 $U(\mathrm{gr}\,\mathfrak{f}_x)$ のなすバンドルで $\mathrm{Hom}(\cdot,\cdot)_k$ は degee k の元全体なすバンドルを表す．形式理論においてこの完全列が基本になる．

このように重み付きジェット束を定義すると，ジェット束の subvariety

$$\mathcal{J}^{(k)}E \supset R^{(k)}$$

が一般の重み付き次数 k 階の偏微分方程式系を表している．$R^{(k)}$ が部分ベクトル束のとき方程式系は線形である．

局所座標を用いれば $\mathcal{J}^{(k)}E$ 上のあるベクトル値関数 Φ を用いて

$$\Phi(x, X_I u_a; w(I) + a \leq k) = 0$$

と書き表せる．

以下，簡単のため線形方程式について述べる．非線形でも大して変わらないが記述に少し手数がかかるからでる．

一般にフィルター付きベクトル空間やベクトル束の対してそのフィルターを $E^k, \phi^k E, \phi^k$ などで表し，商空間 E/ϕ^{k+1} を $E^{(k)}$ で表す．また次の記法を使う．

$$\mathrm{gr}\,E = \bigoplus \mathrm{gr}_p\,E, \mathrm{gr}_p\,E = E^p/E^{p+1}$$

フィルター付き空間 E から F への写像 f が　$fE^k \subset F^{k+d}\,(\forall k)$ を見たすとき degree d の写像であるという．

一般に線形微分方程式系は次のような完全列で定義される：

$$0 \to R \to \mathcal{J}E \overset{\Phi}{\to} F$$

ここで，E, F はフィルター付き多様体 $(M, \mathfrak{f})$ 上のフィルター付きベクトル束で Φ は次数 d_0 のバンドル写像である．一般性を失うことなく，$E = E^0, F = F^0, d_0 = 0$ と仮定してよい．ある k_0 があって $\Phi(\phi^{k_0+1}\mathcal{J}E) = 0$ となっているとき，微分方程式系は k_0 階であるという．微分方程式系 R の解とは E の切断 s で js が R の切断になっているもの，すなわち，$\Phi(js) = 0$ をみたすものである．

微分方程式系 $0 \to R \to \mathcal{J}E \overset{\Phi}{\to} F$ は各 $k \geq 0$ に対して誘導写像：

$$0 \to R(k) \to \mathcal{J}^{(k)}E \overset{\Phi^{(k)}}{\to} F^{(k)}$$

によって k 階の微分方程式系 $R(k)$ を定めている．局所座標では

$$\Phi_k(x, X_I u_a; a + w(I) \leq k) = 0$$

の形の式で定義される．このように Φ は単にその核とし微分方程式系 R を決めているだけでなく各 k 階の微分方程式系 $R(k)$ への階層分けも指定しているのである．射影 $R(k) \to R(k-1)$ は必ずしも全射ではないことに注意する．

完全列：

$$0 \to \sigma_k(R) \to R(k) \to R(k-1)$$

により　$\sigma_k(R) \subset \mathrm{Hom}(U(\mathrm{gr}\,\mathfrak{f}), \mathrm{gr}\,E)_k$ 定め $\sigma(R) = \bigoplus \sigma_k(R)$ を R のシンボルという．($\sigma(R)$ は Φ による上述の階層分けに依存しているのでむしろ $\sigma(\Phi)$ あるいは $\sigma(R, \Phi)$ と書く方がいいかもしれないが.)

フィルターを保つバンドル写像 $\alpha : E \to F$ は

$$j\alpha : \mathcal{J}E \to \mathcal{J}F$$

を導く．また ジェット写像 $\underline{E} \xrightarrow{j} \underline{\mathcal{J}E}$ は degree 0 の canonical inclusion

$$\iota : \mathcal{J}E \to \mathcal{J}\mathcal{J}E$$

を導くことに注意する．

微分方程式：

$$0 \to R \to \mathcal{J}E \xrightarrow{\Phi} F$$

に対して次の写像が導かれる：

$$0 \to \mathrm{Prol}\,R \to \mathcal{J}E \xrightarrow{\mathrm{Prol}\,\Phi} \mathcal{J}F$$

ここで $\mathrm{Prol}\,\Phi$ は次の写像の合成である：

$$\mathrm{Prol}\,\Phi : \mathcal{J}E \xrightarrow{\iota} \mathcal{J}\mathcal{J}E \xrightarrow{j\Phi} \mathcal{J}F$$

$Prol\Phi, \mathrm{Prol}\,R$ をそれぞれ Φ, R の prolongation という．

$$\mathrm{Prol}\,R \subset R, \mathrm{Prol}\,\mathrm{Prol}\,R = \mathrm{Prol}\,R$$

が成り立つことに注意する．

次のことが基本的である：

$$s \in \Gamma(E) \text{ は } R \text{ の解} \iff s \in \Gamma(R) \iff s \in \Gamma(\mathrm{Prol}\,R)$$

さらに点 $x_0 \in M$ における無限階のジェット $\eta \in \mathcal{J}_{x_0}E$ が R の形式解であるとは η によって決まる形式的巾級数が形式的に R の解になっているということである．それは $\mathrm{Prol}\,R$ を用いると次のように言える：

$$\eta \in \mathcal{J}_{x_0}E \text{ が } R \text{ の形式解} \iff \eta \in (\mathrm{Prol}\,R)_{x_0}$$

また次の定義もしておこう：

$$\eta^{(k)} \in \mathcal{J}^{(k)}_{x_0}E \text{ が } R \text{ の } k \text{ ジェット解} \overset{def}{\iff} \eta^{(k)} \in (\mathrm{Prol}\,R)(k)_{x_0}$$

定義 13. 微分方程式系 R が次を満たすとき，階数 k において形式的可解 (formally integable) であるという：

i) 任意の $\ell \geq k$ に対して $\mathrm{Prol}(R)(\ell+1) \to \mathrm{Prol}(R)(\ell)$ は全射．
すなわち，任意の ℓ ジェット解に対してそれを初期値とする形式解が存在するということ．

ii) 任意の $\ell \geq k$ に対して $\mathrm{Prol}(R)(\ell)$ はベクトル束である．

以下，$\mathrm{Prol}\,R$, $\mathrm{Prol}\,\Phi$ をそれぞれ $\bar{R}, \bar{\Phi}$ と書く．

微分方程式系が形式的可解となるための条件を明らかにしよう．
まず次のことが基本となる．

命題 2. 微分方程式系 R に対してその延長 $\bar{R} = \mathrm{Prol}\,R$ のシンボル $\sigma(\bar{R}) \subset \mathrm{Hom}(U(\mathrm{gr}\,\mathfrak{f}), grE)$ は $U(\mathrm{gr}\,\mathfrak{f})$-右加群となる．

右加群から左加群にスイッチして $gr\mathfrak{f}$ の $\sigma(\bar{R})$ への表現 が得られる．この表現に関する Spencer cohomology group を $H^p_r(\mathrm{gr}\, f, \sigma(\bar{R}))$ で表す．

第２節で Spencer cohomology group の有限次元性について述べたが，その一様性も成り立つ．

定理 4. R は有限階の微分方程式系とする．任意の $x_0 \in M$ に対して x_0 の近傍 $\mathcal{U}$ と整数 r_0 が存在して，すべての $r \geq r_0, p \geq 0, x \in \mathcal{U}$ に対して

$$H^p_r(\mathrm{gr}\, \mathfrak{f}_x, (\sigma\bar{R})_x) = 0$$

が成り立つ．

そして形式理論の主定理は次のように述べられる．

定理 5. $0 \to R \to \mathcal{J}E \overset{\Phi}{\to} F$ を深さ μ のフィルター付き多様体 $(M, \mathfrak{f})$ 上の k_0 階の微分方程式系とする．その延長 $\bar{R}$ に対してある整数 $\ell_0 \geq k$ が存在して次の条件を満たすとする．

i) $\bar{R}(i)$ $(i = \ell_0, \ell_0 - 1, \cdots, \ell_0 - \mu)$ はベクトル束である．
ii) $\bar{R}(\ell_0) \to R(\ell_0 - 1) \to \cdots \to \bar{R}(\ell_0 - \mu)$ はすべて全射．
iii) $H^2_r(\mathrm{gr}\, \mathfrak{f}, \sigma(\bar{R})) = 0 \quad (r > \ell_0)$

このときすべての $\ell \geq \ell_0 - \mu$ について $\bar{R}^{(\ell)}$ はベクトル束で $\bar{R}(\ell+1) \to \bar{R}(\ell)$ は全射である．従って任意の $a \in M, \ell \geq \ell_0 - \mu, \eta \in \bar{R}(\ell)_a$ に対して R の形式解 $\hat{u}$ で $j^\ell_a \hat{u} = \eta$ を満たすものが存在する．

この定理は形式解を求める方法を明らかにする．形式解を構成するには各階の係数を次々決めないといけないので無限 の操作を必要とするが，有限回の操作の後，ある然るべき検証可能な条件が満たされていれば，その後形式解の係数が決めていくのにいかなる障害も生じないということをその有限階の段階で保証する定理である．証明は Goldschmidt [15] によって展開された通常の場合の形式理論を巾零版に拡張して得られる．

定理の仮定が満たされているとき，方程式系 $\bar{R}$ は次数 ℓ_0 において重み付き包合的であるという．

定義 14. 微分方程式系 R に対してある整数 p_0 が存在して $\sigma_p(\mathrm{Prol}\, R) = 0 \quad p \geq p_0$ が成り立つとき R は階数 p_0 において有限型であるという．

k 階の微分方程式 R: $0 \to R \to \mathcal{J}E \overset{\Phi}{\to} F$ の微分方程式としての解析的な prolongation とシンボルの代数的な prolongation が対応し

$$\sigma(\mathrm{Prol}(R)) = \mathrm{Prol}(\sigma^{(k)}(\mathrm{Prol}(R))$$

が成り立つ．従って k 階の微分方程式系が有限型かどうかは $\mathrm{Prol}\, R$ の k 階までのシンボルから純代数的に判定できる事柄である．

例 5. $\mathfrak{g}_- = \bigoplus_{p<0} \mathfrak{g}_p < 0$ を階数付き巾零 Lie 代数とし，$\mathfrak{g}_{-1}$ から生成されているとする．η を　$\mathfrak{g}_{-1}$ の正定値対称２次形式とする．組 $(\mathfrak{g}_-, \eta)$ を subRiemann シンボルという．$A \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_-)_0$ で次を満たすもの

全体を $\mathfrak{g}_0(\mathfrak{g}_-,\eta)$ とする．

(3) $$[Ax,y]+[x,Ay]-A[x,y] = 0, \quad \forall x,y\in\mathfrak{g}_-$$

(4) $$\eta(Au,v)+\eta(u,Av) = 0, \quad \forall u,v\in\mathfrak{g}_{-1}$$

そうすると $\mathfrak{g}^{(0)}(\mathfrak{g}_-,\eta)=\mathfrak{g}_-\oplus\mathfrak{g}_0(\mathfrak{g}_-,\eta)$ は階数付き Lie 代数になる．

命題 3. $(\mathfrak{g}_-,\eta)$ は *subRiemann* シンボルとし，$\mathfrak{g}_-$ は $\mathfrak{g}_{-1}$ から生成されているとすると，

$$\mathrm{Prol}\,\mathfrak{g}^{(0)}(\mathfrak{g}_-,\eta)=\mathfrak{g}^{(0)}(\mathfrak{g}_-,\eta)$$

即ち　$\mathrm{Prol}(\mathfrak{g}^{(0)}(\mathfrak{g}_-,\eta))_k=0\ \forall k>0$.

この命題は $\mathfrak{g}_-=\mathfrak{g}_{-1}=V$ となる場合は，$\mathfrak{o}(V)$ の prolongation が消えるというよく知られた事実を意味している．一般の場合証明 [32] は八ツ井の Lie 代数に関する専門的な結果 [49] を使うので初等的ではない．η が不定値のとき，Riemann の場合と異なり，命題は一般に正しくないことに注意しておく．

有限型の微分方程式の解法について考えてみよう．深さ μ のフィルター付き多様体 $(M,\mathfrak{f})$ 上で k 階の微分方程式系 R が与えられたとする．その prolongation を $\bar{R}$ とする．勿論一気に $\bar{R}$ が計算出来る訳はないので低階から順番に見ていくのである．今 $p_0\geq k$ において

$$\sigma_{p_0}\bar{R}=0$$

となったとしょう．次々同様の事が起こるとは限らないが，うまい具合に

$$\sigma_{p_0+i}\bar{R}=0 \quad (i=0,1,\ldots,\mu-1)$$

となったとする．すると代数的な prolongation の定義からすぐわかるようにそれ以降シンボルはすべて消える：

$$\sigma_{p_0+i}\bar{R}=0 \quad (i\geq 0)$$

さらに高次の prolongation をつぎつぎ調べ，

$$\bar{R}^{(p_0+\mu+i)}\to\bar{R}^{(p_0+\mu+i-1)} \quad (i=0,1,\ldots,\mu-1)$$

が全射になっているかどうかを見る．これは両立条件をチェックしていることに当たる．これらがすべて全射になっていたとしょう．さらに $\bar{R}^{(i)}\,(p_0+\mu\leq i\leq p_0+2\mu-1)$ はすべて regular すなわちベクトル束になっているとする．$\ell_0=p_0+2\mu-1$ とおくと，$\bar{R}$ は次数 ℓ_0 で重み付き包合的となる．何故なら

$$\mathrm{Hom}(\wedge^2\mathrm{gr}\,\mathfrak{f},\sigma\bar{R})^{(\ell)}=0\,(\ell>\ell_0)$$

従って

$$\bar{R}^{(p_0+2\mu+i)}\to\bar{R}^{(p_0+2\mu+i-1)} \quad (i\geq= 0)$$

がすべて自動的にベクトル束の全射になるのである．つまりこれ以降両立条件のチェック不用ということである．

形式的可解な有限型重み付き包合的な微分方程式は最終的には重み付きから重みなしに移行して Frobenius の定理を用いて常微分方程式を解くことによりその解が求められる．

有限型ならば必ずしも形式的可解という正則性の条件がなくとも次のことが言える.

定理 6. R をフィルター付き多様体 $(M,\mathfrak{f})$ 上の微分方程式系とする. その延長 $\bar{R}$ が有限型とし $\sigma_p\bar{R}=0\,(p>p_0)$ とする. $a\in M,\eta\in\bar{R}_a^{(p_0)}$ に対して $j_a^k u=\eta$ を満たす R の解 u が存在すれば局所的に一意的であり, 常微分方程式を解くことにより得られる.

$\bar{R}$ が ℓ_0 次で有限型重み付き包合的ならば, 任意の $a\in M,\eta\in\bar{R}_a^{(\ell_0)}$ に対して $j_a^{\ell_0}u=\eta$ を満たす R の解 u が局所的に一意的に存在し, その解は常微分方程式を解くことにより得られる.

以上は C^∞ , 解析的どちらのカテゴリーでも成り立つ.

系 1. $(M,\mathfrak{f},\sigma)$ は *subRiemann* フィルター付き多様体とし, *Hörmander* 条件を満たすとする. すなわち $\mathfrak{f}$ は $\mathfrak{f}_{-1}$ で生成されているとする. このとき　$(M,\mathfrak{f},\sigma)$ の同型写像 (すなわち等長写像) の全体のなす集合 $\mathrm{Aut}(M,\mathfrak{f},\sigma)$ は有限次元の *Lie* 群になり　その次元は

$$\dim M+\dim\mathrm{Prol}(\mathfrak{g}^{(0)}(gr\mathfrak{f}_x,\sigma_x))$$

を超えない.

subRiemann 構造 $(M,\mathfrak{f},\sigma)$ の無限小自己同型を定義する微分方程式系は $(M,\mathfrak{f})$ 上のフィルター付きベクトル束 TM の切断に対する微分方程式系 R として重み付きジェット束 $\mathcal{J}TM$ の中で書き表すのが最も適切である. そうすると, $\mathrm{Prol}\,R$ のシンボルは SubRiemann シンボルの prolongation に一致するのであり, 系が導かれる.

有限系包合的な微分方程式の解法は比較的簡単で常微分方程式に帰した. しかし無限型のときはそう簡単ではない. フィルターが自明で重みがないときは通常の Cartan-Kähler の定理により解析的カテゴリーで解析的な局所解を持つ. しかし重み付きでは事情が違う. 例えば:

$$(\frac{\partial}{\partial t}+a(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x^2})u=f(t,x) \tag{5}$$

原点 o のまわりでこの方程式を考えよう. $a(o)=0$ とするとこの方程式は Kowalevsky 型ではなく普通の意味で包合的ではない. 従って解析的な解は期待できない. 実際, a,f を適当にとるとどの形式解も発散し, 収束解が存在しないのである.

しかし $w-ord\frac{\partial}{\partial t}=2,w-ord\frac{\partial}{\partial x}=1$ の重み付き次数で考えると上の方程式は重み付きの意味で包合的である.

従って重み付き包合的な方程式は必ずしも収束解を持たないことが分かる.

しかしながら次の評価を持つような形式解が存在することを証明できる: $C,\rho>0$ が存在して

$$|((\frac{\partial}{\partial t})^i(\frac{\partial}{\partial x})^j u)(o)|\leq(2i+j)!C\rho^{2i+j} \tag{6}$$

右辺に現れる $(2i+j)!$ に注意頂きたい. これが $(i+j)!$ ならば形式解は収束する. これは解析的より少し弱い評価である. これを形式的 Gevrey 評価と呼ぼう.

単独方程式は重み付きの意味で最高階の微分の一つで解けた形に書けるならば重み付き包合的である．従って(1)の方程式は$a(o) = b(o) = c(o) = 0$ならば普通の意味でその点で包合的ではない．しかし重み付きの意味ではa, b, cの値に関わらず常に包合的である．では，微分方程式(1)に対して形式解$\hat{u}$で次の評価を持つものが存在するのではないだろうか．

$$|X^i Y^j Z^k \hat{u}(o)| \leq (i+j+2k)! C \rho^{i+j+2k} \tag{7}$$

これを期待して解析の専門家にあちこち聞いた．特にStrasbourgのRaymond Gerardは興味を持って熱心に計算してくれたが，評価が成り立つかどうか非常に微妙だということだった．

ところが結局，問題を最も一般的な形で考えることにより問題は解決した．

定義 15. $(M, \mathfrak{f})$を解析的なフィルター付き多様体とする．一点$o \in M$における形式巾級数$\hat{u}$が形式的Gevrey関数とは，oの近傍での$(M, \mathfrak{f})$の局所基$\{X_1, \ldots, X_n\}$に対して次の評価を持つことである：

$$|(X_I \hat{u})(o)| \leq C w(I)! \rho^{w(I)}, \tag{8}$$

がすべての$I = (i_1, i_2, \ldots, i_k) \in \{1, 2, \ldots, n\}^k, \forall k \geq 0$に対して成り立つ．ただしここで$C, \rho$は$I$に関係しないある正の定数である．

そして次の定理を得た：

定理 7. $(M, \mathfrak{f})$を解析的なフィルター付き多様体とする．Rを$(M, \mathfrak{f})$上の微分方程式系とし，その延長$\bar{R}$は次数ℓ_0で重み付き包合的とする．そうすると任意の$a \in M$, $\eta \in \bar{R}_a^{(\ell_0)}$に対して$a$における形式*Gevrey*関数$\hat{u}$で，$R$の形式解で$i_a^{\ell_0} \hat{u} = \eta$を満たすものが存在する．

Malgrangeは通常のCartan-Kählerの定理をprivileged neighbourhood theoremを用いて別証明を与えている．そのnilpotent versionへの拡張により上の定理の証明が得られる．特に，privileged nbd theoremは，岡に発すると言われているが，Grauertによって得られ，Malgrangeにより改良されいろいろ応用された．それは収束巾級数環に関する定理で形式解から収束解を構成するのに有力な方法を提供する．ここではそれを巾零環の普遍展開環に拡張しそれを用いるのである．

では形式Gevrey関数とは実際どんなものだろうか．解析関数とはどれくらい違うものだろうか．3次元接触多様体で見てみよう．ここでの形式的Gevrey評価式(7)を見てみると，X, Yによって張られるcontact distribution $D = \mathfrak{f}^{-1}$の原点を通る任意の積分曲線$\gamma(t)$に沿って$\hat{u} \circ \gamma$は原点の近傍で収束する．Dの積分曲線はx, y, z空間の中で原点では常にxy平面に接している．しかし空間の任意の点が積分曲線により原点と結べる．ちょうど原点から滑走して離陸する飛行機のようなものである．垂直にはまっすぐ上がれないがぐるっと回ればどこえでも行けるのである．このような描像からこの空間での形式Gevrey関数は解析関数に非常に近いものに思われる．

このことからフィルター付き多様体 $(M, \mathfrak{f})$ に subRiemann 計量を入れ，$\mathfrak{f}^{-1}$ の積分曲線に沿って解析的な関数を，subRiemann 幾何を用いて，特にその指数写像を用いいて，解析するということへと導かれた．

$(M, \mathfrak{f}, \sigma)$ は解析的な subRiemann 多様体で bracket generating とする．$x_0 \in M$ からの指数写像

$$exp : T^*_{x_0}M \to M$$

を考えると，次が証明される．

定理 8. *$\hat{u}$ が x_0 において形式的 Gevrey 関数ならば $(exp)^*\hat{u}$ は原点の近傍で収束する．*

これから驚くべきことに次の定理が証明される．

定理 9. *解析的なフィルター付き多様体が Hörmander 条件を満たしているならば，その上の形式 Gevrey 関数は収束し解析的関数である．*

この定理は上の定理と次の二つの定理から導かれる．

定理 10. *(M, D, σ) を解析的 subRiemann 多様体とし，D は bracket generating である（Hörmander 条件を満たす）とする．一点 x_0 での余接空間からの subriemannnian exponential map $exp : T^*_{x_0}M \to M$ は generically maximal rank である．*

この定理は最初当然の事実とみなしていたが，subRiemann 幾何においてしばしば陥る陥穽で，Riemann 幾何の常識がそのまま通用しないことが多いのである．Agrachev と SISSA で議論を重ねたが， この定理は，subRiemann 幾何のいくつかの基本予想と同値になり，極めて微妙であったが，最終的に Agrachev が証明に成功した ([1]).

定理 11. *$f : X \to Y$ を解析空間 X から Y への解析写像とし，generically maximal rank とする．y_0 における形式巾級数 w に対して，$x_0 \in f^{-1}(y_0)$ が存在して，$w \circ f$ が x_0 において収束するなら，w は収束する．*

この定理は難解と言われている Gabrièlov の定理である ([14])．その厳密な証明は泉 [17] によって与えられている．[形式的 Gevrey 関数についていろいろ考えていた頃，数学会でたまたま泉さんに会いその話をしたところ，この Gabrièlov の定理を教えられびっくりした．もともと解析的な解まで存在するとは思っていなかったので，Gabrièlov の定理は直ぐには受け入れがたいものであった.] Gablièlov の定理を認めれば次の定理が得られる：

定理 12. *$(M, \mathfrak{f})$ を解析的なフィルター付き多様体とし Hörmander 条件を満たすとする．R を $(M, \mathfrak{f})$ 上の微分方程式系とし，その延長 $\bar{R}$ は次数 ℓ_0 で重み付き包合的とする．そうすると任意の $a \in M$, $\eta \in \bar{R}^{(\ell_0)}_a$ に対して a における解析的関数 u で，R の解で $j^{\ell_0}_a u = \eta$ を満たすものが存在する．*

この定理により，例として挙げた方程式 (1) は任意の 2 ジェット解に対してそれを初期値とする収束解が存在するのである．このことは，このような単独方程式においても驚きであったが，定理は，特異点をも

許容する非常に広いクラスの微分方程式系に対して一般に成り立つのである．

4. 線形微分方程式系と外在的幾何

4.1. 有限型微分方程式系の元素． 前節で微分方程式系を概観した．その中で有限型と無限型の大きな違いも見た．微分方程式系が与えられるとそれが有限型かどうかは原理的には計算可能である．しかし大抵の場合計算は複雑でほとんど実行不可能である．そこでむしろ有限型の微分方程式系を系統的に構成する方法を考えよう．

われわれの最初の着想は：⟨⟨ 有限型の微分方程式系のモデルは組 $(\mathfrak{g}, V)$ で与えられその微分方程式系は $H^1(\mathrm{gr}\, g_-, V)$ で定義される．ここで $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}_p$ は推移的な階数付き Lie 代数 (TGLA), $V = \bigoplus V_q$ は有限次元階数付き $\mathfrak{g}$ 加群である ⟩⟩ ということであった ([31])．これにより元素となるべき典型的な有限型の微分方程式系が系統的に構成され，一般のものはそこからの変形として捉えることができるのである．

この考えに立ったとき，そこから新しい問題が次々と出てくる．組 $(\mathfrak{g}, V)$ は $\mathfrak{g}$ を単純 Lie 代数に限定してもそれだけでも多様で，それに応じてそれぞれのタイプの有限型の微分方程式系があり，それらの性質，相互の関係を見ていくだけでも，各論一般論の双方に様々な問題が提起される．

また非常に重要なことは，形式的可積分な有限型線形微分方程式系の幾何と旗多様体での外在的幾何はカテゴリーとして同型であるということである．これにより微分方程式からの見方と外在的幾何からの見方が相補していろいろなことがよく見えてくるのである．

4.2. 外在的幾何． L を Lie 群，L^0 をその閉部分群とする．Lie 群 L は等質空間 L/L^0 に変換群として作用している．等質空間の部分多様体のその作用で不変な性質を扱うのが外在的幾何である．特に，同値問題は，内在的幾何と同じく外在的幾何においても重要かつ基本的である：

外在的幾何における同値問題：$\varphi_i : (M_i, \mathfrak{f}_i) \to L/L^0$ $(i = 1, 2)$ はフィルター付き多様体 $(M_i, \mathfrak{f}_i)$ から L/L^0 への写像とする．このとき同相写像 $h : (M_1, \mathfrak{f}_1) \to (M_2, \mathfrak{f}_2)$ と群 L の元 a で $\lambda_a \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ h$ を満たすものが存在するか．またこれを判定するための不変量を求めよ．

ここで λ_a は群の左作用を表す．Source space はフィルター付き多様体であるとしたが，フィルターが自明なときはただの多様体である．写像 φ_i は単に写像としたが，大抵，埋め込みかはめ込みになるものを扱う．また同値問題でまず問題とするのは局所同値問題である．

例えば 3 次元ユークリッド空間の中の曲面のユークリッド運動群 $\mathcal{E}(n)$ の作用で不変な性質を調べること，あるいは射影空間の中の曲線の射影変換で不変な性質を調べること等々，様々な外在的幾何があり，それぞれにおいて詳しい研究が重ねられ，幾何の豊かな彩りを成している．

しかしそれらを貫く共通の原理はないのだろうか，とかねがね思っていたが，ちょうど有限型の線形微分方程式系の幾何を考えたとき，その幾何学的バージョンとして外在的幾何の同値問題を一般的な設定の中で考察することに導かれた．

まず旗多様体 の外在的幾何が基本となる．他の多くの外在的幾何はその特殊化あるいはバリエーションとして捉えられる．

旗多様体については既に第1節で簡単に述べたが，記号などもう一度整理しておこう．

V を $\mathbf{R}$ または $\mathbf{C}$ 上の有限次元のベクトル空間とする．V の部分空間の列 $\{\phi^p\}_{p\in\mathbf{Z}}$ で $\phi^p \supset \phi^{p+1}$ を満たすものを V のフィルターと呼び，単に ϕ と書く．二つのフィルター ϕ_1 と ϕ_2 が同型（または同値）とは，V の線形自己同型写像 f で $f\phi_1^p = \phi_2^p$ $(\forall p \in \mathbf{Z})$ を満たすものが存在するときであるとする．V のフィルター全体のなす集合を $Flag(V)$ と書き，あるフィルター ϕ に同型なフィルター全体の集合を $Flag(V,\phi)$ と表す．一般線形群 $GL(V)$ は自然な方法で $Flag(V)$ に作用しているが，$Flag(V,\phi)$ は ϕ を通る軌道であり，等質空間 $GL(V)/\phi^0GL(V)$ と同一視でき解析的多様体である．ここで $\phi^0GL(V)$ はフィルター ϕ を保つ V の線形自己同型全体のなす $GL(V)$ の部分群である．

また $\phi \in \mathrm{Flag}(V)$ に対して　$\phi^\perp \in \mathrm{Flag}(V^*)$ を次のように決める：

$$\phi^{\perp p} = (\phi^{p'})^\perp \quad (p + p' = 1)$$

このように階数を決めると，次が成り立つ：

$$\mathrm{gr}\,\phi^\perp \equiv (\mathrm{gr}\,\phi)^*$$

ただし

$$\mathrm{gr}\,\phi = \bigoplus \mathrm{gr}_p\,\phi, \quad \mathrm{gr}_p\,\phi = \phi^p/\phi^{p+1}$$

また階数付きベクトル空間 $V = \bigoplus V_p$ に対してその双対は

$$V^* = \bigoplus V_p^*, \quad V_p^* = (V_{-p})^*$$

と決める．

さて $Flag(V,\phi)$ の外在的幾何において次の定義が基本となる．

定義 16. フィルター付き多様体 $(M,\mathfrak{f})$ から $\mathrm{Flag}(V,\phi)$ への微分可能写像 $\varphi : (M,\mathfrak{f}) \to Flag(V,\phi)$ は．条件：

$$\underline{\mathfrak{f}^p}\,\underline{\varphi^q} \subset \underline{\varphi^{p+q}}$$

を満たすとき osculating であるという．

ここで φ^q は $\varphi^q(x)$ を $x \in M$ 上のファイバーとするベクトル束，$\underline{\varphi^q}$ はその切断のなす層を表し，式の左辺の積は微分を表す．

$gr\varphi = \bigoplus gr_p\varphi$ は M 上のベクトル束であるが，次が成り立つ．

命題 4. $\varphi : (M,\mathfrak{f}) \to \mathrm{Flag}(V)$ は *osculating* とすると，$\mathrm{gr}\,\varphi$ は $\mathrm{gr}\,\mathfrak{f}$ 左加群となる．$gr\varphi_x$ を φ の $x \in M$ でのシンボルという．

定義 17. Osculating map $\varphi : (M,\mathfrak{f}) \to Flag(V,\varphi)$ が 定シンボル $(V,\mathfrak{n})$ を持つとは，階数付き巾零 Lie 代数 $\mathfrak{n}$ と階数付き $\mathfrak{n}$ 加群 $(V,\mathfrak{n})$ が存在してすべての $x \in M$ に対して $(gr\varphi_x, gr\mathfrak{f}_x)$ は加群として　$(V,\mathfrak{n})$ と同型となることである．

すなわち，次の図式を可換とするような次数を保つ線形同型写像 α : $gr\phi \to gr\varphi(x)$ と次数を保つ Lie 代数の同型写像 $\beta : \mathfrak{g}_- \to gr\mathfrak{f}_x$ が存在することである．

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{n} \times gr\phi & \longrightarrow & gr\phi \\ {\scriptstyle \beta\times\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ gr\mathfrak{f}_x \times gr\varphi(x) & \longrightarrow & gr\varphi(x) \end{array}$$

さて，$(\mathfrak{g}, V)$ を TGLA $\mathfrak{g}$ と階数付き $\mathfrak{g}$ 加群 V の組とする．$\mathfrak{g}$ を Lie 代数に持つ単連結 Lie 群を G とする．V のフィルター ϕ を $\phi^p = \bigoplus_{\ell \geq p} \mathfrak{g}_\ell$ で決める．写像 $G \ni a \longmapsto a\phi \in \mathrm{Flag}(V, \phi)$ は

$$\varphi_{(\mathfrak{g},V)} : G/\phi^0 G \to \mathrm{Flag}(V, \phi)$$

を導く．ここで $\phi^0 G$ は ϕ を固定する G の元全体からなる G の閉部分群で $\phi^0\mathfrak{g} = \bigoplus_{p\geq 0} \mathfrak{g}_p$ を Lie 代数に持つ．

この等質空間 $G/\phi^0 G$ は左不変な接フィルター $\mathfrak{f}$ を持っていて容易に確かめられるように，この写像 $\varphi_{(\mathfrak{g},V)}$ は osculating であり，定シンボル $(V, \mathfrak{g}_-)$ を持っている．これをタイプ $(V, \mathfrak{g}_-)$ の標準的埋め込みという．

定シンボル $(V, \mathfrak{g}_-)$ を持つ osculating map $\varphi : (M, \mathfrak{f}) \to Flag(V, \phi)$ は上に述べた標準的なものに同型になるだろうか．φ のシンボルはその 1 次の不変量であるが，さらに高次の不変量はどのように求められるだろうか．それについては後で述べる．その前に旗多様体の外在的幾何と線形微分方程式系の関係を見ておこう．

4.3. 旗多様体と線形微分方程式系．

$\underline{\varphi : (M, \mathfrak{f}) \to \mathrm{Flag}(V) \text{ から微分方程式系 } R.}$ 簡単のため，$\varphi^0 = V$, $\varphi^{r+1} = 0$ とする．φ^p は各 $x \in M$ にベクトル空間 $\varphi^p(x)$ が乗っているベクトル空間の束であると見られるが，それらの次元が一定ならば M 上のベクトル束である．今，φ^1 はベクトル束であるとすると，$\varphi^{(0)} = V/\varphi^1$ も M 上のベクトル束である．

$$\gamma : V \to \Gamma(\varphi^{(0)}); \quad \gamma(v)(x) \equiv v \mod \varphi^1(x),\ v \in V, x \in M$$

と定義する．φ^1 が generic ならば γ は単射である．この $V = \gamma(V)$ を解空間とする微分方程式系 R を φ に対応させるのである．それを具体的に表現するのには，各 $x \in M$ に対して

$$V \to \Gamma(\varphi^{(0)}) \to \mathcal{J}_x\varphi^{(0)}$$

の像を R_x とおけばよい．然るべき正則性の条件の下では各 $R^{(k)}$ はすべてベクトル束になりある整数 k_0 が存在して

$$V \xrightarrow{\cong} R_x \xrightarrow{\cong} R_x^{(\ell)} \xrightarrow{\cong} R_x^{(k_0)} \quad (\ell > k_0)$$

従って R は有限型で形式的可積分である．

正則性の条件として，例えば φ は osculating で

$$H^0_r(\mathrm{gr}\,\mathfrak{f}, \mathrm{gr}\,\varphi) = 0 \quad (r > 0)$$

であるとすれば，R に対する上の主張が成り立ち，さらに $R^p = \varphi^p$ が成り立つ．

R をベクトル束 $\varphi^{(0)}$ の切断に対する微分方程式として定義したが，これは $\varphi^{(0)}$ だけから決まるのでこの微分方程式を $R(\varphi^{(0)})$ と表すならば，$\ell > 0$ に対しても同様に $R(\varphi^{(\ell)})$ が定義できるが，これは $R(\varphi^{(0)})$ の微分方程式としての延長になっていて同じ解を与える．

微分方程式系 R から $\Phi : (M, \mathfrak{f}) \to \mathrm{Flag}(V)$. $(M, \mathfrak{f})$ を単連結で連結なフィルター付き多様体とする．$(E, \{E^p\})$ を $(M, \mathfrak{f})$ 上のフィルター付きベクトル束で $E = E^0 \supset E^p \supset E^{\nu_0+1} = 0$ とする．$R \subset \mathcal{J}E$ は有限型で形式的可積分，$\mathrm{Prol}(R) = R$ とするとその解空間 $Sol(R)$ は有限次元で k_0 が存在して，任意の $x \in M$ に対して

$$Sol(R) \xrightarrow{\cong} R_x \xrightarrow{\cong} R_x^{(\ell)} \xrightarrow{\cong} R_x^{(k_0)} \quad (\ell > k_0)$$

となる．各 $x \in M$ に対して $Sol(R)$ の二つフィルター $\Phi_{\mathrm{ev}}(x)$，$\Phi_{\mathrm{jet}}(x)$ を次のように定義する．

$$0 \to \Phi_{\mathrm{ev}}^{p+1}(x) \to Sol(R) \xrightarrow{ev} E_x^{(p)} \tag{9}$$

$$0 \to \Phi_{\mathrm{jet}}^{p+1}(x) \to Sol(R) \xrightarrow{jet} \mathcal{J}_x^{(p)}E \tag{10}$$

$V = Sol(R)$ とおくと写像 Φ_{ev}，$\Phi_{\mathrm{jet}} : (M, \mathfrak{f}) \to \mathrm{Flag}(V)$ が得られるが，これらに対応する微分方程式は R に一致する：

$$R(\Phi_{\mathrm{ev}}^{(\nu_0)}) = R, \quad R(\Phi_{\mathrm{jet}}^{(\ell)}) = R \ (\ell \geq \nu_0)$$

この R と φ の対応は R, R' にそれぞれ φ, φ' が対応するならば，

$$R \text{ と } R' \text{ が同値} \Longleftrightarrow \varphi \text{ と } \varphi' \text{ が同値}$$

と同値関係を保つのである．

第2節で $\mathrm{Prol}(R) = R$ となる微分方程式系のシンボル $\sigma(R)$ は $\mathrm{gr}\,\mathfrak{f}$ 右加群であるといった．一方 R に対応する $\Phi_{\mathrm{jet}}(x)$ のシンボル $\mathrm{gr}\,\Phi_{\mathrm{jet}}(x)$ は $\mathrm{gr}\,\mathfrak{f}$ 左加群になるが，符号を変えて右から左へ移行すれば二つは一致する．微分方程式系 R に対応する旗多様体への埋め込みとして $\Phi_{\mathrm{jet}}(x)$ の双対 $\Phi_{\mathrm{jet}}(x)^{\perp}$ をとる方が自然と考えることもできる．

このようにして有限型形式的可積分な線形微分方程式系の幾何と旗多様体の外在的幾何が対応したが，これを用いると，$(\mathfrak{g}, V)$ に対応する標準的な微分方程式系とは,$(\mathfrak{g}, V)$ に対応する標準的な埋め込みから決まる G/G^0 上の微分方程式系であると定めればよい: ν_0 は

$$H_r^0(\mathfrak{g}_-, V) = 0 \ (r > \nu_0)$$

を満たす数とすると，φ^{ν_0} から決まる微分方程式 $R(\varphi_{(\mathfrak{g},V)}^{(\nu_0)})$ が $(\mathfrak{g}, V)$ に対応する微分方程式系である．

4.4. **線形微分方程式系と外在的幾何の不変量.** 先のことから形式的可積分な有限型微分方程式系の不変量を求めることと旗多様体の部分多様体の外在的幾何としての不変量を求めることは同じであることが分かった．一番簡単な場合は，$n+1$ 階の線形常微分方程式の不変量を求めることは n 次元射影空間の中の曲線の射影変換の下での不変量を求めることと同じであるという古典的な事柄である．以下，これらの不変量を求める問題を外在的幾何の方から見てみよう．Osculating map $\varphi : (M, \mathfrak{f}) \to \mathrm{Flag}(V, \phi)$ の最初の不変量はそのシンボルであったが，今それは一定であると仮定して，それから高次の不変量を求める方法を考えてみよう．考察を進めるのに状況を少し一般化して，変換群を $GL(V)$ の代わりにその閉 Lie 部分群 L をとり，その下での $Flag(V, \phi)$ の外在的幾何を考えよう．わざわざ話を複雑にするように見えるかもしれないが，それは旗多様体ではない一般の外在的幾何を扱う方法を示唆するためである．

考えをはっきりさせるため次のようにする．(V, ϕ) はフィルター付きベクトル空間とし，ϕ は負の方向に増大し $V = \phi^{-\nu} \supset \cdots \supset \phi^0 = 0$ となっているとする．V のフィルター ϕV は $\mathfrak{gl}(V)$ のフィルター $\phi\mathfrak{gl}(V)$ を導く．第 1 節でも見たようにそれは

$$\phi^p\mathfrak{gl}(V) = \{A \in \mathfrak{gl}(V) : A\phi^i V \subset \phi^{i+p}V\}$$

で定義され $[\phi^p\mathfrak{gl}(V), \phi^q\mathfrak{gl}(V)] \subset \phi^{p+q}\mathfrak{gl}(V)$ を満たしている．

L の Lie 代数を $\mathfrak{l}$ で表す． $\phi^p\mathfrak{l} = \mathfrak{l} \cap \phi^p\mathfrak{gl}(V)$ によって $\mathfrak{l}$ にフィルター ϕ が誘導され，$\mathfrak{l}$ はフィルター付き Lie 代数となる．それに随伴した階数付き Lie 代数を $gr\mathfrak{l}$ とする．そして次の仮定を置く．

(A0) $\mathfrak{l}$ は $gr\mathfrak{l}$ に同型である．

この条件は，例えば，$\mathfrak{l}$ が単純 Lie 代数ならば満たされる．以下 $\mathfrak{l}$ と $gr\mathfrak{l}$ を同一視し $\mathfrak{l} = \bigoplus \mathfrak{l}_p$ と書く．フィルター ϕ は $\phi^p\mathfrak{l} = \mathfrak{l}^p = \bigoplus_{i \geq p} \mathfrak{l}_i$ で与えられる．$L^0 = \phi^0 L \subset L$ を ϕ を固定する部分群とする．その Lie 代数は $\phi^0\mathfrak{l}$ である．

さらに階数付き巾零 Lie 代数 $\mathfrak{g}_- = \bigoplus_{q<0} \mathfrak{g}_q$ を与え，これは $\mathfrak{l} = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \mathfrak{l}_p$ の階数付き部分 Lie 代数になっているとする．この下で

定義 18. Osculating map $\varphi : (M, \mathfrak{f}) \to L/L^0 \subset Flag(V, \phi)$ がタイプ $(\mathfrak{g}_-, V, L)$ の定シンボルを持つとは任意の $x \in M$ に対してフィルターを保つ写像 $a : (V, \phi) \to (V, \varphi(x))$ と同型写像 $\beta : \mathfrak{g}_- \to gr\mathfrak{f}_x$ が存在して次の条件を満たすことである．i) $a \in L$, ii) (β, gra) は $(gr\phi, \mathfrak{g}_-)$ から $(gr\varphi(x), gr\mathfrak{f}_x)$ への加群としての同型写像を与える．

例 6. 実 4 次 symplectic 群

$$G = \mathfrak{sp}(\mathbb{R}^4) = \{a :\ 4\text{次実正方行列}\,|a^tJa = J\}$$

を考えよう．その Lie 代数は

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(\mathbb{R}^4) = \{A :\ 4\text{次実正方行列}\,|A^tJ + JA = 0\}$$

である．ここで歪み対称行列 J は次の形のものを取る：

$$J = \begin{bmatrix} 0 & \acute{I}_2 \\ -\acute{I}_2 & 0 \end{bmatrix} \quad \acute{I}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

A が $\mathfrak{sp}(\mathbb{R}^4)$ の元であるための条件は，$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ と２次正方行列 A_{ij} に分解すれば,

$$A^s_{11} + A_{22} = 0, \quad A^s_{21} = A_{21}, \quad A^s_{12} = A_{12},$$

と表せる．ここで $\cdot^s$ は歪対角に関する転置行列を表す．

$\mathbb{R}^4$ の標準基底を $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ とし $\mathbb{R}^4$ のフィルター ϕ を次のように決める：

$$\phi^0 = 0,\ \phi^{-1} = \langle e_4 \rangle,\ \phi^{-2} = \langle e_2, e_3, e_4 \rangle,\ \phi^{-3} = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$$

このフィルター ϕ は $\mathfrak{gl}(\mathbb{R}^4)$ に階数付けを定め，さらに $\mathfrak{sp}(\mathbb{R}^4)$ にも階数付けを与える．これは $\mathfrak{sp}(\mathbb{R}^4)$ の接触階数付けと呼ばれるもので,

$$\mathfrak{sp}(\mathbb{R}^4) = \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$$

と分解する．具体的には

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{-2} &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; c \in \mathbb{R} \right\} \\ \mathfrak{g}_{-1} &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & -a & 0 \end{bmatrix} ; a, b \in \mathbb{R} \right\}, \cdots \end{aligned}$$

さて $\mathfrak{sp}(\mathbb{R}^4)$ の随伴表現を考えよう．

$$V = \mathfrak{sp}(\mathbb{R}^4),\ \phi^p V = \phi^{p+3} \mathfrak{sp}(\mathbb{R}^4)$$

と置き，これを階数付き $\mathfrak{g}(= \mathfrak{sp}(\mathbb{R}^4))$ 加群と見る．

写像 $G \ni a \longmapsto a\phi \in \mathrm{Flag}(V, \phi)$ は写像 $\mathring{\varphi} : G/\phi^0 G \to Flag(V, \phi)$ を導く．これはタイプ $(V, \mathfrak{g}_-)$ の標準的埋め込みである．

一方 $\mathfrak{sp}(\mathbb{R}^4)$ の Killing form β は V 上に符号 $(6, 4)$ の対称２次形式を定める．β を不変にする V の線形同型写像全体のなす群を $O(V, \beta)$ あるいは $O(6, 4)$ で表し，この Lie 群を L とする．随伴表現により G は L の中に写るので，上の埋め込み $\mathring{\varphi}$ は，L を変換群とする外在的幾何に関する標準的埋め込みでもあり，タイプ $(V, \mathfrak{g}_-; L)$ の標準的埋め込みである．ここで埋め込まれる空間 $G/\phi^0 G$ は標準的な接触構造を備えた３次元射影空間である．問題にすることは，３次元接触多様体から $L/\phi^0 L$ への埋め込みで，osculating でそのタイプが $(V, \mathfrak{g}_-; L)$ となるものの不変量を求めることである．

一般に $\mathfrak{l}=\bigoplus_{p\in\mathbb{Z}}\mathfrak{l}_p$ を階数付き Lie 代数，$\mathfrak{g}_-=\bigoplus_{q<0}\mathfrak{g}_q$ をその階数付き部分 Lie 代数とする． このとき $\bar{\mathfrak{g}}_p$ を次のように定義する．$p<0$ のとき，$\bar{\mathfrak{g}}_p=\mathfrak{g}_p$ と置き，$p\geq 0$ のとき，帰納的に次の式で決める：

$$\bar{\mathfrak{g}}_p=\{A\in\mathfrak{l}_p|[A,\mathfrak{g}_-]\subset\bigoplus_{i<p}\bar{\mathfrak{g}}_i\}$$

そうすると $\bar{\mathfrak{g}}=\bigoplus_{p\in\mathbb{Z}}\bar{\mathfrak{g}}_p$ は $\mathfrak{g}_-$ を含む $\mathfrak{l}$ の階数付き部分 Lie 代数で最大のものである．これを $\mathfrak{g}_-$ の $\mathfrak{l}$ での相対的延長とよび，$\mathrm{Prol}(\mathfrak{g}_-,\mathfrak{l})$ と書く．

上の例では，$\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}(\mathbb{R}^n)$, $\mathfrak{g}$ の負部分を $\mathfrak{g}_-$，$\mathfrak{l}=\mathfrak{o}(V,\beta)$ とすると $\bar{\mathfrak{g}}$ は $\mathfrak{g}$ に一致する．$\mathfrak{l}=\mathfrak{gl}(V)$ とすると $\bar{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{z}$ ($\mathfrak{z}$ は $\mathfrak{gl}(V)$ の中心) となる．

上の例を念頭に置いて，(V,ϕ), $L,\mathfrak{g}_-$ は先のとおりとし，$\bar{\mathfrak{g}}$ を $\mathfrak{l}$ での $\mathfrak{g}_-$ の相対的延長とする．

さて $\bar{\mathfrak{g}}_0$ を Lie 代数に持つ Lie 群 $\bar{G}_0$ を次のように決める．

$$\bar{G}_0=\{a\in L: Ad(a)\mathfrak{g}_-\subset\mathfrak{g}_-, \text{and } a(gr_pV)\subset gr_pV,\ \forall p\}$$

そして

$$\bar{G}^0=\bar{G}_0\exp\bar{\mathfrak{g}}^1$$

と決める．この Lie 代数は $\bar{\mathfrak{g}}^0$ となる．

さて次の条件を考える：

(A1) $\bar{\mathfrak{g}}$ 不変な階数付き部分空間 $\bar{\mathfrak{g}}'\subset\mathfrak{l}$ で $\mathfrak{l}=\bar{\mathfrak{g}}\oplus\bar{\mathfrak{g}}'$ となるものが存在する．

(C) $\bar{G}^0$ 不変な階数付き部分空間 $W=\bigoplus W_p\subset\phi^1 Hom(\mathfrak{g}_-,\mathfrak{l}/\bar{\mathfrak{g}})$ で

$$\phi^1\,\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_-,\mathfrak{l}/\bar{\mathfrak{g}})=\partial\phi^1(\mathfrak{l}/\bar{\mathfrak{g}})\oplus W$$

を満たすものが存在する．ここで ∂ は次の coboundary operator である:

$$\partial:\phi^1(\mathfrak{l}/\bar{\mathfrak{g}})\to\phi^1\,\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_-,\mathfrak{l}/\bar{\mathfrak{g}})$$

注意 1. 上の条件 (C) は内在的幾何における Cartan 接続存在のための条件 (C) と同じ形をしているが，外在的幾何で Spencer cohomology group の H^1 が内在的幾何では H^2 が関係する．

注意 2. $\bar{\mathfrak{g}}$ が半単純ならば条件 (A1) , (C) はともに成り立つ．

以上，データ $V,\phi,L,\mathfrak{g}_-$, から $\bar{\mathfrak{g}},\bar{G}^0$ が決まった．さらに $\bar{\mathfrak{g}}',W$ は条件を満たすように選んでおく．この下でカテゴリー $SubFlag(V,\phi,L,\mathfrak{g}_-)$ を次のように決める：その object はタイプ $(V,\mathfrak{g}_-,L)$ の osculating map $\varphi:(M,\mathfrak{f})\to\mathrm{Flag}(V,\phi)$ の全体とし，morphism はそれらの間の（L に関する外在的幾何としての）同型写像全体とする．

もう一つのカテゴリー $ExtCB(V,\phi,L,\mathfrak{g}_-,W)$ を次のように決める．その object は以下に述べる条件 (1)) - (4) を満たす $(P,(M,\mathfrak{f}),\omega)$ の全体としその morphism はそれらの間の同型写像の全体とする．

(1) $(M,\mathfrak{f})$ はタイプ $\mathfrak{g}_-$ のフィルター付き多様体で P はその上の主ファイバー束でその構造群は $\bar{G}^0$.

(2) ω は値を $\mathfrak{l}$ にとる P 上の 1 次微分形式で次を満たす．

i) $R_a^*\omega = Ad(a^{-1})\omega, \quad a \in \bar{G}^0$
ii) $\omega(\tilde{A}) = A, \quad A \in \bar{\mathfrak{g}}^0$
iii)

$$d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0$$

(3) 分解 $\mathfrak{l} = \bar{\mathfrak{g}} \oplus \mathfrak{g}'$ に応じて $\omega = \omega_I + \omega_{II}$ と分解すると，$(\omega_I)_z : T_zP \to \bar{\mathfrak{g}}$ は任意の $z \in P$ に対してフィルターを保つ同型である．従って (P, ω_I) は $(M, \mathfrak{f})$ 上の Cartan tower である．

(4) P の構造関数 $\chi : P \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{l}/\bar{\mathfrak{g}})$ を

$$\omega_{II} = \chi\omega_I$$

で定義すると，χ はその値を W にとる．

なお，(P, ω) から $(P'.\omega')$ への同型とはファイバーを保つ微分同相写像 $F : P \to P'$ で $F^*\omega' = \omega$ を満たすものである．

次の定理を得る：

定理 13. $V, \phi, L, \mathfrak{g}_-$ は仮定 *(A0), (A1), (C)* を満たすとすると，カテゴリー $SubFlag(V, \phi, L, \mathfrak{g}_-)$ からカテゴリー $ExtCB(V, \phi, L, \mathfrak{g}_-, W)$ への構成的な同型が存在する．

要するに $\varphi \in SubFlag$ に対して $(P, \omega) \in ExtCB$ がはっきりとした方法で構成できて，φ の幾何は (P, ω) の幾何と同じになるということで，φ の不変量はすべて (P, ω) の不変量から決まるということである．

このように幾何構造に対してバンドルとその上の微分形式 (P, ω) を自然な方法で構成し元の幾何を (P, ω) の幾何に変換することは Cartan の動標構の束の思想であり，このような (P, ω) を定義なしに Cartan bundle と呼ぶこともある．第 1 節で述べた tower の理論は内在的幾何において Cartan の動標構束の思想をもっとも一般な枠組で捉えようとするものであった．

外在的幾何に対して Cartan の動標構束の思想を最初にはっきりとした形にしたのは背足豊（[36]，[37]）である．

[1980 年代北大で田中昇教授の下 “微分方程式の幾何” というテーマで活発に研究が進められていた．当時大学院博士過程にいた背足君に私は Wilczynski の本 [47] を奨めた．この本は Lie の微分不変量の思想を受けて，線形常微分方程式と射影曲線の不変量を詳しく調べているが，背足君はそれを Cartan の動標構束の思想で捉え直した．そしてさらにそれを発展させていた途上であったが，残念なことに交通事故で亡くなった.]

背足の仕事は山口，松本，佐々木，吉田らによって整理され応用された ([34]，[24] など)．それらは，我々の言葉で言えば，$(\mathfrak{g}_-, V)$ において，$\mathfrak{g}_-$ が深さ 1，すなわち $\mathfrak{g}_- = \mathfrak{g}_{-1}$ (可換) となる場合を扱っている．上の定理はそれを任意の深さを持つ階数付き巾零 Lie 代数 $\mathfrak{g}_-$ に拡張するものであり，巾零解析によりその発想が生まれたのである．

カテゴリー $ExtCB(V, \phi, L, \mathfrak{g}_-, W)$ について注意を加えておこう．

(1) 標準的な $(\bar{\mathfrak{g}}, V)$ 型の埋め込み $\varphi_{(\bar{\mathfrak{g}}, V)}$ に対応する Cartan bundle を $(P_{(\bar{\mathfrak{g}}, V)}, \omega_{(\bar{\mathfrak{g}}, V)}; \chi)$ と書くと，$\chi_{(\bar{\mathfrak{g}}, V)} = 0$ であり，

$(P,\omega;\chi)$ が $P_{(\bar{\mathfrak{g}},V)}$ と局所同型となるための必要十分条件は $\chi=0$ である．

(2) 構造関数 χ はコホモロジー群 $H^1_+(\mathfrak{g}_-,\mathfrak{l}/\bar{\mathfrak{g}})$ が単純推移的に作用するアフィンバンドルに値をとり，$H^1_+(\mathfrak{g}_-,\mathfrak{l}/\bar{\mathfrak{g}})=0$ ならば $\chi=0$ となる．

系 2. $V,\phi,L,\mathfrak{g}_-$ は仮定 *(A0), (A1), (C)* を満たすとする．$H^1_+(\mathfrak{g}_-,\mathfrak{l}/\bar{\mathfrak{g}})$ が消えていれば $SubFlag(V,\phi,L,\mathfrak{g}_-)$ の元はすべて標準的なものに局所同型である．すなわち剛性が成り立つ．

$\mathfrak{g}$ が単純な階数付き Lie 代数で $\mathfrak{g}_-$ はその負部分とする．V を既約な $\mathfrak{g}$ 加群とする．コホモロジー群 $H^p(\mathfrak{g}_-,V)$ を $\mathfrak{g}$ のルート系を用いて計算する方法が Kostant [19] によって与えられている．それを援用して次の結果を得る．

定理 14. $\mathfrak{g}=\bigoplus\mathfrak{g}_p$ は単純な階数付き *Lie* 代数，V は既約な $\mathfrak{g}$ 加群とする．コホモロジー群 $H^1_r(\mathfrak{g}_-,V)$ $(r\geq 1)$ は次の場合を除いて消える．

(1) (A_l,Σ) $(l\geq 1)$ ここで $\Sigma=\{\alpha_1\},\{\alpha_l\}$ または $\{\alpha_1,\alpha_l\}$
(2) (B_2,Σ) ここで $\Sigma=\{\alpha_1\}$, または $\{\alpha_2\}$
(B_l,Σ) $(l\geq 3)$ ここで $\Sigma=\{\alpha_1\}$
(3) (C_l,Σ) $(l\geq 3)$ ここで $\Sigma=\{\alpha_1\}$
(4) (D_4,Σ) ここで $\Sigma=\{\alpha_1\},\{\alpha_3\}$, または $\{\alpha_4\}$
(D_l,Σ) $(l\geq 5)$ ここで $\Sigma=\{\alpha_1\}$,

ここで Σ は単純ルート $\{\alpha_1,\cdots\alpha_l\}$ の部分集合で $\mathfrak{g}$ の階数付けを定義するものである．すなわち $\alpha=a_1\alpha_1+\cdots+a_l\alpha_l$ に対してもし $\sum_{\alpha_i\in\Sigma}a_i=p$ ならば $\mathfrak{g}_\alpha\subset\mathfrak{g}_p$.

$\bar{\mathfrak{g}}$ が半単純なときは定理の仮定が満たされ定理が適用できる．

先の例，$\mathfrak{sp}(\mathbf{R}^4)$ に関わる外在的幾何においては，上の定理が実際に適用できる．$\mathfrak{l}=\mathfrak{o}(6,4)$ の場合，ルート系を用いて計算して

$$H^1_+(\mathfrak{g}_-,\mathfrak{l}/\bar{\mathfrak{g}})=0$$

従って，この場合剛性が成り立つ．

一方，$\mathfrak{l}=\mathfrak{gl}(V)$ とした場合は，ルート系による計算と表現論を援用して

$$H^1_+(\mathfrak{g}_-,\mathfrak{l}/\bar{\mathfrak{g}})\equiv 2\text{ 変数斉次 }5\text{ 次多項式の全体}$$

が分かる．従ってこの場合は，この型の埋め込みは多様で不変量はこの 6 次元空間に値をとる．さらに詳しい情報は定理で構成した Cartan bundle (P,ω) にすべてつめられている．

半単純でなくとも，単純 Lie 代数とその既約表現の半直積など，代数的調和積分論が展開できるところでは条件 (C) が満たされ，概ね，定理が適用できる．条件 (C) が望めない一般の場合にも，定理のような綺麗な形ではないが，やはり不変量を求めるアルゴリズムが構成でき，系 2 は，そこで述べられた仮定なしでも成り立つ．

4.5. Klein-Cartan プログラム. 対象の中から Klein モデルを抽象し，その変形として Cartan 変形を考察し．それらの合成や分解を通じて対象を理解しょうというのが Klein-Cartan プログラムである．

この考えは，幾何，特に内在的幾何において，生まれ発達した．1872 年の Klein の Erlangen Programm は有名で広く数学で知られている．しかしその 50 年後の Cartan の espace généralisé は幾何においてさえまだ十分浸透していないように見える．近年ようやく田中の Cartan 接続の理論が広がり出し，Čap-Slovák の分厚い本 “Parabolic geometries” [2] はその伝播の助けになっている．単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対してその放物型部分 Lie 代数を選ぶことと，$\mathfrak{g}$ の階数付け $\mathfrak{g}_{-\mu} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_\mu$ を与えることは同値である．従って，放物型幾何は $\mathfrak{g}$ の負部分 $\mathfrak{g}_-$ をモデルとする巾零幾何である．従って放物幾何は巾零幾何に多くを負うと同時に巾零幾何の豊かな応用の場でもある．第 2 節で述べたようにタワーの理論が内在的幾何に対する Klein-Cartan プログラムをさらに広く展開している．

この第 4 節では，外在的幾何に対して Klein-Cartan プログラムはどのような形をとって遂行されるかを見てきた．そしてその形は内在的幾何におけるそれと相似であり，Klein-Cartan プログラムは外在的幾何においても，内在的幾何と同様に極めて重要な視点と方法を提供することを見てきた．

線形微分方程式系の幾何と旗多様体での外在的幾何の同型性から外在的幾何における認識はそのまま線形微分方程式の世界に適用されるのである．

では，非線形の微分方程式系に対してはどうであろうか．序文でも述べたように，非線形微分方程式系の ” 幾何学化 ” を通じて，非線形微分方程式系を幾何構造として捉え内在的幾何の見方で理解する，というこの方向の研究は Cartan 以来多くの人によって進められてきている．特に，田中 [46] は．形式的可解な有限型の微分方程式系を擬積構造として捉え，然るべき条件の下で Cartan 接続を構成している．さらにそれを用いて元の微分方程式系の求積の問題を論じている．

ここで一つ注意をしておこう．微分方程式の幾何学を考えるとき，微分方程式系を従来の枠組に止まって考えるのではなく，第 3 節で展開したように巾零解析の枠組に広げて捉えていくことが重要であろう．実際，線形微分方程式の場合，この巾零解析の枠組に広げて扱うことにより，視野が格段に広がり理論が高い普遍性を獲得したのである．非線形の場合もこれは大いに期待できることであり，研究は現在進行中である．

もう一つ注意しておこう．タイプ $(\mathfrak{g}_-, V, L)$ の osculating map $\varphi : (M, \mathfrak{f}) \to L/L^0 \subset \mathrm{Flag}(V, \phi)$ に対して，$(\mathfrak{g}_-, V, L)$ に対する然るべき仮定の下で，Cartan bundle (P, ω) を構成した．そして，前述のように，

$$\omega = \omega_I + \omega_{II}$$

と分解すると，(P, ω_I) は $(M, \mathfrak{f})$ 上のタイプ $(\bar{\mathfrak{g}}, \bar{G}^0)$ の Cartan 接続であった，すなわち $(M, \mathfrak{f})$ 上の内在的幾何としての幾何構造を表してい

る．そして内在的幾何の ω_I と外在的幾何の ω_{II} が

$$d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0$$

で結ばれている．この中に，3次元ユークリッド空間の曲面に対する Gauss の Theorem egregium に当たるものが隠されている．これをはっきりとした形に掘り出すことができれば大変おもしろいことであろう．

また線形微分方程式と非線形微分方程式の間にもこのような関係が現れるであろうか．

さらにもう一つ注意をしておきたい．これまで Klein モデル，Cartan 変形についていわば静的に眺めてきたが，それら相互の動的な関わりも非常に興味深い問題である．モーメント写像，twistor 図式，Bäcklund 変換などいろいろなところに現われ時々重要な働きをするが，それらは Klein-Cartan プログラムの中で起こっているもっと一般なダイナミズムの片鱗のようにも思われる．例えば，Klein モデルの間に成り立つ twistor 図式と相似な twistor 図式が Cartan 変形の間でも成立するか，という問題が具体的な幾何の問題と関係してしばしば論じられるが，それらは一般の旗多様体の Cartan 変形における出来事の一つの現われであろうと思われる．

References

[1] A. A. Agrachev, Any sub-Riemannian metric has points of smoothness. Russian Math. Dokl., **79** (2009), 1–3.

[2] A. Čap and J. Slovák, Parabolic geometries I : Background and General Theory, Mathematical Surveys and Monographs vol 154, AMS, 2009.

[3] É. Cartan, Sur la structure des groupes infinis de transformations, Ann. École Norm. Supp. **21** (904), 153–206.

[4] É. Cartan, Sur la structure des groupes infinis de transformations, Ann. École Norm. Supp. **22** (1905), 219–308.

[5] É. Cartan, Les groupes de transformations continus, infinis, simples, Ann. École Norm. Supp. **26** (1909), 93–161.

[6] É. Cartan, Les systèmes de Pfaff à cinq variables et les équations aux dérivées partielles du second ordre, Ann. École Norm. Supp. **27** (1910), 109–192.

[7] É. Cartan, Sur les espaces généraalisés et la théorie de la rerativité, C. R. Acad. Sc., t. **174** (1922), p.734.

[8] É. Cartan, Notice sur les travaux scientifiques, Œuvres complètes, Partie 1, Volume 1, Paris, Gauthier-Villars, 1952.

[9] É. Cartan, Œvres complètes, Partie II, Paris, Gauthier-Villars, 1953.

[10] S. S. Chern, Pseudo-groupes continus infinis, Colloque de Geom. Diff., Strasbourg (1954), 119–136.

[11] B. Doubrov, B. Komrakov and T. Morimoto, Equivalence of holonomic differential equations, Lobachevskii Journal of Mathematics **3** (1999), 39–71.

[12] B. Doubrov, Y. Machida and T. Morimoto, Linear differential equations on filtered manifolds and submanifolds of flag varieties, Preprint.

[13] C. Ehresmann, Introduction à la théorie des structures infinitésimal et des pseudo-groupes de Lie, Colloque International de CNRS. Strasbourg, 1953.

[14] A.M. Gabrièlov, Formal relations between analytic functions, Ivz. Akad. Nauk SSSR **37** (1973), 1056–1088.

[15] H. Goldschmidt, Existence theorems for analytic linear partial differential equations, Ann. of Math. **86** (1967), 246–270.

[16] V.W. Guillemin and S. Sternberg, An algebraic model of transitive differential geometry, Bull. Amer. Math. Soc. **70** (1964), 16–47.

[17] S. Izumi, The rank condition and convergence of formal functions, Duke Math. J.**59** (1989), 241–264.

[18] C. Jordan, Traité des substitutions et des équations algébriques, Gauthier-Villars, Paris, 1870.

[19] B. Kostant, Lie algebra cohomology and the generalized Borel–Weil theorem, Ann. of Math. **74** (1961), 329–397.

[20] M. Kuranishi, On E. Cartan's prolongtion theorem of exterior differential systems, Amer. J. Math. **79** (1957), 1–47.

[21] M. Kuranishi, Lectures on exterior differential systems, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1962.

[22] B. Malgrange, Equations de Lie. II, J. of Differential Geometry **7** (1972), 117–141.

[23] B. Malgrange, Frobenius avec singularités 2. (Le cas général) , Inventiones math. **39** (1977), 67–89.

[24] K. Matsumoto, T. Sasaki and M. Yoshida, Recent progress of Gauss–Schwarz theory and related geometric structures, Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University, Ser. A, **47** (1993), pp. 283–381.

[25] T. Morimoto, Sur le problème d'équivalence des structures géométriques, Japan. J. Math. **9-2** (1983), 293–372.

[26] T. Morimoto , Transitive Lie algebras admitting differential systems, Hokkaido Math. J. **17** (1988), 45–81.

[27] T. Morimoto, Théorème de Cartan-Kähler dans une classe de fonctions formelles Gevrey, C. R. Acad. Sci. Paris **311** (1990), 433–436.

[28] T. Morimoto, Geometric structures on filtered manifolds, Hokkaido Math. J. **22** (1993) 263–347.

[29] T. Morimoto, Théorème d'existence de solutions analytiques pour des systèmes d'équations aux dérivées partielles non-linéaires avec singularités, C. R. Acad. Sci. Paris **321** (1995), 1491- 1496.

[30] T. Morimoto, Lie algebras, geometric structures and differential equations on filtered manifolds, Advanced Studies in Pure Mathematics **37** (2002), 203-252.

[31] T. Morimoto, Differential equations associated to a representation of a Lie algebra from the viewpoint of nilpotent analysis, 数理解析研究所講究録 1502 (2006), 238- 250.

[32] T. Morimoto, Cartan connection associated with a subriemannian structure, Differential Geometry and its Applications **26** (2008), 75 - 78.

[33] D. Quillen, Formal properties of over-deteremined systems of linear partial differential equations, Ph. D. thesis, Harvard University, 1964. .

[34] T. Sasaki, K. Yamaguchi and M. Yoshida, On the rigidity of differential systems modelled on hermitian symmetric spaces and disproofs of a conjecture concerning modular interpretations of configuration spaces, Advanced Studies in Pure Mathematics **25** 1997, 318 – 354.

[35] H. Sato and A. Yamada-Yoshikawa, Third order ordinary differential equations and Legendre connections, J. Math. Soc. Japan, **50** (1998), 993 - 1013.

[36] Y. Se-ashi, On differential invariants of integrable finite type linear differential equations, Hokkaido Math. J., **17** (1988), 151–195.

[37] Y. Se-ashi, A geometric construction of Laguerre-Forsyth's canonical forms of linear ordinary differential equations, Adv. Studies in Pure Math., **22** (1993), 265–297.

[38] I. M. Singer and S. Sternberg, On the infinite groups of Lie and Cartan, I, J. Analyse Math. **15** (1965), 1–114.

[39] D. C. Spencer, Overdetermined systems of linear partial differential equations, Bull. Amer. Math. Soc. **75** (1969), 179–239.

[40] S. Sternberg, Lectures on differential geometry , Printice-Hall, 1964. .

[41] N. Tanaka, On the pseudo-conformal geometry of hypersurfaces of the space of n complex variables, J. Math. Soc. Japan **14** (1962), 397–429. .

[42] N. Tanaka, On differential systems, graded Lie algebras and pseudo-groups, J. Math. Kyoto Univ. **10** (1970), 1–82.

[43] N. Tanaka, On non-degenerate real hypersurfaces, graded Lie algebras and Cartan connections, Japanese J. Math. **2** (1976), 131–190.

[44] N. Tanaka, On the equivalence problems associated with simple graded Lie algebras, Hokkaido Math. J., **6** (1979), 23–84.

[45] N. Tanaka, On geometry and integration of systems of second order ordinary differential equations (in Japanese), Proc. Symposium on Differential Geometry (1982), 194–205. .

[46] N. Tanaka, Geometric theory of ordinary differential equations, Report of Grant-in-Aid for Scientific Research MESC Japan, 1989.

[47] E.J. Wilczynski, Projective differential geometry of curves and ruled surfaces, Leipzig, Teubner, 1906.

[48] K, Yamaguchi, Contact geometry of higher order, Japan. J. Math. **8** (1982), 109 - 176.

[49] T. Yatsui, On pseudo-graded Lie algebras, Hokkaido Math. J. **17** (1988), 333 - 343.