Bogomolov-宮岡-Yau 不等式をめぐって

宮岡洋一　（東京大学数理科学研究科）

0. 序

半安定層の Chern 類に対して成立し，曲面上の線形系についての Reider 理論 [Reider 88] など重要な応用をもつ Bogomolov 不等式は，最初 [Bogomolov 78] が Mumford の幾何学的不変式論を用いて証明した．原論文の証明がややわかりにくいものであったため，この不等式に対しては後に [Gieseker 79]（正標数を用いる）や，[Donaldson 87][Uhlenbeck-Yau 86]（小林 -Hitchin 対応の解決，すなわち Einstein エルミート計量の存在を用いる）などの別証明が発表され，最終的には [Miyaoka 87b] で初等的かつ簡明な証明が与えられた．

一方代数曲面の（余接束の） Chern 類に対する宮岡 -Yau 不等式は [Miyaoka 77] と [Yau 78] により全く異なる手法により独立に証明された．宮岡 -Yau 不等式はその後開曲面（[Sakai 80]）や軌道体曲面（[Miyaoka 84]），高次元極小多様体（[Miyaoka 87b]）の場合へと一般化されるとともに，特異点の個数の評価や複素数体上の射影幾何，さらには３次元代数多様体の分類理論など，幅広い応用が見出された．

Bogomolov 不等式と宮岡-Yau 不等式はともに c_2 が c_1^2 の定数倍で下から押さえられるという形をしており，また考えている層の安定性に関係しているという点で，類似性は誰の目にも明らかであるが，著しい類似をもたらすメカニズムは必ずしも明らかではなかった．これを明らかにしたのは [Simpson 88] で，宮岡-Yau 不等式はある種の Higgs 束に対する Bogomolov 不等式として解釈できることを示したのである．しかしながら，彼の方法は Higgs 束の Yang-Mills 理論を展開して，安定 Higgs 束に調和計量 (harmonic metric) を構成し，誘導する Chern 形式を計算するというもので，きわめて超越的であり複雑な解析的評価を必要とする．この意味で Simpson の結果を初等化，代数化することは一定の意義を有するはずである．

この稿では，[Miyaoka 87b] において展開した古典的な連接層の圏における半安定性の初等的かつ代数的な理論（Metha-Ramanathan の制限定理，テンソル積定理，Bogomolov 不等式）および [Miyaoka 77] で示した宮岡 -Yau 不等式を解説したのち，最後に古典的な連接層の圏における半安定性理論はすべてそのまま Higgs 層の圏に一般化できるという，筆者が最近得た結果を紹介する．筆者の方法は完全に代数的かつ初等的であり，宮岡 -Yau 不等式の高次元への種々の一般化もこの枠組みで証明できる．もちろん初等的とはいっても完全な証明には技術的に面倒な細部も必要なので，詳細は付録として添付する英文プレプリントを参照されたい．

以下では特にことわらないかぎり，代数多様体はすべて複素数体上定義されているものとする．

1. 代数曲線上の安定ベクトル束

Mumford は代数幾何学にあらわれるモジュライ問題を考えるに際しては，構造の変形に現れるものすべてを考えることは不適切であり，適当なよい性質をもつものだけに対象を制限しなければならないことを発見した [Mumford 65]. たとえば代数曲線 C を固定して C 上階数 2 で $c_1 = 0$ をもつベクトル束を考えよう．直線束による直線束の拡大

$$0 \to \mathcal{O}(-D) \to \mathcal{E} \to \mathcal{O}(D) \to 0$$

を考え，その拡大類を $\epsilon \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(D), \mathcal{O}(-D)) \simeq H^1(C, \mathcal{O}(-2D))$ とする．$\deg D > 0$ なら $\varepsilon \neq 0$ となるものが存在する．この拡大類をスカラー倍 $t\varepsilon$ で置き換えるとベクトル束の一経数族 $\mathcal{E}_t$ が

得られる．$t \neq 0$ なら $\mathcal{E}_t \simeq \mathcal{E}$ であるが，$\mathcal{E}_0 = \mathcal{O}(-D) \oplus \mathcal{O}(D) \not\simeq \mathcal{E}$ である．つまり，$\mathcal{E}_t$ は $t \neq 0$ ではすべて同一でありながら，$t = 0$ で突然ジャンプすることになり，$\mathcal{E}$ と $\mathcal{E}_0$ の双方を含むようなよいモジュライ理論を構成することは原理的にできない（存在したと仮定すると，幾何学的な一点が必ずしも閉集合とならない奇形的空間になる）．したがって，$\mathcal{E}_0$ のような「不安定な対象」は，ベクトル束のモジュライから排除しなければならないのである．

Mumford が考えたよい性質とは，安定性 (stability) や半安定性 (semistability) とよばれるものである．上で考えたような曲線上のベクトル束に関しては，以下のようにして定義される．

代数曲線（コンパクトなリーマン面） C 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ に対して $\mathcal{E}$ のスロープ (slope) $\mu(\mathcal{E})$ を $\deg \mathcal{E}/\mathrm{rank}\, \mathcal{E} \in \mathbb{Q}$ で定義する．$\mathcal{E}$ が直線束 $\mathcal{L}_i$ の直和なら，そのスロープは各成分の次数 $\deg \mathcal{L}_i$ の平均値である．$\mathcal{E}$ が半安定 (semistable) であるとは，$\mathcal{E}$ のどんな非自明な部分束 $\mathcal{F} \neq 0, \mathcal{E}$ をとっても，$\mu(\mathcal{F}) \leqq \mu(\mathcal{E})$ が成立することを言う．さらに強く，常に真の不等式が成立するならば，$\mathcal{E}$ は安定 (stable) であるという．一方，半安定でない $\mathcal{E}$ は不安定 (unstable) と呼ばれる．Mumford はこの定義を用いて，C 上の因子 D を一つ固定したとき，1) 階数 r の安定ベクトル束 $\mathcal{E}$ で $c_1(\mathcal{E}) = \mathcal{O}(D)$ となるもののモジュライ空間が準射影多様体として存在し，また　2) 安定ベクトル束のモジュライ空間の自然な射影的コンパクト化をとると，その境界は安定ベクトル束の直和でかつ半安定なベクトル束 (polystable ベクトル束) のモジュライ空間になっていることを証明した．

一般のベクトル束はもちろん半安定ではないが，その場合標準的な filtration (**Harder-Narsimhan filtration**) があって，各フィルターに対応する部分商は半安定になる．これを説明しよう．

階数 r の（不安定かもしれない）ベクトル束 $\mathcal{E}$ を一つ固定する．このとき十分大きな次数の直線束 $\mathcal{L}$ をとると，埋め込み $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}^{\oplus r}$ が存在し，このことから任意の $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ に対して $\mu(\mathcal{F}) \leq \deg \mathcal{L}$ が成り立つことがわかる．つまり $\mathcal{E}$ の部分層のスロープ $\{\mu(\mathcal{F}); \mathcal{F} \subset \mathcal{E}\} \subset (1/r!)\mathbb{Z}$ が作る集合は上に有界である．したがって最大値

$$\mu_{\max}(\mathcal{E}) = \max_{0 \neq \mathcal{F} \subset \mathcal{E}} \mu(\mathcal{F})$$

が存在し，$\mathcal{E}$ の最大スロープ (maximum slope) と呼ぶ．$\mu_{\max}(\mathcal{E})$ をスロープとして実現する部分束の族 $\mathcal{F}_\lambda \subset \mathcal{E}$ があれば $\sum_\lambda \mathcal{F}_\lambda \subset \mathcal{E}$ や $\bigcap_\lambda \mathcal{F}_\lambda$ のスロープも $\mu_{\max}(\mathcal{E})$ となることが簡単にわかる．したがって $\mu_{\max}(\mathcal{E})$ をスロープにもつ部分束のうち最大のもの $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}$ が存在する．$\mathcal{E}_0$ は必然的に飽和部分束（$\mathcal{E}/\mathcal{E}_0$ は torsion free）である．また $\mathcal{E}_0$ は $\mathcal{E}$ から自然にただ一つ定まるから，$\mathcal{E}$ の任意の自己同型は $\mathcal{E}_0$ を保存する．$\mathcal{E}_0$ を $\mathcal{E}$ の最大不安定化部分束 (maximally destabilizing subbundle) という．定義から $\mu(\mathcal{E}_0) = \mu_{\max}(\mathcal{E}) \geqq \mu(\mathcal{E})$ であり，また $\mathcal{E}_0$ は半安定である．また以下の３条件が同値であることもすぐわかる．

(1) $\mathcal{E}$ が半安定．

(2) $\mu_{\max}(\mathcal{E}) = \mu(\mathcal{E})$.

(3) $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$.

$\mathcal{E}$ が不安定であればその最大不安定化部分束 $\mathcal{E}_0$ による商束 $\mathcal{E}/\mathcal{E}_0$ を考え，これがまた不安定であれば，その最大不安定化部分束を $\mathcal{E}_1/\mathcal{E}_0$ として，$\mathcal{E}/\mathcal{E}_1$ を考える．このような操作を繰り返せば部分ベクトル束の上昇列

$$\textbf{(HN)} \qquad 0 \neq \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{E}_s = \mathcal{E}$$

であって，２条件

(1) $\mathcal{E}_j/\mathcal{E}_{j-1}$ は torsion free （曲線上なのでベクトル束であることと同値）であり半安定.

(2) $\mu(\mathcal{E}_0) > \mu(\mathcal{E}_1/\mathcal{E}_0) > \cdots > \mu(\mathcal{E}_s/\mathcal{E}_{s-1})$.

をみたすものがある．しかも $\mathcal{E}/\mathcal{E}_{i-1}$ の最大不安定化部分束が $\mathcal{E}_i$ であることもわかり，そのことから上のような上昇列 はただ一つしかないことが従う [Harder-Narasimhan 74]．こうして $\mathcal{E}$ から一意的に定まる部分束の上昇列 (**HN**) を $\mathcal{E}$ の **Harder-Narasimhan filtration** と呼ぶ.

標数 0 の世界では，半安定性が分岐被覆で保たれることを見よう（残念ながら正標数においては必ずしも保たれない）．底空間である C の分岐被覆 $f\colon \overline{C} \to C$ をとる．C 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ が不安定なら，その引き戻し $f^*\mathcal{E}$ も不安定である．実際 $\mathcal{E}$ の最大不安定化部分束 $\mathcal{E}_0$ をとれば，$f^*\mathcal{E}_0 \subset f^*\mathcal{E}$ で $\mu(f^*\mathcal{E}_0) > \mu(f^*\mathcal{E})$ となるからである．f の Golois 閉包を $\tilde{f}\colon \tilde{C} \to C$ とすれば，分岐被覆の列 $\tilde{C} \to \overline{C} \to C$ ができるから，上で見た議論より，

$$\mathcal{E} \text{ が不安定} \Rightarrow f^*\mathcal{E} \text{ が不安定} \Rightarrow \tilde{f}^*\mathcal{E} \text{ が不安定}$$

である．しかし実は $\tilde{f}^*\mathcal{E}$ が不安定ならば，もとの $\mathcal{E}$ も不安定なのである．実際，$\tilde{f}^*\mathcal{E})$ が不安定であると仮定し，その最大不安定化部分束を $\tilde{\mathcal{F}}$ とする．前に注意したように，$\tilde{f}^*\mathcal{E}$ の自己同形は $\tilde{\mathcal{F}}$ を保つ．特に被覆ガロア群 $Gal(\tilde{C}/C)$ は $\mathcal{F}$ を保ち，したがって $\tilde{\mathcal{F}}$ は $\mathcal{E}$ の部分束 $\mathcal{F}$ の $\tilde{f}$ による引き戻しになっており，$\mathcal{F}$ は $\mathcal{E}$ の最大不安定化部分束である．これは $\mathcal{E}$ が不安定であることを意味する．すなわち任意の分岐被覆 $f\colon \overline{C} \to C$ に対して，$f^*\mathcal{E}$ の不安定性と $\mathcal{E}$ の不安定性，$f^*\mathcal{E}$ の半安定性と $\mathcal{E}$ の半安定性が同値の条件であり，$\mathcal{E}$ の最大不安定部分束の引き戻しがそれぞれの最大不安定化部分束になっていることがわかった．すなわち半安定性や **Harder-Narasimhan filtration** は分岐被覆に関して不変である.

半安定性の幾何学的ないしは解析的な解釈は以下で与えられる.

定理 1.1 [Miyaoka 87b]. $\mathcal{E}$ を代数曲線 C 上の階数 r のベクトル束とし，$\pi\colon \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to C$ を $\mathcal{E}$ に付随する射影空間束（双対ベクトル束 $\mathcal{E}^*$ から 0 切断を除き，自然な $\mathbb{C}^\times$ 作用で割った商空間），H を $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ 上の tautological 因子（$\pi_*\mathcal{O}(H) = \mathcal{E}$）とする．このとき以下の 4 条件は同値である.

(1) $\mathcal{E}$ は半安定.

(2) $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ 上の $\mathbf{Q}$ 因子 $H - (1/r)\pi^* \det \mathcal{E}$ はネフ.

(3) $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ の相対反標準因子 $-K_{\mathbb{P}(\mathcal{E})/C}$ はネフ.

(4) 写像度が r で割り切れるような任意の分岐被覆 $f\colon \overline{C} \to C$ に対して，$f^*\mathcal{E}(\det f^*\mathcal{E}/r)$ は $\overline{C}$ 上半正かつ半負なベクトル束.

ここで射影多様体 Z 上の Cartier 因子 D がネフ (net, numerically eventually free) であるとは，Z 上の任意の曲線 C に対して $DC \geqq 0$ が成立することである，Kleiman の豊富性判定法 ([Hartshorne 70] を参照）によれば，ネフな因子は豊富な $\mathbb{Q}$ 因子の極限である．ネフを微分幾何的に言い換えると，Z の Kähler 形式 ω を一つ固定したとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\mathcal{O}(D)$ の Hermite 計量 h をうまくとったとき，そのリッチ曲率 $\mathrm{Ric}h = \overline{\partial}\partial \log h/2\pi\sqrt{-1}$ が $-\epsilon\omega$ で下から押さえられる，すなわち $\mathrm{Ric}h + \varepsilon\omega$ が Kähler 形式になることである．また Z 上のベクトル束が半正 (semipositive) であるとは，付随する射影束の tautological line bundle がネフであることを言う．微分幾何的には，任意の $\epsilon > 0$ に対して，$\mathcal{E}$ の Finsler 計量をうまく選ぶとその曲率が $-\epsilon\omega$ で下から押さえられることである．また $\mathcal{E}$ が半負 (seminegative) とは，その双対 $\mathcal{E}^*$ が半正ベク

トル束であることをいう．定義から容易に想像される通り，半正（半負）なベクトル束同士のテンソル束は半正（半負）である [Hartshorne 70].

定理 1.1 の代数的な証明は意外に面倒ではあるが初等的である（[Miyaoka 87b] を参照されたい）．微分幾何による証明も可能で，それには det が自明な安定ベクトル束は C の基本群の既約 $SU(r)$ 表現から定まり，したがって平坦ベクトル束であるという [Narasimhan-Seshadri 65] の結果を用いる（平坦なベクトル束は，その部分束の曲率は非正であることから半安定である．さらにそのモノドロミー表現が既約なら，平坦部分束を含み得ないので安定である．したがって SU 既約表現から得られるベクトル束は安定である．また既約表現のモジュライの次元と安定ベクトル束のモジュライの次元が一致することは少し計算してみれば簡単にわかる．問題は安定ベクトル束が既約表現から得られることの証明であるが，C の普遍被覆上まで引き戻せば $\mathcal{E}$ は自明になるから，この自明束に $\pi_1(C)$ 不変な計量を構成する）．

上記定理にある条件 (4) の意味は，適当に直線束をテンソルして $\mathcal{E}$ の次数を 0 と標準化しておけば，$\mathcal{E}$ の半安定性は $\mathcal{E}$ の半正性（半負性）に翻訳できるということである．前にも注意したように，半正のベクトル束同士のテンソル積は半正である [Hartshorne 70] から，次の結果が従う．

系 1.2. (テンソル積による半安定性の保存)．ベクトル束 $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ が半安定ならば，$\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ も半安定である．半安定ベクトル束の対称積や交代積は半安定である．

系 1.2 から直ちに以下の系 1.3，さらにその結果として系 1.4 が従う．

系 1.3. 代数曲線 C 上，階数 r の $\mathcal{E}$ が半安定であるとする．このとき，

(1) m を正整数，D を因子とする．$\deg D > m\mu(\mathcal{E})$ ならば

$$H^0(C, (\mathrm{Sym}^m \mathcal{E})(-D)) = 0.$$

(2) 整数 a を固定する．$\deg D = a$ とすると，

$$\dim H^0(C, (\mathrm{Sym}^{rm} \mathcal{E})(-m \det \mathcal{E} + D)) = O(m^{r-1}).$$

系 1.4. 代数多様体 X 上の非特異曲線の族 $\{C_s\}$ と階数 r の torsion free 層 $\mathcal{E}$ を考える．$\bigcup_s C_s$ は X 上 Zariski 稠密であり，一般の C_s に $\mathcal{E}$ を制限すると半安定ベクトル束になっていると仮定する．このとき，

(1) m を正整数，D を X 上の因子とする．$DC_s > m\mu(\mathcal{E})|_{C_s}$ ならば

$$H^0(X, (\mathrm{Sym}^m \mathcal{E})(-D)) = 0.$$

(2) 整数 a を固定し，$DC_s = a$ となる因子 D を取れば，

$$\dim H^0(X, (\mathrm{Sym}^{rm} \mathcal{E})(-m \det \mathcal{E} + D)) = O(m^{r+\dim X-2}).$$

系 1.4 はごくごく初等的な考察に過ぎないけれども，次の節 (連接層の場合) および 8 節（Higgs 層の場合）で解説する Meht-Ramanathan の制限定理と組み合わせることにより，半安定 torsion free 連接層や半安定 Higgs 層の Chern 類に関する不等式である Bogomolov 不等式を導く重要な結果である．

2. 高次元射影多様体上の半安定層と Mehta-Ramanathan の制限定理，Bogomolov 不等式

X を d 次元の非特異射影多様体とし，多重偏極 (multi-polarization) $\vec{H} = (H_1, \ldots, H_{d-1})$ を豊富な因子の列とする（従来は H_k がすべて同一の H である場合を考えることが多かったが，偏極を動かしていくときに半安定性が変化して起こる壁越え wall crossing の現象を考察する上では，偏極を一個ずつ動かすことができる多重偏極のほうが扱いがずっと楽になる）．$\mathcal{E}$ を X 上の階数 r の torsion-free な層としたとき，$\mathcal{E}$ の $\vec{H}$ スロープを $\mu^{\vec{H}}(\mathcal{E}) = (1/r)H_1 \cdots H_{d-1}c_1(\mathcal{E})$ で定義する ($H_1, \ldots, H_{d-1}$ が非常に豊富なら，$\vec{H}$ スロープとは $\mathcal{E}$ を曲線 $H_1 \cap \cdots \cap H_{d-1}$ に制限して得られるベクトル束のスロープである)．曲線の場合と同様，$\mathcal{E}$ を固定したとき，$\{\mu^{\vec{H}}(\mathcal{F}); \mathcal{F} \subset \mathcal{E}\} \subset (1/r!)\mathbb{Z}$ は上に有界であり，その最大値，すなわち $\mathcal{E}$ の最大 $\vec{H}$ スロープ (maximum $\vec{H}$ slope) $\mu^{\vec{H}}_{\max}(\mathcal{E})$ が存在する．また最大 $\vec{H}$ スロープを $\vec{H}$ スロープとして実現するような部分層 $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ のうち最大のもの $\mathcal{E}_0$ が存在し，$\mathcal{E}$ の最大 $\vec{H}$ 不安定化部分層 (maximally $\vec{H}$-destabilizing subsheaf と呼ばれる．一般に $\mu^{\vec{H}}(\mathcal{F}) = \mu^{\vec{H}}_{\max}(\mathcal{E})$ ならば，$\mathcal{E}/\mathcal{F}$ の torsion part の台は余次元 2 以上であり，最大 $\vec{H}$ 不安定化層 $\mathcal{E}_0$ は自動的に飽和部分層 ($\mathcal{E}/\mathcal{E}_0$ は torsion free) である（$\mathcal{E}$ がベクトル束であっても，$\mathcal{E}_0$ や $\mathcal{E}/\mathcal{E}_0$ は必ずしもベクトル束ではない）．また次の 3 条件は同値である．

(1) 任意の非自明な部分層 $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ に対して $\mu^{\vec{H}}(\mathcal{F}) \leqq \mu^{\vec{H}}(\mathcal{E})$.

(2) $\mu^{\vec{H}}_{\max}(\mathcal{E}) = \mu^{\vec{H}}(\mathcal{E})$

(3) $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$.

これらの条件が成立するとき，$\mathcal{E}$ は $\vec{H}$ 半安定 ($\vec{H}$-semistable) であるという．その否定は $\vec{H}$ 不安定 ($\vec{H}$-unstable) である．($\vec{H}$ の成分 H_k がすべて同一の H である場合は，$\vec{H}$ 半安定，$\vec{H}$ 不安定などを，H 半安定，H 不安定などという)．

$\mathcal{E}$ が $\vec{H}$ 半安定なら，その双対 $\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{O})$ も $\vec{H}$ 半安定であり，また $\mathcal{L}$ を直線束とすると $\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}$ も $\vec{H}$ 半安定である．$\mathcal{E}$ が $\vec{H}$ 不安定ならば $\mathcal{E}/\mathcal{E}_0$ の最大 $\vec{H}$ 不安定化部分層 $\mathcal{E}_1/\mathcal{E}_0$ を考え，torsion free な商 $\mathcal{E}/\mathcal{E}_0$ の最大 $\vec{H}$ 不安定化部分層 $\mathcal{E}_1/\mathcal{E}_0$ を考える．このような操作を繰り返すことによって，曲線の場合と同様この場合も **Harder-Narasimhan filtration**

$$0 \neq \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{E}_s = \mathcal{E}$$

がただ一つ定まる．当然ながら，Harder-Narasimhan filtration $\{\mathcal{E}_i\}$ は 2 条件

(1) $\mathcal{E}_j/\mathcal{E}_{j-1}$ は torsion free であり $\vec{H}$ 半安定.

(2) $\mu^{\vec{H}}(\mathcal{E}_0) > \mu^{\vec{H}}(\mathcal{E}_1/\mathcal{E}_0) > \cdots > \mu^{\vec{H}}(\mathcal{E}_s/\mathcal{E}_{s-1})$.

をみたす．

多重偏極を固定し，$\mathcal{E}$ の変形 $\mathcal{E}_s$ を考えたとき，$\vec{H}$ 半安定性は s に関して open condition である．すなわち $\mathcal{E}_s$ が $\vec{H}$ 半安定となる s はパラメータ空間の開集合を作る（不安定層を与える s が閉集合であることは，最大不安定部分層を $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ の閉部分集合と対応させることにより，Hilbert スキームの理論から従う)．これに対して $\mathcal{E}$ を固定して多重偏極の変形 $\vec{H}_t$ を考えたときは，$\vec{H}_t$ 不安定性のほうが t に関する開条件になることが簡単にわかる（パラメータを動かす場合，$\vec{H}_t$ は 豊富な $\mathbb{Q}$ 因子からなる列を考えることにする)．簡単な例として，曲面上のベクトル束 $\mathcal{E} = \mathcal{O}(D) \oplus \mathcal{O}(-D)$ を考えると，$\mathcal{E}$ が H 半安定になるための必要十分条件は $HD = 0$ であり，そのような H は豊富錐と超平面の共通部分の点である．

$\mathcal{E}$ が $\vec{H}$ 不安定なら，非特異超曲面 Y を線形系 $|mH_{d-2}|$ から選び，$\vec{H}_Y=(H_1|_Y,\ldots,H_{d-2}|_Y)$ とおけば，最大 $\vec{H}$ 部分層 $\mathcal{E}_0$ の Y への制限の $\vec{H}_Y$ スロープは $\mathcal{E}|_Y$ のそれより大きく，したがって制限 $\mathcal{E}|_Y$ は $\vec{H}_Y$ 不安定である．しかし逆は必ずしも成立せず，半安定なものの制限が不安定となることも起こりうる．たとえば $X=\mathbb{P}^2$，$\mathcal{E}=T_{\mathbb{P}^d}$, H を直線が定める因子, $Y=H=\mathbb{P}^1$ とすれば，接束 $\mathcal{E}$ は H 半安定であるが，制限 $\mathcal{E}|_Y=\mathcal{O}(2)\oplus\mathcal{O}(1)$ は不安定である．つまり非特異かつ豊富な有効因子への制限は一般に半安定性を保存しない．しかしながら，因子 Y が非常に高い次数をもちしかも完備線形系のなかで十分一般ならば，Y への制限は半安定性をが保つ．すなわち

定理 2.1 (Mehta-Ramanathan の制限定理 [Mehta-Ramanathan 81]). d 次元の非特異射影多様体 X 上の torsion free 層 $\mathcal{E}$ が $\vec{H}=(H_1,\ldots,H_{d-1})$ 半安定であると仮定する．十分大きな整数 m を選び（どの程度大きければよいかは $(X,\vec{H},\mathcal{E}$ によって定まる)，Y を $|mH_{d-1}|$ の一般の元（ある Zariski 開集合の元）とすると，$\mathcal{E}|_Y$ は $\vec{H}_Y$ 半安定である．

証明． 完備線形系 $T=|mH|\simeq\mathbb{P}^N$ および incidence variety $\Gamma=\{([Y],x)\ x\in Y\}\subset T\times X$ を考える．Γ は $T\times X$ の超平面切断であり，Leftscetz の定理より $\mathrm{Pic}(\Gamma)\simeq\mathbb{Z}\oplus\mathrm{Pic}(X)$ である．一般の $[Y]\in T$ に対して，$\mathcal{E}|_Y$ の最大不安定化部分層を $\mathcal{F}_Y$ とおく．$[Y]$ を動かすことによって，Γ 上定義された層 $\mathrm{pr}_X^*\mathcal{E}$ の飽和部分層 $\mathcal{F}$ を自然に構成することができる（本質的には Hilbert scheme の理論である）．$\mathcal{F}$ が実は X 上定義された層の引き戻しになっていること，すなわち X への射影 pr_X のファイバー（すべて $T=\mathbb{P}^N$ の超平面であり，pr_X は $\mathbb{P}^{N-1}$ 束である）上自明束であることを言えばよい．$\mathcal{F}$ の階数を s とおき，$\mathcal{F}$ はファイバー上自明な層　$\mathrm{pr}_X^*\mathcal{E}$ に含まれていることを思い出せば，証明すべき条件は $\det\mathcal{F}=c_1(\mathcal{F})$ が $\mathrm{pr}_X^*\mathrm{Pic}(X)$ の元となっているという条件と同値である．$c_1(\mathcal{F})=-m\mathrm{pr}_T^*L+\mathrm{pr}_X^*D$ とおく．$[Y]\in T$ に対して，$\mathrm{pr}_T^{-1}([Y])=Y$ へ L を制限すれば自明な因子であるから，$\mathcal{O}(D)|_Y\subset\bigwedge^s\mathcal{E}|_Y)$ である．ここで m が非常に大きいという仮定を用いれば，Serre の消滅定理より，上の包含写像を $\mathcal{O}(D)\subset\bigwedge^s\mathcal{E}$ に持ち上げることができる．そうすると一般の $[Y']\in T$ に対しても，$\mathcal{O}(D)|_{Y'}$ は $\bigwedge^s\mathcal{E}|_{Y'}$ の最大不安定化層であり，したがってわれわれの構成から必然的に $\bigwedge^s\mathcal{F}=\mathcal{O}(\mathrm{pr}_X^*D)$ でなくてはならない．(証明了)

以上の証明は元来 $\mathcal{E}$ が曲面上階数 2 のベクトル束である場合 Mumford が与えたもの（未発表）を，Mehta と Ramanathan が一般の場合にそのまま拡張したものである．証明を振り返って見ればわかるように．X が非特異であるという仮定は重要ではない．ただし c_1 や安定性などをきちんと定義するためには．特異点の余次元が 2 以上であることが必要である．したがって定理 2.1 は X を正規な射影多様体としても成立する．また X のかわりにその双有理射による正規な像 $\mu\colon X\to Y$ および $\mu_*\mathcal{E}$ を考えることにより，$\vec{H}$ の各成分 H_i に対する条件を big かつ semiample（ある正の整数 m があって，$|mH_i|$ は基点をもたず双有理射を定める）に弱めてもよい．こうした一般化は技術的なものに過ぎないとはいえ，極小多様体理論など特異点を伴う多様体への応用を考えるに際してはどうしても必要になる．

定理 2.1 からいくつかの重要な系が従う．まず系 1.2 と組み合わせれば次がわかる．

系 2.2. $\mathcal{E},\mathcal{F}$ が $\vec{H}$ 半安定ならば，$\mathcal{E}\otimes\mathcal{F}$ も $\vec{H}$ 半安定である．特に $\mathrm{Sym}^m\mathcal{E}$ や $\bigwedge^m\mathcal{F}$ も $\vec{H}$ 半安定である．

系 2.3. D を d 次元多様体 X 上の因子，A を有効因子とし，階数 r の $\mathcal{E}$ が $\vec{H}$ 半安定と仮定する．このとき

(1) $H^0(X,(\mathrm{Sym}^{rm}\mathcal{E})(-m\det\mathcal{E}-A)=0$.

(2) $H^0(X, (\mathrm{Sym}^{rm}\mathcal{E})(-m\det\mathcal{E} - D) = O(m^{r+d-2})$.

(3) $d = 2$ ならば，$\chi(X, (\mathrm{Sym}^{rm}\mathcal{E})(-m\det\mathcal{E}) \leqq O(m^r)$.

系 2.3 (3) に曲面の Riemann-Roch 定理を適用すると，次の有名な **Bogomolov** 不等式が得られる．

定理 **2.4**. ([Bogomolov 78][Gieseker 79][Miyaoka 87b]). X を d 次元非特異射影多様体，多重 $\vec{H} = (H_1, \ldots, H_{d-1})$ を豊富な因子の列，$\mathcal{E}$ を階数 r の torsion free 層とする，$\mathcal{E}$ が $\vec{H}$ 半安定ならば，Bogomolov 不等式

$$(r-1)H_1 \cdots H_{d-2}c_1^2(\mathcal{E}) \leqq 2rH_1 \ldots H_{d-2}c_2(\mathcal{E})$$

が成立する．

実際，Mehta-Ramanathan によって，証明は $d = 2$ の時に帰着し，その場合，この不等式は系 2.3 (3) を Riemann-Roch を用いて書き換えたものに他ならない．

以上の初等的な証明は [Miyaoka 87b] による．[Bogomolov 78] の証明は [Mumford 65] の非自明な定理を用いており，わかりにくい．[Gieseker 79] は正標数への還元を使って証明している．また，以下に述べるように，($\mathcal{E}$ がベクトル束，$\vec{H} = (H, \ldots, H)$ である場合は) 微分幾何における小林 -Hitchin 対応から得られる別証明もある．この別証明は大定理を用いるもので決して易しくはないが，不等式で等号が成立するための必要充分条件を与えるという大きな利点がある．

小林 **- Hitchin** 対応とはリーマン面上の安定ベクトル束に対する Narashimhan-Seshadri の定理の高次元化であり，次のように述べられる．

定理 **2.5** (小林-Hitchin 対応). (X, H) を非特異な射影偏極多様体，$\mathcal{E}$ を X 上のベクトル束とする．

(1) ([Kobayashi 82]) $\mathcal{E}$ が Hermitian-Einstein 計量をもてば，$\mathcal{E}$ は H 安定ベクトル束の直和である．

(2) ([Donaldson 82][Uhlenbeck-Yau 86]) $\mathcal{E}$ が H 安定ベクトル束ならば $\mathcal{E}$ は Hermitian-Einstein 計量をもつ．

H 安定な $\mathcal{E}$ に Hermitian-Einstein 計量があれば，$\mathcal{E}$ の Chern 形式 $2rc_2(\mathcal{E}) - (r-1)c_1^2(\mathcal{E})$ は正値微分形式になり，0 になることと，$\mathcal{E}$ が共形平坦 (conformally flat) となることが同値となる．(定理 2.5 では H 安定としているが，一般の多重偏極に対する $\vec{H}$ 安定への一般化も可能であろう）．

系 **2.6** (Narasimhan-Seshadri の定理の高次元化)．X 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ が積分可能な接続をもつ必要十分条件は，$\mathcal{E}$ が自明な $c_1, c_2 \in H^*(X, \mathbb{R})$ をもつ H 安定ベクトル束の直和と同型であることである．

3. Bogomolov 不等式の応用

S を非特異代数曲面，$\mathcal{E}$ を階数 2 のベクトル束とする．$\mathcal{E}$ の Chern 類が Bogomolov 不等式を満たさない（**Bogomolov** 不安定という）とすると，$\mathcal{E}$ は特別な直線束を含むことが，以下のようにしてわかる．

簡単のために，$\det\mathcal{E} = \mathcal{O}$ であると仮定する．(適当に分岐被覆までもちあげて直線束とのテンソル積をとればこの仮定は常に実現できるので，これで一般性が損なわれることはない)．この場合，

Bogomolov 不安定性は $c_2(\mathcal{E})<0$ という条件である．H を豊富な因子とすると，Bogomolov 不安定な階数 2 の $\mathcal{E}$ は H 不安定であり，最大 H 不安定化部分層として直線束 $\mathcal{O}(\Delta)$ を含む．完全列

$$0 \to \mathcal{O}(\Delta) \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}/\mathcal{O}(\Delta) \to 0$$

を用い，$c_2(\mathcal{E})$ を Chern 類の定義にしたがって計算すると，

$$0 > c_2(\mathcal{E}) = c_1(\mathcal{O}(\Delta))c_1(\mathcal{E}/\mathcal{O}(\Delta)) + c_2(\mathcal{E}/\mathcal{O}(\Delta)) \geqq -\Delta^2$$

であるから，$\Delta^2>0$, かつ $\Delta H>0$ が得られる．すなわち，Δ は $\mathbb{Q}$ 因子として big である（正の整数 m を大きくしていくと，$\dim H^0(S,\mathcal{O}(mD))$ は m^2 と同じ増大度をもつ）．特にどんな豊富な因子 H' をとっても，$\Delta H'>0$ であり，$\mathcal{O}(\Delta)$ は $\mathcal{E}$ の最大 H' 不安定化部分層である．つまり $\mathcal{E}$ の最大 H 不安定化部分層は，任意の H' に対して最大 H' 不安定化部分層であり，H をパラメータをつけて動かしても Harder-Narasimhan filtration はまったく変化しない．(階数 3 以上の Bogomolov 不安定なベクトル束ではこのようなことは一般に成立せず，H を動かすと Harder-Narashimhan filtration が変化する場合がある）．

$\det\mathcal{E}$ が必ずしも自明でないときにも上の結果は容易に拡張できる．その場合，直線束 $\mathcal{O}(\Delta)\subset\mathcal{E}$ が存在し，$\Delta-(1/2)\det\mathcal{E}$ は big な $\mathbb{Q}$ 因子である．そしてこの直線束は，任意の豊富因子 H について $\mathcal{E}$ の最大 H 不安定化部分層である．この事実と次節で説明する De Franchis の定理（定理 4.1）から次の結果が得られる．

定理 3.1 (Bogomolov [Reid 77]). S が極小曲面（K_S は半正すなわちネフ）とすると，Ω^1_S は Bogomolov 不安定ではない．つまり $4c_2(S)\geqq K_S^2$.

証明．Bogomolov 不安定ならば，Ω^1 は直線束 $\mathcal{O}(\Delta)$ を含み，$2\Delta = K_S + (\text{big な因子})$ なので Δ も big な因子である．これは De Franchis の定理に反する．

階数２のベクトル束に対する Bogomolov 不等式を曲面の線形系の理論に応用したのは Mumford と Reider である．

定理 3.2 (Mumford の消滅定理 [Reid 77]). 曲面 S 上のネフな因子 D が $D^2>0$ を満たせば $H^1(S,\mathcal{O}(-D))=0$.

証明．拡大 $0\to\mathcal{O}\to\mathcal{E}\to\mathcal{O}(D)\to 0$ を考える，$c_1(\mathcal{E})=D$, $c_2(\mathcal{E})=0$ なので，$\mathcal{E}$ は Bogomolov 不等式をみたさず，最大不安定化部分層 $\mathcal{O}(\Delta)\subset\mathcal{E}$ を含む．$\mathcal{O}(\Delta)\subset\mathcal{O}(D)$ であるから，適当な有効因子 E をとって，$\Delta=D-E$ の形である．したがって $\Delta D=\lambda D^2$ とおくと，$\lambda\leqq 1$ であり，一方 $\Delta=(1/2)D+(\text{ big divisor})$ なので，$\lambda>1/2$ が得られる．一方 $0=c_2(\mathcal{E})\geq\Delta(D-\Delta)=\lambda D^2-\Delta^2$ であるが， Hodge 指数定理から $-\Delta^2\geq\lambda^2D^2$ だから，$\lambda(1-\lambda)^2\leqq 0$ すなわち $\lambda=1$ が得られる．しかも Hodge 指数定理で等号が成立しているので，Δ は D と数値的に同値であり，有効因子 E は 0 でなければならない．結局 $\Delta=D$ となり，拡大は自明である．すなわち $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(D),\mathcal{O})=H^1(S,\mathcal{O}(-D))=0$ が得られた．(証明了)

Mumford の消滅定理の結果は，軌道体 (orbifold) の小平消滅定理から導かれる川又 -Viehweg の消滅定理の特別の場合にすぎず，それ自身の重要性は減じてしまった．しかしながら，この定理の証明に用いた議論は，$D^2>0$ の条件を残しておけば，D がネフであるという条件をはずしてもある程度通用する．すなわち

定理 3.3 ([Reider 88]). 曲面 S 上の因子 D が $D^2 > 0$, $H^1(S, \mathcal{O}(-D)) \neq 0$ をみたすと仮定する. このとき有効因子 $C > 0$ が存在して, $(D - C)C \leq 0$.

証明. 非自明な拡大 $0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{E} \to \mathcal{O}(D) \to 0$ の最大不安定化層を $\mathcal{O}(\Delta) = \mathcal{O}(D - C)$ とおけばよい. (証明了)

系 3.4 ([Reider 88]). 曲面 S 上のネフ因子 L をとる.

(1) $L^2 \geqq 5$ で $|K_S + L|$ が基点 x をもてば, x を含む有効因子 C があって, LC と C^2 の組み合わせは $(0, -1)$ あるいは $(1, 0)$ のいずれかである.

(2) $L^2 \geqq 10$ で $|K_S + L|$ が基点をもたないが, 2点 x_1, x_2 を分離しないと仮定すると, x_1, x_2 をともに含む有効因子 C があって, LC, C^2 の組み合わせは, $(0, -2), (0, -1), (1, -1), (1, 0), (2, 0)$ のいずれかである.

略証. x あるいは x_1, x_2 で S を blow up し, 基点をもつ等の性質を H^1 の非自明性に翻訳して定理 3.3 を適用すればよい. たとえば (1) の場合は $\mu\colon \tilde{S} \to S$ を x での blowup, E を例外曲線として, $D = \mu^* L - 2E$ として定理 3.3 を適用する.

上の Reider の定理は, ごく単純な発見であるにもかかわらず, 曲面上の線形系の底点自由定理や双有理性定理, 埋め込み定理に関しては現時点で最強の結果を導く. たとえばアーベル曲面上の豊富因子 H をとれば $2H$ は基点をもたず, $3H$ は A の埋め込みを与えることがわかる.

4. De Franchis の定理と曲面に対する宮岡-Yau 不等式

X を d 次元非特異射影代数多様体とする. X の余接束 $\Omega = \Omega_X^1$ は必ずしも $\vec{H}$ 安定ではない (たとえば X が曲線の直積であるときを考えればよい). しかしながら, Ω はあまりに大きな部分層を含むことはできない. 換言すれば, 極端に不安定ではありえない. 実際次の定理が成立する.

定理 4.1 (de Franchis). X を非特異射影多様体とする. r 次微分形式の層 Ω_X^r に含まれる直線束 $\mathcal{O}(D)$ をとると,. 任意の正整数 m について, $H^0(X, (\det \mathcal{F})^{\otimes m})$ は $r+2$ 個の代数的に独立な元を含むことはできない. 言い換えれば, $\kappa(X, D) \leqq r$ (ここで直線束 L に対して $\kappa(X, D)$ は飯高によって定義された D 次元で, $\dim H-^0(X, \mathcal{O}(mD))$ の漸近的増大度を表す整数である). 特に $\mathcal{F} \subset \Omega_X^1$ を階数 r の層とすれば, $\kappa(X, \det \mathcal{F}) \leqq r$ である.

証明. (1) まず $m = 1$ のときに帰着することをいう. $\mathcal{O}(D) = \det \mathcal{F}^{\otimes m}$ とおいたとき, $H^0(X, \mathcal{O}(mD))$ が $s+1$ 個の代数的に独立な元を含むという条件は, 完備線形系 $|D|$ が定義する有理写像の像の次元が s 以上であることと同じである. X をその適当な blow up でおきかえれば $|D|$ の可動部分 $|M|$ は基点をもたない. さらに $|M|$ の $s+1$ 個の一般の元 L_i に沿って m 重に分岐する非特異な Kummer 被覆 Y をとれば, Y 上 M の引き戻しはある整因子 $\tilde{M}$ の m 倍となっており, $|\tilde{M}|$ は L_i の引き戻しの $1/m$ 倍に対応する $s+1$ 個の独立な切断をもつ. そして $\tilde{M}$ は Ω_X^r の引き戻し $\subset \Omega_Y^r$ に含まれるので, (X, D) を $(Y, \tilde{M})$ に置き換えることによって, 定理は $m = 1$ の時に帰着した.

(2) 以下 $m = 1$ とする. $\mathcal{O}(D) \subset \Omega_X^r$ が $r+2$ 個の代数的に独立な大域切断 $\sigma_0, \ldots \sigma_{r+1}$ を含んだと仮定して矛盾を導く. 仮定から, 一般の点 x の近傍で適当な座標系 $(z_1, \cdots, z_d)$ をとって, $\sigma_1 = z_1 \sigma_0, \ldots, \sigma_{r+1} = z_{r+1} \sigma_0$ と書ける. σ_k は大域的な正則 r 形式なので, d 閉である. したがっ

て $0 = d\sigma_k = dz_k \wedge \sigma_0$, $k = 1, \ldots, r+1$ が成立する．しかし r 次微分形式 σ_0 を $dz_1, \ldots, dz_n$ を使って書き下せば，それは不可能であることがすぐわかる．(証明了)

上の証明を見ると，$\mathcal{F} \subset \Omega^1_X$ が $\kappa(\det \mathcal{F}) = r = \operatorname{rank} \mathcal{F}$ を満たしていれば，r 次元多様体への有理写像 $f\colon X \to Y$ があって，$\mathcal{F}$ は本質的には Ω^1_Y の f による引き戻しになっている（すなわち X の一般の点においては $\mathcal{F} = f^*\Omega_Y$ が成立している）こともわかる．

De Franchis の定理を２次元の場合に適用してみれば，極小曲面 S の余接束 $\Omega = \Omega^1_S$ の部分直線束は非常に特殊な性質をもつことがわかる．ここで非特異代数曲面 S が極小 (minimal) であるとは，標準因子 $K = K_S$ がネフである（任意の曲線 $C \subset S$ に対して $CK \geqq 0$）ことを言う．古典的な曲面論によれば，極小曲面の小平次元は 0 以上であり (Enriques)，逆に小平次元が 0 以上の非特異曲面は極小曲面に有限回 の blow up を施したものである (Castelnuovo).

系 **4.2.** S を極小代数曲面とし，$f\colon V \to S$ を分岐被覆とする．$\mathcal{O}_V(D) \subset f^*\Omega^1_S$ を直線束とすると，$Df^*K_S \leqq 0$ であるか，$D^2 \leqq 0$ が成立する．

証明.　$D^2 > 0$ であれば，$\kappa(D) = 2$ または $\kappa(-D) = 2$ である．De Franchis より前者は起こりえないので，$\kappa(-D) = 2$ であり，K_S がネフだから $-Df^*K_S \geqq 0$ が成り立つ．(証明了)

系 **4.3.** 4.2 と同じ仮定のもとで，

(1) $Df^*K_S \leqq 0$ であるか，$Df^*K_S \leqq c_2(S)$ である．

(2) $c_2(S) \geqq 0$.

証明. 以下簡単のために Ω^1_S を Ω と書く．

(1) $\mathcal{O}(D) \subset f^*\Omega$，$Df^*K_S > 0$ と仮定する．適当に有効因子 A をとると，$\mathcal{O}(D+A) \subset f^*\Omega$ は飽和部分層である．必要なら D を $D+A$ で置き換えて，$A = 0$ と仮定してよい．このとき V の 0 次元閉部分スキームのイデアル層 $\mathcal{I}$ を適当にとると，$\Omega/\mathcal{O}(D) = \mathcal{I}(f^*(K_X - D))$ の形である．すると，チャン類の定義から，

$$\begin{aligned} c_2(f^*\Omega) &= c_1(\mathcal{O}(D)c_1(\mathcal{I}(f^*(K_X - D)) + c_2(\mathcal{I}(f^*(K_X - D))) \\ &= Df^*(K_X - D) + c_2(\mathcal{I}) \geqq Df^*(K_X - D) \end{aligned}$$

である．ここで系 4.2 で得られた不等式 $D^2 \leqq 0$ を用いれば，$Df^*K_X \leqq f^*c_2(\Omega)$ が得られる．

(2) $c_2(\Omega) < 0$ ならば，リーマン・ロッホを用いると，$\chi(S, \operatorname{Sym}^m \Omega) = (1/6)(K_X^2 - c_2(\Omega))m^3 + O(m^2) = O(m^3)$ である．また $\Omega^* = T_S \sim \Omega(-K_S)$ を考慮すると，Serre 双対より $\dim H^2(S, \operatorname{Sym}^m \Omega) = \dim H^0(S, (\operatorname{Sym}^m \Omega)(-(m-1)K_S)) \leqq H^0(S, \operatorname{Sym}^m \Omega)$ であるから，$\dim H^0(S, \operatorname{Sym}^m \Omega) = O(m^3)$ である．したがって，豊富な因子 H を一つ固定し m を十分大きくとると，$\dim H^0(S, \operatorname{Sym}^m \Omega(-H)) \neq 0$ である．すると適当に分岐被覆 $f\colon V \to S$ と V の因子 $D = (1/m)f^*H$ が存在して，$\mathcal{O}(D) \subset f^*\Omega$ であって，しかも $Df^*K_X > 0 > f^*c_2(\Omega)$ が成立することになり，(1) に矛盾する．(証明了)

この系から次の宮岡-**Yau** 不等式が得られる．

定理 **4.4** [Miyaoka 77][Yau 77]. 極小代数曲面 S に対して $c_1^2(S) \leqq 3c_2(S)$ が成立する．

証明. $c_2(S) = c_2(\Omega) \geqq 0$ だから，$c_1^2(S) = K_S^2 = 0$ なら不等式は成立している．$K_S^2 > 0$ と仮定し，$\alpha = c_2(S)/K_S^2$ とおく．$\alpha \geqq 1/2$ なら命題は成立しているから，$\alpha < 1/2$ と仮定する．このと

き十分大きな m に対して

$$\begin{aligned}\dim H^2(S,(\mathrm{Sym}^m l\Omega)(-m\alpha K_X)) &= \dim H^2(S,(\mathrm{Sym}^m\Omega)(-m(1-\alpha)K_X)+K_X) \\ &\leqq H^0(S,(\mathrm{Sym}^m\Omega)(-m\alpha K_X))\end{aligned}$$

であるが，系 4.3 (1) を用いると，右辺は $O(m^2)$ である．したがって

$$O(m^2) \geqq \chi(S,(\mathrm{Sym}^m\otimes)(-m\alpha K_X)) = (1/6)(1-\alpha)(1-3\alpha)K_S^2 + O(m^2)$$

が成立する．したがって $\alpha \geqq 1/3$ である．(証明了)

以上の証明は [Miyaoka 77] による．初等的かつ簡明であり，また微妙な調整が効くところはこの方法の利点である．たとえば，まったく同じ議論を用いることにより次がわかる．

系 4.5. S を非特異射影的な曲面とし，$\mathcal{F} \subset \Omega_S^1$ を階数 2 のベクトル束とする．$c_1(\mathcal{F})$ がネフ因子ならば，$c_1(\mathcal{F})^2 \leqq 3c_2(\mathcal{F})$.

曲面上では，一般の擬有効 $\mathbb{Q}$ 因子（有効な $\mathbb{Q}$ 因子の極限として書ける $\mathbb{Q}$ 因子）D は唯一の **Zariski** 分解 (Zariski decomposition) $D = P + N$ をもつ．ここで

(1) P はネフな $\mathbb{Q}$ 因子

(2) $N = \sum a_i E_i$, $a_i > 0 \in \mathbb{Q}$ は有効な $\mathbb{Q}$ 因子

(3) $PN = 0$

(4) E_i が定める対称行列 (E_iE_j) は負定値

Zariski 分解を用いると次が証明できる．

系 4.6. 4.5 と同様の設定で，$c_1(\mathcal{F})$ が擬有効ならば，$c_1(\mathcal{F}) = P + N$ を Zariski 分解として，

$$c_1(\mathcal{F})^2 \leqq 3c_2(\mathcal{F}) + \frac{N^2}{4} \leqq 3c_2(\mathcal{F}).$$

証明. $\mathcal{F}' = \mathcal{F}(-N/2)$ に系 4.5 を適用すればよい.（証明了）

宮岡 -Yau 不等式の [Yau 77] による証明は，上で説明したものとはまったく異なった方法によっている．非常に大掛かりな議論と詳細な評価が必要で，微調整も利かない一方，不等式が等号となった場合の特徴付け（超球のコンパクト商空間）を与える点ですぐれている．

定理 3.1 でみたように $4c_2(S) \geqq K_S^2 \geqq 0$ だったので，$K_S^2 > 0$ の場合，すなわち一般型曲面の場合を考えれば十分である．K_S が豊富であれば（実は [Yau 77] では K_S が豊富でない場合，すなわち S が (-2) 曲線（$KE = E^2 = -2$ をみたす既約曲線 E）を含む場合は不等式を証明していない．その場合の微分幾何的証明は小林亮一 [Kobayashi 85b] による），S の Ricci 計量に関する Monge-Ampère 方程式を解くことによって S に **Kähler Einstein** 計量を構成することができる（[Aubin 76][Yau 78] による Calabi 予想の解決). Kähler-Einstein 曲面の　Chern 形式 $3c_2(S) - c_1^2(S)$ は非負の微分形式の和であり ([Chen-Ogiue 75])，$3c_2(S) - c_1^2(S) = 0$ となること，すなわち各非負の微分形式がすべて消えることは，S が負の定曲率空間，すなわちその普遍被覆空間がエルミート対称領域である 2 次元単位開超球 $B^2 = \{(x,y); |x|^2 + |y|^2 < 1\} = SU(2,1)/S(U(2)\times U(1))$ であることと同値である．

宮岡 -Yau 不等式の一つの解釈は，複素多様体の位相構造に対する制約である．たとえばある種の4次元実多様体に入る概複素構造が積分可能でないことが導かれる．コンパクト複素曲面 S を4次元実多様体とみなすと，$c_2(S)$ は Euler 数 $e(S)$ である．また指数定理により，$H^2(S,\mathbb{R})$ のカップ積に関する符号数 $\mathrm{sign}(S) = b_+ - b_-$ は $(1/3)(c_1^2(S) - 2c_2(S))$ と等しい．

一方コンパクト複素曲面の分類理論によれば，小平次元が負の代数多様体は線織曲面と呼ばれるクラスのみである．また代数曲面に変形できない複素多様体の位相構造はかなり限定される．したがって定理 4.4 は次の形に書き換えることができる．

定理 4.7 (位相的宮岡 -Yau 不等式)．コンパクトな複素曲面 S が $\mathbb{P}^1$ と種数 2 以上の曲線との直積に双有理同値ではないと仮定する．このとき Euler 数 $e(S)$ と符号数 $\mathrm{sign}(S)$ は不等式

$$e(S) \geqq 3\,\mathrm{sign}(S)$$

をみたす．

5. 開曲面，オービフォールド曲面上の宮岡-Yau 不等式

宮岡-Yau 不等式の証明で用いた De Franchis の定理において，本質的だったのは，大域的な正則微分形式は d 閉であること，また分岐被覆で正則微分形式を引き戻すとまた正則微分形式になることであった．この2つの性質は，対数的特異点をもつ微分形式についてもまったく同様に成立する [Deligne 71]．したがって前節とまったく同じ論法を繰り返すことによって次が証明される．

定理 5.1 [Sakai 80][Miyaoka 84][Kobayashi 85a])．S を非特異射影代数曲面，D を正規交差因子，$\mathcal{E} \subset \Omega_S^1(\log D)$ を階数2のベクトル束とする．$\det \mathcal{E}$ がネフならば（あるいはもっと一般に擬有効ならば），

$$c_1^2(\mathcal{E}) \leqq 3c_2(\mathcal{E})$$

が成立する．

$\Omega(\log D)$ の c_2 は $e(X \setminus D)$ と等しく，$c_1^2(\Omega(\log D))$ は $c_1^2(X) - 2\chi(\mathcal{O}_D) + K_X D$ と等しい．したがって定理 5.1 を $\Omega(\log D)$ に適用すると次を得る．

系 5.2．極小な非特異射影代数曲面 S 上の非特異な曲線 C の種数を g とすると，

$$CK_X \leqq 4g - 4 + 3c_2(S) - K_S^2.$$

すなわち C の標準次数 CK_X は X と g だけの関数で上から押さえられ，g を固定すれば X 上種数 g をもつ非特異曲線は有界族をなす．

C が特異点を持つ場合にも有界性が成立するか否かは，Green-Griffiths-Lang による有名な予想とも関連し，きわめて重要かつ困難な問題である．部分的な結果については [Lu-Miyaoka 95][Miyaoka 08] などを参照されたい．

また非特異曲面を商特異点をもつ曲面，より一般的に非特異軌道体に置き換えることもできる．

定義．d 次元非特異軌道体 (smooth orbifold) とは組 $(X, \{U_i\}, \{\tilde{U}_i\}, \{G_i\}, \{\varphi_i\})$ で以下をみたすものをいう．

(1) X は正規な解析空間

(2) $\{U_i\}$ は X の開被覆

(3) $\tilde{U}_i$ は $\mathbb{C}^d$ の開集合

(4) G_i は $\tilde{U}_i$ に properly discontinuously に作用する群

(5) $\varphi_i\colon \tilde{U}_i/G_i \to U_i$ は同型

軌道体 $(X, \{U_i\}, \{\tilde{U}_i\}, \{G_i\}, \{\varphi_i\})$ から $(Y, \{U_i\}, \{\tilde{V}_i\}, \{H_i\}, \{\psi_i\})$ 間の射とは，射 $X \to Y$, $U_i \to V_i$, $\tilde{U}_i \to \tilde{V}_i$ および群準同型 $G_i \to H_i$ であって，群作用に関して同変 (equivalent) になっているものをいう．また軌道体上の層も同様に同変な層の集まりとして定義され，その Chern 類は $H^*(X, \mathbb{Q})$ の元として存在する．例えば軌道体の余接束 $\Omega^1_{X_{\mathrm{orb}}}$ とは，自然な G_i 作用付きの $\Omega^1_{\tilde{V}_i}$ のことである．

軌道体の典型的な例は有限群による商特異点である．また非特異な X の中の正規交差の因子 D を局所的に $z_1 \cdots z_s = 0$ で表したとき，局所解析的に $X \setminus D = (\mathbb{C}^*)^s \times \mathbb{C}^{d-s} = (\mathbb{C}/\mathbb{Z})^s \times \mathbb{C}^{d-s}$ と思えば．$X \setminus D$ は軌道体である．また単純正規交差の因子の各成分 D_i に分数係数をつけた $\mathbb{Q}$ 因子 $\sum(m_i/n_i)D_i$ は，各成分に沿って n_i の分岐をもつ（局所的）Kummer 分岐被覆を考えることにより，軌道体上の整数係数因子と見なすことができる．

宮岡-Yau 不等式の証明は，２次元射影的な軌道体にもそのまま通用する．特に S が有限群 G_i による商特異点 $P_i = \mathbb{C}^2/G_i$ をもつ正規射影曲面である場合には，S の通常の Euler 数を $e(S)$ とおくと軌道体としての Euler 数 $e(S_{\mathrm{orb}}) = c_2(\Omega^1_{S_{\mathrm{orb}}})$ は

$$e(S) - \sum_i \left(1 - \frac{1}{|G_i|}\right)$$

である．したがって軌道体の余接束に対する宮岡 -Yau 不等式は次の形になる．

定理 5.2 (商特異点をもつ曲面に対する宮岡-Yau 不等式 [Miyaoka 84][Kobayashi 85b])．S は商特異点 $\mathbb{C}^2/G_i$ をもつ正規射影曲面とし，$\mathbb{Q}$ 因子 K_S は擬有効であるとすると，

$$K_S^2 \leqq 3e(S) - 3\sum\left(1 - \frac{1}{|G_i|}\right)$$

が成立する．

P_i がすべて通常２重点で $|G_i| = 2$ のときを考えれば，特異点の個数を m，$\tilde{S}$ を S の極小特異点解消とすると，$e(S) = e(\tilde{S}) - m$ で，したがって

$$m \leqq \frac{2}{9}(3c_2((\tilde{S}) - K_{\tilde{S}}^2)$$

を得る．この不等式から $\mathbb{P}^3$ 内の d 次曲面 $(d \geqq 4)$ が持ちうる通常２重点の個数 m は

$$m \leqq \frac{4}{9}d(d-1)^2$$

をみたす [Miyaoka 84]．この評価は d がある程度以上大きい場合は，知られている最良評価である．一例として４次曲面に不等式を適用してみると，通常２重点の個数は最大 16 個という古典的な結果が得られる．

また $\mathbb{P}^2$ 上に直線を配置したとき，これらの直線に沿って分岐する Kummer 被覆とその部分的特異点解消 S (直線が２本しか交わらないところは A 型有理２重点であり，有限巡回群による商

特異点なので特異点を解消しない）をとって，宮岡-Yau 不等式を適用すると，直線配置の重複度 5 以上の特異点の個数に関する評価が得られる．すなわち，n 本の直線からなる配置に現れる k 重点の個数を t_k とおき，分岐被覆の小平次元が 0 以上を保証する条件として $t_n = t_{n-1} = t_{n-2} = 0$ を仮定すると，不等式

$$t_2 + \frac{3}{4}t_3 \geqq n + \sum_{k \geqq 5}(k-4)t_k$$

が成り立つ [Hirzebruch 83].

射影平面内の直線の配置に関する結果なので，このような評価は射影幾何の公理から示されても不思議ではないように見えるが，実は不可能である．実際，正標数の世界においては，上に述べたような評価は決して存在しない．たとえば有限体 $\mathbb{F}_q$ 上定義される直線すべてからなる直線配置は，すべての特異点が $q+1$ 重点である，

6. 宮岡-Yau 不等式の高次元化

宮岡－Yau 不等式をどう高次元化するかはただ一通りではない．ひとつの方向は，[Aubin 76][Yau 78] による Calabi 予想の解決によるものである．

定理 6.1 [Yau 77]. 非特異 d 次元射影多様体 X の標準束 K_X が豊富ならば，

$$2(d+1)c_2(X)K_X^{d-2} \geqq dK_X^d$$

が成立する．この不等式で等号が成立することと，X が d 次元開球のコンパクト商空間になっていることは同値である．

ここでは，K_X が豊富であるという仮定とともに，$c_2(X) = c_2(\Omega_X^1)$ や $c_1^2(\Omega_X^1) = K_X^2$ を K_X^{d-2} で測っていることが本質的である．K_X が豊富ではなかったり，一般の豊富因子の列 $H_1 \cdots H_{d-2}$ で測った場合は少し話が違ってきて，その場合は次の定理が成立する．

定理 6.2 [Miyaoka 87b]. 正規な d 次元の射影多様体 X について，特異点の余次元は 3 以上，その標準因子は $\mathbb{Q}$ Cartier でかつネフであると仮定する．$H_1, \ldots, H_{d-2}$ を豊富な因子としたとき，

$$3c_2(\Omega_X)H_1 \cdots H_{d-2} \geq K_X^2 H_1 \cdots H_{d-2}$$

3 次元の Riemann-Roch 定理にこの定理を適用すると，次が得られる．

系 6.3. 非特異な 3 次元射影多様体 X の標準因子がネフならば言い換えれば非特異極小 3 次元多様体ならば，$\chi(X, \mathcal{O}) \leqq 0$ である．特に $\dim H^3(X, \mathcal{O}) = \dim H^0(X, \mathcal{O}(K_X)) > 0$ または $\dim H^1(X, \mathcal{O}) = \dim H^1(X, \Omega_X^1) > 0$ が成立する．このことから X の小平次元は 0 以上である．

$\chi(X, \mathcal{O}_X) \leqq 0$ ならば証明されているので，$\chi(X, \mathcal{O}_X) > 0$ と仮定する（極小 3 次元多様体 X が有限個の端末特異点を持っている場合は $\chi(X, \mathcal{O}_X) > 0$ となることもあり得る）．しかし Riemann-Roch を用いると

$$\chi(X, \mathcal{O}((m+1)K_X)) = \frac{(m-1)m(2m-1)}{12}K_X^3 + \frac{m+1}{6}K_X c_2(X) + \chi(X, \mathcal{O})$$

なので，定理 6.2 によって，$m \geqq 1$, $\chi(X, \mathcal{O}) > 0$ ならば，$\chi(X, \mathcal{O}((m+1)K_X)) > 0$ である．この不等式から $P_{m+1}(X) = \dim H^0(X, \mathcal{O}((m+1)K_X)) > 0$ または $\dim H^2(X, \mathcal{O}((m+1)K_X)) =$

$\dim H^1(X, \mathcal{O}(-mK_X)) > 0$ が成立する．$P_{m+1}(X) > 0$ は X の小平次元が0以上を意味する．後者が成立する場合は，S を X の超平面切断として完全系列

$$H^1(X, \mathcal{O}(-S - mK_X)) \to H^1(X, \mathcal{O}(-mK_X)) \to H^1(S, \mathcal{O}(-mK_X)$$

を考え小平消滅定理と Mumford 消滅定理（定理 3.2) を適用すれば，任意の豊富な因子 S について $K_X^2 S = 0$ を得る．つまり $[K_X^2] = 0 \in H^4(X, \mathbb{Q})$ である．しかも m を偶数 $2n$ とすると，非自明な拡大 $0 \to \mathcal{O}(-nK_X) \to \mathcal{E} \to \mathcal{O}(nK_X) \to 0$ が存在することになる．$c_1(\mathcal{E}) = 0$, $c_2(\mathcal{E}) = -n^2 K_X^2 = 0$ である．$\mathcal{E}$ が S 安定でなければ，$\mathcal{E}$ はある直線束 $\mathcal{O}(nK_X - E)$ を含み，E は有効因子，$0 \leqq (nK_X - E)S^2 < nK_X S^2$ が成立する．このことから K_X と E が $H^2(X, \mathbb{Q})$ の中で一次従属であることがわかり，K_X の何倍かは切断をもつ．最後に $\mathcal{E}$ が S 安定な場合が残ったが，ここで [Donaldson 87] の結果を思い出し，$\mathcal{E}$ は $\pi_1(X)$ の既約ユニタリ表現から定まる平坦束であったことに注目すると，X の有限不分岐被覆の無限列が存在しない限りは $\kappa(X) \geqq 0$ であることが証明できる．不分岐被覆の無限列 $X_n \to X$ があるときは，$\chi(X_n, \mathcal{O}) \to \infty$ となることから，結局３次元極小多様体の小平次元が 0以上であることが証明される [Miyaoka 88a]，さらにくわしくしらべると，３次元ではアバンダンス予想（極小多様体の標準因子 K_X に対して適当な正整数 m をとると $\mathcal{O}(mK_X)$ は大域切断で生成される）が成り立っていることが証明される [Miyaoka 88b][Kawamata 92].

Kollár- 森による極小モデルの存在定理と，上で説明したアバンダンス予想の解決により３次元の双有理幾何の大枠は完成した．また最近極小モデルの一般論に大きな進歩があったことはよく知られている．しかし残念ながら４次元以上のアバンダンス予想に関しては，現時点ではほとんどまったく手がかりがない．一般型に関しては問題なく，K_X が数値的に trivial の場合も比較的易しい．問題は数値的小平次元が 1 から $\dim X - 1$ の場合である．$|mK_X|$ が空でなければ，つまり K_X が有効な $\mathbb{Q}$ 因子なら，その因子に注目することによって，次元による帰納法が使える．また空でない境界をもつ多様体についての対数的小平次元ならば，その境界因子に注目して同様に帰納法が適用できる．

定理 6.2 の証明で最も本質的な部分は，標数 p における変形理論を用いて証明される次の定理である．

定理 6.4 (Generic semipositivity theorem [Miyaoka 87a]). d 次元非特異射影多様体 X が単線織的ではない（X 全体を覆う有理曲線の族は存在しない）と仮定する．$vecH = (H_1, \ldots, H_{d-1})$ を多重偏極とし，T_X^1 の最大 $\vec{H}$ 不安定化部分層を $\mathcal{E}_0$ とすれば，$\mu^{\vec{H}}(\mathcal{E}_0) \leq 0$. 言い換えれば $H_1, \ldots, H_{d-2}$ の high multiples から得られる一般の完全交差曲線に制限すると，T_X は半負, Ω_X^1 は半正である．

今のところ generic semipositivity theorem を正標数を使わずに示す方法は知られていない．定理が意味するところは，Ω_X^1 は $\vec{H}$ 不安定であるかもしれないが．その不安定度はそれほど大きくないということである．

定理 6.2 は，Ω_X^1 に対する Harder-Narasimhan フィルトレーションを考え，その各部分商 $\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}$ に Bogomolov 不等式を適用して得られる（より正確に言えば，rank $\mathcal{E}_0 = 1, 2$ の場合は，それぞれ De Francchis の定理および曲面に対する宮岡-Yau 不等式も必要になる）．

この節で説明した３次元アバンダンス予想の証明を振り返ると，正標数の議論（generic semipositivity theorem) と微分幾何の結果 (Yang-Mills 理論による Donaldson の定理）双方が本質的に用いられていることがわかる．

7. Higgs 層と Higgs 束に対する Simpson の結果

X を非特異多様体，Θ_X を接層 (tangent sheaf) とする．X 上の **Higgs** 層 (Higgs sheaf) とは Θ_X が生成する $\mathcal{O}_X$ 上の対称テンソル環 $\mathrm{Sym}\Theta_X$ の作用付きの連接層 $\mathcal{E}$ をいう [Miyaoka 09]. 別のいい方をすれば組 $(\mathcal{E},\varphi)$ であって，φ は $\mathcal{O}_X$ 準同形 $\Theta_X \to \mathcal{E}nd(\mathcal{E})$ であって，可換条件 $\varphi(\xi)\varphi(\eta) = \varphi(\eta)\varphi(\xi)$, $\xi,\eta \in \Theta_X$ を満足するものである [Simpson 92]. φ を Higgs 場 (Higgs field) という．$\mathcal{O}_X$ 加群として局所自由な Higgs 層は **Higgs** 束 (Higgs bundle) とも呼ばれる．Higgs 層の部分 Higgs 層 (Higgs subsheaf) とは，部分 $\mathrm{Sym}\Theta_X$ 加群，つまり Higgs 場で保たれるような部分 $\mathcal{O}_X$ 加群である．Higgs 層 $\mathcal{E}$ の Higgs 部分層 $\mathcal{F}$ があれば，その飽和化 (saturation) $\mathcal{F}' = \mathrm{Ker}(\mathcal{E} \to (\mathcal{E}/\mathcal{F})/(\mathrm{torsion})$ も Higgs 部分層である．Higgs 層の間の準同形とは，$\mathrm{Sym}\ \Theta_X$ 加群準同形をいう．

例. (0) 任意の連接層 $\mathcal{E}$ に対して，$(\mathcal{E},0)$ は自明な Higgs 場をもつ Higgs 層と考えることができる．したがって Higgs 層のカテゴリーは連接層のカテゴリーを含んでいる．

(1) ω を正則な 1 微分形式，$\mathcal{E}$ を任意の torsion free 連接層として，$\phi\colon \Theta_X \to \mathcal{E}nd(\mathcal{E})$ を微分形式とベクトル場との間の自然なペアリング $\langle,\rangle$ を用いて $\phi(\theta) = \langle\omega,\theta\rangle\mathrm{id}$ と定義すれば，φ は Higgs 場である．このような φ をスカラー場という．スカラー場の場合，Higgs 部分層と通常の $\mathcal{O}_X$ 部分層は全く同じであり，Higgs 層としての構造は何ら新しい情報を付け加えない．

(2) 対称積代数 $\mathrm{Sym}\ \Theta_X$ を $\mathrm{Sym}^{r+1}\Theta_X$ が生成するイデアルで割った冪零代数

$$\mathbf{E}^r(X) = \mathrm{Sym}\ \Theta_X/(\mathrm{Sym}^{r+1}\Theta_X)$$

は自然に $\mathrm{Sym}\ \Theta_X$ 加群であり，したがって Higgs 束である．$\mathbf{E}^r(X)$ の Higgs 部分層とは冪零代数構造に関するイデアルである．

(3) （基底変換）$f\colon Y \to X$ を正則写像，$\mathcal{E}$ を X 上の Higgs 層とすると，自然な準同形 $\Theta_Y \to f^*\Theta_X$ により，$f^*\mathcal{E}$ は自然に Y 上の Higgs 層となる．特に非特異な部分多様体への制限も Higgs 層である．

(4) （双対，テンソル積）Higgs 層が与えられれば，その双対，テンソル積も自然な操作により Higgs 層である．具体的には $(\mathcal{E}_i,\varphi_i)$, $(\mathcal{F},\psi)$ に対して，

$$\varphi(\cdot)(e_1 \otimes e_2) = \varphi_1(\cdot)(e_1) \otimes e_2 + e_1 \otimes \varphi_2(\cdot)(e_2), \qquad \langle\psi^*(\cdot)(f^*), f\rangle = -\langle f^*, \psi(\cdot)(f)\rangle$$

とおけばよい．同様に $\mathrm{Sym}^k\mathcal{F}$ や $\bigwedge^k \mathcal{F}$ も自然に Higgs 層の構造をもつ．

Higgs 束はリーマン面上の平坦ベクトル束のモジュライを調べるために [Hitfchin 87] が導入した（リーマン面上では可換性条件は自動的に満たされる）．すなわち与えられたベクトル束の接続 ∇_0 を一つ固定すると，任意の接続　∇ を考えるとき，$\nabla - \nabla_0$ は Higgs 場である．高次元の場合，可換性条件すなわち可積分条件を課した定義は [Simpson 92] による．

$f\colon Y \to X$ を正則写像，$\mathcal{E}$ を X 上の Higgs 層とすると，自然な準同形 $\Theta_Y \to f^*\Theta_X$ により，$f^*\mathcal{E}$ は自然に Y 上の Higgs 層となる．特に非特異な部分多様体への制限も Higgs 層である．

多重偏極（豊富因子の列）$\vec{H} = (H_1,\ldots,H_{d-1})$ をもつ d 次元非特異射影多様体 X 上の ($\mathcal{O}_X$ 加群として) torsion free な Higgs 層 $\mathcal{E}$ が $\vec{H}$ 半安定とは，任意の非自明な部分 Hiigs 層 $\mathcal{F}$ に対して $\mu^{\vec{H}}(\mathcal{F}) \leqq \mu^{\vec{H}}(\mathcal{E})$ が成立することをいう．また不等号が必ず真の不等号になる場合は $\vec{H}$ 安定であるという．

例. $\mathcal{E} = \mathcal{O} \oplus \otimes_X^\infty$ とおき，Higgs filed φ を $\varphi(\xi)(a,\omega) = \langle\xi,\omega\rangle \in \mathcal{O} \subset \mathcal{E}$ と定義する．ただし $\langle,\rangle$ は自然なペアリングである．このとき $(\mathrm{Sym}^2\Theta_\mathrm{X})$ の $\mathcal{E}$ への作用は 0 であり，$\mathcal{E}$ の 0 でない飽和部

分 Higgs 層は必ず $\mathcal{O}$ を含む．K_X が豊富で，Ω^1_X が $\vec{H}$ 半安定ならば，$\mathcal{E}$ は $\vec{H}$ 安定 Higgs 束である．もちろんベクトル束としては $\vec{H}$ 不安定で，その最大 $\vec{H}$ 不安定化部分層は Ω^1_X である．

Simpson は Higgs 束に対して Yang-Mills 理論を展開し，安定な Higgs 束は Yang-Mills 計量（調和計量）をもつことを証明した [Simpson 88][Simpson 92]．この結果は安定なベクトル束が Einstein-Hermitian 計量をもつという Donaldson-Uhlenbeck-Yau の定理（小林-Hitchin 対応）の Higgs 版である．第 2 節で小林-Hitchin 対応が Bogomolov 不等式を導くことを指摘したが，Higgs 束の調和計量も同様に次の Bogomolov 不等式を導く [Simpson 88][Simplson 92].

定理 7.1 (Higgs 束に対する Bogomolov 不等式，Bogomolov-Smpson 不等式). $\mathcal{E}$ が階数 r の H 半安定 Higgs 束ならば，不等式

$$2rc_2(\mathcal{E})H^{d-2} \geqq (r-1)c_1^2(\mathcal{E})H^{d-2}$$

が成立する．

例 [Simpson 88]．S を一般型極小曲面とする．$\mathcal{E} = \mathcal{O} \oplus \Omega^1_S$ は自然に Higgs 束であり，適当に H を選べば H 安定である（De Franchis より．Ω_S は適当な H をとると H 半安定であるから，上記の例により $\mathcal{E}$ は H 安定）．また $c_2(\mathcal{E}) = c_2(S), c_1(\mathcal{E}) = K_S$ であるから上記の Bogomolov-Simpson 不等式は宮岡-Yau 不等式 $3c_2(S) \geqq K_S^2$ にほかならない．また X を d 次元射影多様体とし，K_X が豊富であると仮定すると，Ω^1_X は K_X 半安定であり [Tsuji]，特に $\mathcal{E} = \mathcal{O} \oplus \Omega^1_X$ は Higgs 安定である．この場合 Bogomolov-Simpson 不等式は Yau 不等式

$$2dc_2(X)K_X^{d-2} \geq (d-1)K_X^d$$

を与える．つまり，宮岡-Yau 不等式や Yau 不等式は Higgs 版 Bogomolov 不等式の特別な場合と考えることができる．

Higgs 場 φ が冪零 (nilpotent) であるとは，適当な正の整数 m をとると φ がイデアル $(\mathrm{Sym}^m\Theta_X) \subset \mathrm{Sym}\,\Theta_X$ を $0 \in \mathcal{E}nd(\mathcal{E})$ に写すことをいう．冪零な Higgs 束をもつ Higgs 層を冪零 Higgs 層という．$\mathbf{E}^r(X) = \mathrm{Sym}\,\Theta_X/(\mathrm{Sym}^{r+1}\Theta_X)) \simeq \mathcal{O}_X \oplus \cdots \oplus \mathrm{Sym}^r\Theta_X$ やその双対 $\mathcal{O}_X \oplus \cdots \oplus \mathrm{Sym}^k\Omega^1_X$ は典型な冪零 Higgs 層である．冪零 Higgs 層 $\mathcal{E}$ には 2 種類の自然な filtration が入る．すなわち $\mathrm{Sym}^k\Theta_X$ が零化する部分層が定義する増大 filtration と，$(\mathrm{Sym}^k\Theta_X)\mathcal{E}$ の飽和化として定義される部分層が定義する減少 filtration である．これら二つの filtration は互いに双対になっている．

冪零でない Higgs 層の典型例は，0 でないスカラー場をもつ Higgs 層である．しかしながら，Higgs 場 φ をスカラー場 $\omega\,\mathrm{id}$ によって $\varphi' = \varphi - \omega\,\mathrm{id}$ と修正しても，Higgs 層の構造にはあまり影響がない．たとえば φ で見た Higgs 部分層は φ' で見ても HIggs 部分層である．この意味で，スカラー場は本質的には無視できる部分と考えられる（接続ないしは Higgs 場をスカラー場で修正する操作は，物理的にはゲージ変換に対応する）．

一般の Higgs 場は冪零でもスカラー場でもないが，X を適当な分岐被覆で置き換えれば本質的には冪零 Higgs 場とスカラー場の和として表される．スカラー場による修正は本質的でないと考えれば，Higgs 層は冪零であると考えても（たいていの場合）さしつかえないということである．

定理 7,2 （スペクトル分解 [Hitchin-Murray 88]）．$(\mathcal{E}, \varphi)$ を X 上の Higgs 層とすると，ベクトル束 Ω_X の中の X 上有限な閉スキーム Σ 　が存在し，そのすべての既約因子の関数体を含む関数体をもつ非特異な基底変換 $f\colon Y \to X$ をとれば，Y 上の正則 1 -形式 $\omega_1, \ldots, \omega_k$ （φ の固有 1 形式）と $\mathcal{F} = f^*\mathcal{E}$ の直和分解 $\mathcal{F}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{F}_k$ (スペクトル分解 spectral decomposition) が存在し

て，$f^*\varphi|_{F_i} - \omega_i \otimes \mathrm{id}$ は $\mathcal{F}_i$ の冪零 Higgs 場である．すなわち基底変換とスカラー場による修正をほどこすと，Higgs 束は冪零 Higgs 層の直和になる．Σ を $\mathcal{E}$ のスペクトル・スキーム (spectral scheme)（X が曲線のときはスペクトル曲線 spectral curve）という．

証明．局所座標を使って $\varphi_i = \varphi(\partial_{z_i}$ を考えると，これらは φE の変換として互いに可換である．したがって分岐被覆上では，これらは同時上半三角化できる．定理はこの事実の言い換えにすぎない．(証明了)

注意．　スペクトル曲線の理論は可換な微分作用素に対する [Kričever 77] の理論に起源がある．

$\mathcal{E}$ が $\vec{H}$ 半安定ならば，上の $\mathcal{F}$ も $f^*\vec{H}$ 半安定であり，スペクトル分解の各直和因子はすべて同じ $f^*\vec{H}$ スロープをもつ．また上で述べたように $f^*\varphi$ をスカラー場で修正した冪零 Higgs 場 $f^*\varphi - \omega_i(\mathrm{id})$ に換えても $f^*\vec{H}$ 半安定性といった条件はまったく影響を受けない．このように，Higgs 層の研究は，適当な基底変換を行っておけば，冪零 Higgs 層の研究に帰着する．したがって次の節では 基本的に Higgs 層はすべて冪零であると仮定する．

8. 半安定 Higgs 層の代数理論

前節の最後で見たように，半安定 Higgs 束の理論は宮岡-Yau 不等式をはじめとして，多くの応用をもつ．したがって，Simpson の微分幾何的方法ばかりでなく，簡明な代数理論を構築することには十分意味がある．特に半安定層に対する以下の基本結果を Higgs 層に拡張するこ t が望ましい．

(1) Mehta-Ramanathan の制限定理

(2) テンソル積による半安定性の保存

(3) 半安定層に対する Bogomolov 不等式

この解説の付録として添付するプレプリントでは，これら三つをすべて純代数的に証明している．三つの結果のうち，(3) は上に見たように，微分幾何 (Yang-Mills 理論）による Simpson の証明があり，また階数が 3 以下という非常に特殊な場合には [Langer] が代数的証明 (De Franchis の定理および宮岡 -Yau 不等式を用いる）を与えている．しかしながら (1)(2) はたぶん新しい結果と思われる．

前節の最後で述べたように，底空間を取り替え Higgs 場を適当なスカラー場で修正することにより，冪零 Higgs 層について証明すればよいので，以下ではすべて Higgs 束は冪零であると仮定し，以下各項目ごとに証明の粗筋を紹介する．詳細はプレプリント本体を参照されたい．

Mehta-Ramanathan の制限定理． d 次元非特異射影多様体 $(X, \vec{H})$, $\vec{H} = (H_1, \ldots, H_{d-1})$ 上定義され階数 r の $\vec{H}$ 半安定 Higgs 束 φE に対して，十分大きな m をとり Y を $|mH_{d-1}|$ の一般の元とすれば，$\mathcal{E}|_Y$ は $\vec{H}_Y$ 半安定である．

証明すべきは，十分大きな整数 m と一般の $Y \in |mH_{d-1}|$ について，$\mathcal{E}|_Y$ が $\vec{H}_Y$ 不安定ならば，その最大 $\vec{H}_Y$ 不安定化 Higgs 部分層 $(\mathcal{E}|_Y)_0$ が $\mathcal{E}$ の Higgs 部分層に拡張可能ということである．

第 2 節で説明したベクトル束の場合と同じく線形系 $T = |mH|$ をとり，付随する incidence variety $\Gamma \subset T \times X$ を $\{([Y], x)\ x \in Y\}$ で定義する．一般の Y に対して最大不安定化 Higgs 部分層 $(\mathcal{E}|_Y)_0$ が決まっているので，その閉包をとることで，Γ 上 $\mathrm{pr_X}^*\mathcal{E}$ の飽和 $\mathcal{O}_\Gamma$ 部分層 $\tilde{\mathcal{F}}$ が定まる．もともとの [Mehta-Ramanathan 81] の議論（第 2 節）をそのまま使うと．m を十分大きく

取っておけば，$\tilde{\mathcal{F}}$ は $\mathcal{E}$ の $\mathcal{O}_X$ 部分層 $\mathcal{F}$ に落とせることが証明できる．つまり $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ は $(\mathcal{E}|_Y)_0$ の $\mathcal{O}_X$ 層としての拡張になっている．あとはこの拡張が Higgs 部分層になっていることを示せば証明が完結する．

帰謬法を用いて，上記の拡張 $\mathcal{F}$ が Higgs 部分層になっていないと仮定する．$\mathcal{F}$ を含む最小の Higgs 部分層 $\mathcal{G} = (\mathrm{Sym}\ \Theta_X)\mathcal{F}$ およびその $\mathcal{E}$ 内における飽和 $\widetilde{\mathcal{G}}$ ができる．$c_1(\mathcal{G})$ (の次数) は，$\mathcal{F}$ および Θ_X だけから決まるコホモロジー類で下から評価される．一方，$\mathcal{F}|_Y$ は $\mathcal{E}|_Y$ の飽和部分層なので，$\mathcal{G}|_Y = \mathcal{F}|_Y$ であり，したがって $c_1(\widetilde{\mathcal{G}}) - c_1(\mathcal{G}) \geqq Y = mH_{d-1}$ が成立する．$c_1(\mathcal{G})$ が下に有界であったことを思い出すと，m を大きくしていったとき，$c_1(\widetilde{\mathcal{G}})$ はいくらでも大きくなることになるが，これは $\mathcal{G} \subset \mathcal{E}$ であったことに矛盾し，帰謬法で制限定理が証明された．

テンソル積．2つの $\vec{H}$ 半安定な Higgs 層のテンソル積はふたたび $\vec{H}$ 半安定である．

制限定理によれば，Higgs 半安定性は十分次数の高い超曲面切断への制限で保存されるので，底空間が曲線の場合にテンソル積が Higgs 半安定性を保つことを示す．

C を非特異代数曲線とし，$\mathcal{E}$ を C 上の冪零な Higgs 束とする．したがってある正の整数 r があって，$\mathcal{E}$ は冪零 $\mathcal{O}_C$ 代数 $\mathbf{F}^r = \mathrm{Sym}^r(\mathcal{O}_C \oplus \Theta_C) = \mathrm{Sym}\Theta_C/(\mathrm{Sym}^{r+1}\Theta_C)$ 上の加群である．

$f\colon \tilde{C} \to C$ を十分大きな分岐因子をもつ分岐被覆とする．$\tau \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_{\tilde{C}}, f^*\Theta_C)$ を一般の拡大類とすると対応する拡大 $0 \to f^*\Theta_C \to (f^*\mathbf{F}^1)_\tau \to \mathcal{O}_{\tilde{C}} \to 0$ は非常に安定な層である．しかも自然に冪零な $f^*\Theta_C \supset \Theta_{\tilde{C}}$ 作用をもつから，$f^*\mathbf{F}^1$ 加群（特に Higgs 束）であり，冪零な $\mathrm{Sym}\ f^*\Theta_C$ 加群である．したがってその対称積 $(f^*\mathbf{F}^r)_\tau = \mathrm{Sym}^r(f^*\mathbf{F}^1)_\tau$ は $f^*\mathbf{F}^r$ 加群（したがって Higgs 束）である．以上の記号を用いて，$f^*\mathcal{E}$ の τ-twist $(f^*\mathcal{E})_\tau$ を $f^*\mathbf{F}^r$ 上のテンソル積

$$(f^*\mathcal{E})_\tau = (f^*\mathbf{F}^r)_\tau \otimes_{f^*\mathbf{F}^r} f^*\mathcal{E}$$

として定義する．構成から，$\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ を部分 Higgs 層とすると，$(f^*\mathcal{F})_\tau \subset (f^*\mathcal{E})_\tau$ であるから，$\mathcal{E}$ が Higgs 不安定ならば，$(f^*\mathcal{E})_\tau$ も Higgs 不安定，特にベクトル束不安定である．一方，$\mathcal{E}$ が Higgs 半安定ならば，$\mathbf{F}^r_\tau$ がベクトル束として非常に安定であることから，$(f^*\mathcal{E})_\tau$ は Higgs 半安定であることが証明できる．拡大類 τ パラメータとする変形を考え，τ を 0 にもっていけば，$(f^*\mathcal{E})_0$ は $f^*\mathcal{E}$ そのものである．また構成から $(f^*\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2)_\tau = (f^*\mathcal{E}_1)_\tau \otimes (f^*\mathcal{E}_2)_\tau$ もわかる．したがって，次の命題が得られた．

命題 8.1. C 上の $\mathcal{E}$ が Higgs 半安定であるための必要十分条件は，適当な拡大類 τ に対して，τ twist $(f^*\mathcal{E})_\tau$ が $\tilde{C}$ 上のベクトル束として半安定になることである．したがって，$\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ がともに Higgs 半安定であれば，

$$(f^*\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2)_\tau \simeq (f^*\mathcal{E}_1)_\tau \otimes (f^*\mathcal{E}_2)_\tau$$

もベクトル束として半安定であり，したがって $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ は Higgs 半安定である．

Bogomolov 不等式．階数 r の $\mathcal{E}$ が $\vec{H}$ 半安定 Higgs 層なら，

$$(r-1)c_1^2(\mathcal{E})H_1 \cdots H_{d-2} \leqq 2rc_2(\mathcal{E})H_1 \cdots H_{d-2}.$$

半安定 Higgs 層 $\mathcal{E}$ に対する Bogomolov 不等式は，制限定理により底空間が曲面 S の場合に帰着する．この場合も前節と同様，適当な generically finite cover $f\colon \tilde{S} \to S$ を考え，$f^*\mathcal{E}$ を変形した Higgs 層が，$\tilde{S}$ を覆う曲線族 C_t に制限したとき，$\mathcal{O}_{C_t}$ 加群として半安定となることを示す．

変形に基本的にはテンソル積の場合と同じく，標準的な 冪零 Higgs 束の変形を作り，標準冪零 Higgs 束上でこの変形と $f^*\mathcal{E}$ のテンソル積を考えるのであるが，曲線と違って曲面上の標準

冪零 Higgs 束は一般には（Higgs 束として）変形できないことが問題になる．たとえば S を $K_S^2 = 3c_2(S)$ をみたす一般型曲面 (超球の $\mathrm{SU}(2,1)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(2) \times \mathrm{U}(1))$ のコンパクト商空間である）とすると，$H^1(S, \Theta_S) = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}, \Theta_S) = 0$ なので，標準 Higgs 束 $\Theta_S \oplus \mathcal{O}$ の非自明な Higgs 変形は存在しない．

このような難点を解決するために，十分次数の高い Lefschetz pencil を考え，S を適当な blow up で置き換えて，非特異曲線 $\mathbb{P}^1$ 上の Lefschetz ファイバー空間 $\pi\colon S \to C$（すべてのファイバーは高々通常 2 重点しか特異点をもたない）になっていると仮定する．C の有効因子 D で，十分次数が高く f の臨界値をすべて含むようなものをとる．$\mathcal{E}$ は自然に $\mathrm{Sym}\,\Theta_S(-\log \pi^* D)$ 加群（対数的 Higgs 層）であり，また $\mathrm{Sym}\,\Theta_{S/C}$ 加群（相対 Higgs 層）でもある．そして定義を考えれば $\mathcal{E}$ の Higgs 半安定性と対数的 Higgs 半安定性は同じで，Mehta-Ramanan 定理を用いれば相対 Higgs 半安定性とも同じである．このとき $\Theta_S(-\log \pi^* D) \oplus \mathcal{O}$ には自然に filtration が入って，対応する次数付き層は

$$\Theta_{S/C} \oplus \pi^* \Theta_C(-D) \oplus \mathcal{O}$$

である．このとき，まず $\pi^*\Theta_C(-D) \oplus \mathcal{O}$ を自明な拡大と考え，一般の拡大類 $\sigma \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}, \pi^*\Theta_C(-D))$ を用いて $\mathcal{O}(-\pi^*(K_C + D)/2))^{\oplus 2}$ へと変形する．さらに $\Theta_{S/C} \oplus \mathcal{O}(-\pi^*(K_C+D)/2)^{\oplus 2}$ をふたたび拡大類 $\tau \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(-\pi^*(K_C+D)/2)^{\oplus 2}, \Theta_{S/C})$ を用いて変形することによって，$\Theta_{S/C} \oplus \mathcal{O}$ の相対 Higgs 変形 $\mathcal{E}_{\sigma\tau}$ であってベクトル束として非常に安定なものを作ることができる．またその対称テンソル積を考えることによって標準的冪零対数 Higgs 束 $\sum_{k=0}^r \mathrm{Sym}^k \Theta_S(-\log \pi^* D)$ の相対 Higgs 変形で安定ベクトル束になっているもの $\mathcal{E}_{\sigma\tau}$（ただし対数的 Higgs 束や Higgs 束ではない）が得られる．定義から，π の一般のファイバー F にこの変形を制限すれば，F 上の Higgs 束 $\mathcal{E}|_F$ の Higgs 変形であり，F 上のベクトル束として半安定である．ここで系 1.4 を $\chi(S, \mathrm{Sym}^{rm} \mathcal{E}_{\sigma\tau}(-m \det \mathcal{E}_{\sigma\tau}))$ に適用することによって，Bogomolov 不等式が得られる．以上が粗筋であるが，変形の構成が 2 段構えとなり，いささかテクニカルかつ煩雑なので，詳細は添付のプレプリントを参照されたい．

注意 **A.** 上の証明では，底空間 S を適当に取り替えた上で，(半) 安定 Higgs 層をベクトル束として（半）安定な Higgs 層に変形した．$\mathcal{E}$ が安定 Higgs 束であるとすると，安定な Higgs 束は Einstein-Hermite 計量を持つので，この計量はもとの $\mathcal{E}$ の filtration に付随する自然な次数付き層の計量を定義する．一方 $\mathcal{E}$ は Simpson が構成した調和計量をもつ．この二つの計量の関係を調べることは興味深い問題である．

注意 **B.** 前にも注意したが，K_X が豊富ならば $\mathcal{EO} \oplus \Omega_X^1$ は K_X Higgs 安定であり，したがって $rK_X^d \leqq 2(r+1)c_2(X)K_X^{d-2}$ であった．しかし一般の多重偏極 $\vec{H}$ をとったときは，K_X が豊富と仮定しても $rK_X^2 H_1 \cdots H_{d-2} \leqq 2(r+1)c_2(X) H_1 \cdots H_{d-2}$ をみたすとは限らない．しかしその場合，$\mathcal{E}$ の最大 $\vec{H}$ 不安定化 Higgs 部分層は，$\Omega_X^1 = \mathcal{E}/\mathcal{O}$ の非自明な部分層を定め，X 上の葉層構造 (foliation) を誘導する．

例． S を $K_X^2 = 3c_2(X)$ をみたす一般型曲面，V を小平次元 0 以上の多様体とする，L, M を S, V 上の豊富な因子とする．$X = S \times V$, $H = L + mM$ とおき，m を十分大きくとれば，$K_X^2 H^{d-2}$ はほぼ $3c_2(X)H^{d-2}$ と等しい．したがって $\mathcal{O}_X \oplus \Omega_X$ は H 不安定な Higgs 束であり，その最大 H 不安定化 Higgs 部分層が定める葉層 $\mathcal{F} \subset \Theta_X$ は射影 $X \to S$ に付随する相対接束 $\Theta_{X/S}$ である．

次の問題は，中間の小平次元をもつ多様体の飯高ファイバー空間を，葉層構造として幾何的に構成することが可能かを問うものである．

問題． 極小多様体 X の数値的小平次元 $\nu(X)$ が 0 でも $\dim X$ でもない中間の値をとると仮定し

たとき，適当な多重偏極 $\vec{H}$ を選んで，$\mathcal{O}_X \oplus \Omega^1_X$ を $\vec{H}$ 不安定にできるか？　その最大 $\vec{H}$ 不安定化 Higgs 部分層が定める葉層は X のファイバー空間構造，具体的には X が持つと想定される飯高ファイバー空間の構造を定めるか?

注意 C. 以上では Higgs 層の理論はすべて通常の複素多様体のカテゴリーで考えてきたが，これを非特異な軌道体のカテゴリーまで広げることには何ら障害がない．たとえば対数的 Higgs 層の理論は通常の Higgs 層の理論と同様であって，したがって高次元の対数的宮岡-Yau 不等式が ($\vec{H}$ 半安定であるという仮定の下で) 成立する．

文献

Aubin 76 T. Aubin, *Equation de type Monge-Ampère sur les varietés kählеriennes compactes.* C.R. Acad Sci. Paris. Sér. I Math. **283** (1976), 119 – 121.

Bogomolov 78 F.A. Bogomolov, *Holomorphic tensors and vector bundles on projective manifolds.* Izv. Acad. Nauk SSSR Ser. Mat. **42** (1978), 1227 – 1287.

Chen-Oguiue 75 B.-Y. Chen and K. Ogiue, Some characterization of complex space forms in terms of Chern classes. Quarterly J Math. **26** (1975), 119 – 121.

Deligne 71 P. Deligne, *Théorie de Hodge, II.* I.H.E.S. Publications Math. **40** (1971), 5 – 57.

Donaldson 87 S.K. Donaldson, *Infinite determinants, stable bundles and curvature.* Duke Math. J. **54** (1987), 231 – 247.

Gieseker 79 D. Gieseker, *On a theorem of Bogomolov on Chern classes of semistable bundles.* Amer. J. Math. **101** (1979), 77 – 85.

Harder-Narasimhan 74 G. Harder and M.S. Narasimhan, *On the chohomology groups of moduli spaces of vector bundles on curves.* Math. Ann. **212** (1974/75) , 215 – 248.

Hartshorne 70 R. Hartshorne, *Ample subvarieties of algebraic varieties*, Lecture Notes in Math. **156**, Springer-Verlag, Verlin-New York, 1970.

Hirzebruch 83 F. Hirzebruch, *Arrangements of lines and algebraic surfaces.* Arithmetic and Gerometry II, Progr. Math. 36, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart, 1983.

Hitchin 87 N.J. Hitchin, *The self-duality equations on a Riemann surface.* Proc. London Math. Soc. (3) **55** (1987), 59 – 126.

Hitchin-Murray 88 N.J Hitchin and M.K. Murray, *Spectral curves and the ADHM method.* Comm. Math. Phys. **114** (1988), 463 – 474.

Kawamata 92 Y. Kawamata, *Abundance theorem for minimal threefolds.* Invent. Math. **108** (1992), 229 – 246.

Kobayashi 82 S. Kobayashi, *Curvature and stability of vector bundles*, Proc. Japan Acad. Ser. A **58** (1982), 158 – 162.

Kobayashi 85a R. Kobyashi, *Einstein-Kaehler metrics on open algebraic surfaces of general type.* Tohoku Math. J. (2) **37** (1985), 43 – 77.

Kobayashi 85b R. Kobayashi, *Einstein-Kähler metrics on open Satake V-surfaces with isolated quotient singularities.* Math. Ann. **272** (1985), 385 – 398.

Kričever 77 I.M. Kričever, *Methods of algebraic geometry in the theory of nonlinear equations.* Uspehi Mat. Nauk **32** (1977), 183 – 208.

Langer 02 A. Langer, *A note on Bogomolov's instability and Higgs sheaves.* In: *Algebraic Geometry*, de Gruyte, Berlin, 2002, pp. 237 – 256.

Lu-Miyaoka 95 S.S.-Y. Lu and Y. Miyaoka, *Bunding curves in algebraic surface by genus and Chern numbers*, Math. Res. Letters **2** (1995), 663 – 676.

Mehta-Ramanathan 81 V.B. Mehta and A. Ramanathan, *Semistable sheaves oon projective varieties and their restriction to curves.* Math. Ann. **258** (1981/82), 213 – 224.

Miyaoka 77 Y. Miyaoka, *On the Chern numbers of surfaces of general type.* Invent. Math. **42** (1977), 225 – 237.

Miyaoka 84 Y. Miyaoka, *The maximal number of quotient singularities on surfaces with given numerical invariants.* Math. Ann. **268** (1984), 159 – 171.

Miyaoka 87a Y. Miyaoka, *Deformations of a morphism along foliation and applications*, Proc. Symposia Pure Math. **46**, Part I, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, pp. 245 – 268.

Miyaoka 87b Y. Miyaoka, *The Chern classes and Kodaira dimension of a minimal variety.* Advanced Studies Pure Math. **10**, North-Holland, Amsterdam and Kinokuniya, Tokyo, 1987, pp. 449 – 476.

Miyaoka 88a Y. Miyaoka, *On the Kodaira dimension of minimal 3-folds.* Math. Ann. **281** (1988), 325 – 332.

Miyaoka 88b Y. Miyaoka, *Abundance conjecture for 3-folds; Case $\nu = 1$.* Compositio Math. **68** (1988), 203 – 220.

Miyaoka 08 Y. Miyaoka, The orbibundle Miyaoka-Yau-Sakai inequality and an effective Bogomolov-McQuillan theorem, Publications of RIMS **44** (2008), 403 – 417.

Miyaoka 09 Y. Miyaoka, , *Stable Higgs bundles with trivial Chern classes. Several examples.* Proc. Steklov Inst. Math. **264** (2009), 121 – 130.

Mumford 65 D. Mumford, *Geometric invariant theory*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1965.

Narasimhan-Seshadri 65 M.S. Narasimhan and C.S. Seshadri, *Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface.* Ann. of Math. (2) **82** (1965), 540 – 567.

Reid 77 M. Reid, *Bogomolov's theorem* $4c_2 \geq c_1^2$, Proc. Internat. Sympos. on Algebraic Geometry (Kyoto, 1977). Kinokuniya, Tokyo, 1978, pp. 623 – 642.

Reider 88 I. Reider, *Vector bundles of rank 2 and linear systems on algebraic surfaces.* Ann. of Math. (2) **127** (1988), 309 – 316.

Sakai 80 F. Sakai, *Semistable curves on algebraic surfaces and logarithmic pluricanonical maps.* Math. Ann. **254** (1980), 89– 120.

Simpson 88 C. Simpson, *Constructing variations of Hodge structure using Yang-Mills theory and applications to uniformizotion.* J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), 867 – 918.

Simpson 92 C. Simpson, *Higgs bundles and local systems.* I.H.E.S. Publ. Math. **75** (1992), 5 – 95.

Tsuji 88 H. Tsuji, *Stability of tangent bundles of minimal algebraic varieties.* Topology **27** (1988), 429 – 442.

Uhlenbeck-Yau 86 K.K. Uhlenbeck and S.-T. Yau, On the existence of Heritian-Yang-Mills connections in stable vector bundle. Comm. Pure Appl. Math. **39-S** (1986), 257 – 293.

Yau 77 S.-T. Yau, Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **74** (1977), 1798 – 1799.

Yau 78 S.-T. Yau, *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation, I.* Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978), 339 – 411.

付録

Towards Algebraic Theory of Higgs Bundles

Yoichi Miyaoka [1]

ABSTRACT: We generalize several basic results on semistable vector bundles to the case of Higgs bundles. Namely, we establish (1) the *restriction theorem* to the effect that the restriction of a semistable Higgs sheaf to a general, sufficiently ample hypersurface is again semistable; (2) the *product theorem* which asserts that the tensor product of semistable Higgs bundles is semistable; and (3) the *Bogomolov inequality* between Chern classes of semistable Higgs bundles. Although some of these results were already shown by Simpson via the Yang-Mills theory, our proof is elementary and purely algebraic.

INTRODUCTION

In the present article we study Higgs sheaves on projective manifolds. The notion of Higgs bundles was introduced by Hitchin [9] in the course of his study of the moduli of integrable connections on Riemann surfaces, and then it was generalized by Simpson [27] to sheaves on general manifolds.

A *Higgs sheaf* on a manifold (*i.e.*, a smooth variety) X is, by definition, a coherent torsion-free $\mathcal{O}_X$-module with a $\mathrm{Sym}\,\Theta_X$-module structure or, equivalently, a pair $(\mathcal{F}, \varphi)$ of coherent, torsion-free $\mathcal{F}$ and a *Higgs field* $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Theta_X, \mathcal{E}nd(\mathcal{F}))$ that satisfies the commutativity condition $\varphi(\theta)\varphi(\xi) = \varphi(\xi)\varphi(\theta)$ for $\theta, \xi \in \Theta_X$.

When X is projective of dimension $d \geqq 1$ with a multi-polarization, *i.e.*, a sequence of $d-1$ ample divisors $\vec{H} = (H_1, H_2, \ldots, H_{d-1})$, we define the $\vec{H}$-slope $\mu_{\vec{H}}(\mathcal{F})$ of $\mathcal{F}$ to be the rational number $c_1(\mathcal{F})H_1 \cdots H_{d-1}/(\mathrm{rank}\,\mathcal{F})$. We say that $\mathcal{F}$ is *Higgs $\vec{H}$-semistable* if any non-zero Higgs subsheaf has $\vec{H}$-slope greater than or equal to $\mu_{\vec{H}}(\mathcal{F})$. When $d = 1$ and $\vec{H} = \emptyset$, $\mathcal{F}$ is said to be (semi)stable instead of $\emptyset$-semistable.

Given a morphism $f\colon Y \to X$ between manifolds and a Higgs sheaf $\mathcal{F}$ on X, the pull-back sheaf $\mathcal{F}_Y = f^*\mathcal{F}/(\mathrm{torsion})$ is a Higgs sheaf on Y in a canonical way (in what follows, the "pullback" $f^*\mathcal{F}$ and the "restriction" $\mathcal{F}|_Y$ of a torsion-free sheaf usually mean the pullback and the restriction modulo torsion for the sake of simplicity of notation). Indeed, there is a natural homomorphism $\mathrm{Sym}\,\Theta_Z \to \mathrm{Sym}\,f^*\Theta_X$, while $f^*\mathcal{F}$ is a $\mathrm{Sym}\,f^*\Theta_X$-module in an obvious manner, thereby a $\mathrm{Sym}\,\Theta_Z$-module structure being defined on $f^*\mathcal{F}$. In particular, restriction of a Higgs sheaf to a smooth subvariety Z is again a Higgs sheaf on Z. With this basic fact in mind, one of our main results is the following theorem, a Higgs analog of a famous theorem of Mehta-Ramanathan [17] pertaining to semistable torsion free sheaves:

Theorem 0.1 (Restriction theorem). *Let X be a projective manifold of dimension $d \geqq 2$ with a multi-polarization $\vec{H} = (H_1, \ldots, H_{d-1})$ and let $\mathcal{F}$ be an $\vec{H}$-semistable Higgs sheaf on X. If m is a*

[1] partially supported by the JSPS Grant-in-Aid # 24540034

sufficiently large integer and Y *is a general smooth member of* $|mH_{d-1}|$*, then the restriction* $\mathcal{F}|_Y$ *of* $\mathcal{F}$ *to* Y *is* $\vec{H}_Y$*-semistable, where* $\vec{H}_Y$ *stands for the multi-polarization* $(H_1|_Y, \dots, H_{d-2}|_Y)$ *on* Y*.*

The restriction theorem reduces certain basic questions about Higgs sheaves to the case where they are defined on curves. In this sense, Higgs bundles on curves are of special importance. For instance, we are interested in criteria for their semistabllity. As such, we have the following

Theorem 0.2. *Let* $\mathcal{F}$ *be a nilpotent Higgs bundle on a smooth projective curve* C*. Then* $\mathcal{F}$ *is Higgs semistable if and only if there exist a ramified covering* $f\colon \widetilde{C} \to C$ *and an extension class* $\tau \in \operatorname{Ext}^1(\mathcal{O}_{\widetilde{C}}, f^*\Theta_C)$ *such that the* τ*-twist* $f^*\mathcal{F}_\tau$ *is bundle semistable.*

In the statement, a *nilpotent* Higgs bundle is a bundle with nilpotent Higgs field, which gives rise to a canonicall *Jordan filtration* of $\mathcal{F}$ (see Section 1C below). After replacing the base curve by a certain ramified cover (the *spectral curve* attached to the Higgs bundle), a given Higgs bundle decomposes to a direct sum of bundles equipped with structure of nilpotent bundles (see Section 1B). A *twist* is a special type of Higgs deformation which preserves the Jordan filtration and Chern classes (see Section 3).

Theorem 0.2 asserts that there is a well controlled deformation of a semistable Higgs bundle to a bundle-semistable Higgs bundle, with Chern classes staying constant. Albeit fairly technical, it bears serious implications. We are indeed able to show the following two basic theorems on semistable Higgs sheaves:

Theorem 0.3 (Product theorem). *The tensor product modulo torsion of two* $\vec{H}$*-semistable Higgs sheaves is again* $\vec{H}$*-semistable. In particular, given a* $\vec{H}$*-semistable Higgs sheaf* $\mathcal{F}$*, the sheaves* $\operatorname{Sym}^m\mathcal{F}$ *and* $\bigwedge^m \mathcal{F}$ *modulo torsion are* $\vec{H}$*-semistable.*

Theorem 0.4 (Bogomolov inequality). *Let* $(X, \vec{H})$ *be a multi-polarized projective manifold of dimension* $n \geqq 2$*. If a Higgs sheaf* $\mathcal{F}$ *on* X *is* $\vec{H}$*-semistble of rank* $r \geqq 2$*, then we have the inequality*

$$2r\, c_2(\mathcal{F})H_1 \cdots H_{d-2} \geqq (r-1)\, c_1^2(\mathcal{F})H_1 \cdots H_{d-2}.$$

This generalization of a result of Bogomolov [2] (see also Gieseker [6] and Miyaoka [21] for alternative simpler proofs) was first shown by Simpson [26], who established a Higgs version of the Kobayashi-Hitchin correspondence (Donaldson [4][5] and Uhlenbeck-Yau [29]) between stable vector bundles and Einstein bundles. Although differential geometric methods provide us richer information (particularly in the extremal case), our proof is instead shorter and far more elementary.

*

The present paper is organized as follows:

Section 1 is devoted to preliminaries. In Subsection A, basic notions such as maximally destabilizing subsheves and slope filtrations are explained. We introduce *weak multi-polarizations* because we often need to treat pullbacks via generically finite coverings, rather than finite coverings. Elementary theory of Higgs sheaves is covered in Subsection B. One of the key results is that, after taking a suitable cover, Higgs sheaf is a direct sum of *eigensubsheaves* whose Higgs fields are sums of scalar fields and nilpotent Higgs fields. It means that questions about Higgs sheaves will be addressed once we figure nilpotent Higgs sheaves out. In Subsection C, we describe a given nilpotent Higgs sheaf as a filtered deformation of a Higgs subsheaf of a well understood Higgs bundle. When the sheaf is defined over a curve, this description is extremely simple.

The restriction theorem is proved in Section 2. Our proof essentially follows the argument of the original vector bundle version [17]; what we meed in the new situation are elementary tricks (Lemma 2.2). In this section, we do not need the assumption on the characteristic.

In Section 3, we study nilpotent Higgs bundles $\mathcal{F}$ on a curve and their "*twists*", special deformations of $\mathcal{F}$ which is functorially constructed as tensor products of $\mathcal{F}$ with certain standard twists over certain standard nilpotent algebra. We prove that $\mathcal{F}$ is Higgs semistable if and only if there exist a suitable covering $f\colon \widetilde{C} \to C$ and an extension class $\tau \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_{\widetilde{C}}, f^*\Theta_C)$ such that the τ-twist $f^*\mathcal{F}_\tau$ is bundle semistable (Theorem 0.2). The product theorem is an immediate consequence of this theorem combined with the restriction theorem.

We derive the Bogomolov inequality for Hiiggs sheaves from the semistability of their "two-step twists". In Section 4, we study nilpotent logarithmic Higgs bundles $\mathcal{F}$ on a fibered surface. In this case, $\mathcal{F}$ has two distinct Jordan filtrations, enabling us to construct two-step twist $f^*\mathcal{F}_{\sigma\bar{\tau}}$ of the pullback sheaf $f^*\mathcal{F}$, where $f\colon \widetilde{S} \to S$ is a ramified covering that preserves the fibre space structure. Again we check the equivalence between the Higgs semistability of $\mathcal{F}|_C$ on a general fibre C and the bundle semistability of $f^*\mathcal{F}_{\sigma\bar{\tau}}|_{\widetilde{C}}$, from which we easily obtain the Bogomolov inequality. When applied to the standard Higgs bundle $\mathcal{O}_X \oplus \Omega^1_X$, the Higgs-Bogomolov inequality yields the Miyaoka-Yau inequality [18][30] for X (provided we are able to check a certain weak stability condition on Ω^1_X).

Throughout the paper, the ground field is an algebraically closed field of characteristic zero unless otherwise stated.

Aknowledgements. This paper grew up from the author's talk "The Bogomolov inequality for Higgs bundles" delivered at the conference *Foliation Theory in Algebraic Geometry*, Simons Foundation, New York City, September 3 – 7, 2013. He is grateful to the foundation and the organizers (Paolo Cascini, Jorge Pereira and James McKernan) for providing him generous support and thereby a compelling motivation to conduct systematic research on this subject. He also thank Academia Sinica, Taipei for giving him an opportunity to talk at the Lakeside Colloquium and discuss the subject with S.-T. Yau in November, 2013. He as well appreciates hospitality at the two international conferences: *Moduli spaces of real and complex varieties*, Université d'Angers, June 2 – 5, 2014 (organizers: Frédéric Mangolte, Jean-Philippe Monier, Daniel Naie, Fabrizio Catanese and Viacheslav Kharlamov) and *Complex analysis and geometry*, FRIAS, Universität Freiburg, August 21 – 23, 2014 (organizers: Anreas Höring, Stefan Kebekus, Vladimir Lazić and Gianluca Pacienza). Principal results and rough sketches of their proofs were announced and some technical details were worked out at the two conferences.

1. Preliminaries.

A. Weak multi-polarizations, $\vec{H}$-slopes, and semistability.

Let X be a projective manifold of dimension $d \geqq 1$ defined over an algebraically closed field. By a *weak multi-polarization* of X we mean a sequence $\vec{H} = (H_1, H_2, \ldots, H_{d-1})$ of $d-1$ nef divisors ($\vec{H} = \emptyset$ if $d = 1$). When the divisors are ample, $\vec{H}$ is called a *multi-polarization.* Given a non-zero coherent torsion free sheaf $\mathcal{F}$ and a weak multi-polarization $\vec{H}$, the $\vec{H}$*-slope* of $\mathcal{F}$ is defined to be the rational number

$$\mu_{\vec{H}}(\mathcal{F}) = \frac{c_1(\mathcal{F})H_1 \cdots H_{d-1}}{\operatorname{rank} \mathcal{F}},$$

where rank $\mathcal{F}$ stands for the rank at the generic point. We say that $\mathcal{F}$ is $\vec{H}$*-semistable* if the $\vec{H}$-slope of any non-zero subsheaf is less than or equal to $\mu_{\vec{H}}(\mathcal{F})$. When $d = 1$, we say "*slope*" and "*semistable*" in stead of "$\emptyset$-slope" and "$\emptyset$-semistable". For general theory of $\vec{H}$-semistable sheaves, the reader is referred to Miyaoka [21].

When $\mathcal{F}$ is equipped with an auxiliary structure $\mathfrak{A}$ (which is assumed to be preserved by elementary operations such as sums, intersections, quotients and $\mathcal{O}_X$-duals), we can consider the stability condition together with this structure $\mathfrak{A}$. Namely, an $\mathfrak{A}$-sheaf $\mathcal{F}$ is said to be $(\mathfrak{A}, \vec{H})$*-semistable* if any non-zero $\mathfrak{A}$-subsheaf has $\vec{H}$-slope less than or equal to $\mu_{\vec{H}}(\mathcal{F})$.

General theory (see, *e.g.*, André [1]) tells us that an $\mathfrak{A}$-sheaf admits a unique *slope filtration*, which is often called the *Harder-Naramsimhan filtration* in respect for the paper [8], wherein the notion was first introduced:

Proposition 1.1 (($\mathfrak{A}, \vec{H}$)-slope filtration). *Let $\mathcal{F}$ be a torsion-free sheaf with an auxiliary structure $\mathfrak{A}$. Then there exits a unique $\mathfrak{A}$-modulde filtration*

$$0 = \mathcal{F}_{-1}^{\mathfrak{A}} \subset \mathcal{F}_0^{\mathfrak{A}} \subset \cdots \subset \mathcal{F}_q^{\mathfrak{A}} = \mathcal{F}$$

which satisfies the following two conditions:

(1) *Semistabiliy of the successive quotiients, i.e., the quotients $\mathcal{G}_j^{\mathfrak{A}} = \mathcal{F}_j^{\mathfrak{A}}/\mathcal{F}_{j-1}^{\mathfrak{A}}$ are non-zero, $\mathcal{O}_X$-torsion-free, and $(\mathfrak{A}, \vec{H})$-semistable.*

(2) *Strict decreasing slopes of the successive quotients, i.e.,*

$$\mu_{\vec{H}}(\mathcal{G}_0^{\mathfrak{A}}) > \mu_{\vec{H}}(\mathcal{G}_1^{\mathfrak{A}}) > \cdots > \mu_{\vec{H}}(\mathcal{G}_s^{\mathfrak{A}}).$$

The initial term $\mathcal{F}_0^{\mathfrak{A}} = \mathcal{G}_0^{\mathfrak{A}}$ of the slope filtration is called the *maximally $\vec{H}$-destabilizing $\mathfrak{A}$-subsheaf* of $\mathcal{F}$. Among the $\vec{H}$-slopes of $\mathfrak{A}$-subsheaves of $\mathcal{F}$, the slope $\mu_{\vec{H}}(\mathcal{F}_0^{\mathfrak{A}})$ is the largest. We call it the *maximum $\vec{H}$-slope* of $\mathcal{F}$ and denote it by $\mu_{\vec{H},\max}^{\mathfrak{A}}(\mathcal{F})$. In view of definitions and Theorem 1.1, we have obvious equivalences:

$$\mathcal{F} \text{ is } (\mathfrak{A}, \vec{H})\text{-semistable} \;\Leftrightarrow\; \mu_{\vec{H},\max}^{\mathfrak{A}}(\mathcal{F}) = \mu_{\vec{H}}^{\mathfrak{A}}(\mathcal{F}) \;\Leftrightarrow\; \mathcal{F}_0^{\mathfrak{A}} = \mathcal{F}.$$

Given a separable, generically finite morphism $f\colon Y \to X$, let $\tilde{f} : \tilde{Y} \to X$ be its Galois cloure. When the auxiliary structure $\mathfrak{A}$ is nice and naturally extends to $f^*\mathcal{F}$ and $\tilde{f}^*\mathcal{F}$, the unique maximally $\tilde{f}^* \vec{H}$-destabilizing $\mathfrak{A}$-subsheaf of $\tilde{f}^* \mathcal{F}$ is Galois-invariant and descends to the maximally $\vec{H}$-destabilizing $\mathfrak{A}$-subsheaf of $\mathcal{F}$. Therefore, in this case, we have

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \text{ is } (\mathfrak{A}, \vec{H})\text{-semistable} \quad &\Leftrightarrow \quad \tilde{f}^* \mathcal{F} \text{ is } (\mathfrak{A}, \tilde{f}^* \vec{H})\text{-semistable} \\ &\Leftrightarrow \quad f^* \mathcal{F} \text{ is } (\mathfrak{A}, f^* \vec{H})\text{-semistable.} \end{aligned}$$

The situation is much subtler when f is inseparable (see Langer [16]).

B. Higgs sheaves, spectral schemes, and eigensheaf decomposition.

Typical examples of $\mathfrak{A}$ are *Higgs structures* defined by Hitchin [9] (on a Riemann surface) and Simpson [27] (on a general complex manifold). In this article, we employ an equivalent definition adopted in Miyaoka [23].

Let X be a manifold. Let $\operatorname{Sym} \Theta = \bigoplus_{k \geqq 0} \operatorname{Sym}^k \Theta$ denote the symmetric tensor algebra generated by the tangent sheaf Θ_X. A *Higgs sheaf* on X is, by definition, a coherent torsion-free $\mathcal{O}_X$-module with a $\operatorname{Sym} \Theta_X$-module structure or, equivalently, a pair $(\mathcal{F}, \varphi)$, where $\mathcal{F}$ is coherent and torsion free and the *Higgs field* $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Theta_X, \mathcal{E}nd(\mathcal{F})) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \Omega^1_X \otimes \mathcal{F})$ satisfies the commutativity condition

$$\varphi(\theta)\varphi(\xi) = \varphi(\xi)\varphi(\theta) \in \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}) \quad \text{for} \quad \theta, \xi \in \Theta_X.$$

In particular, the $\mathcal{O}_X$-homomorphism φ naturally extends to an $\mathcal{O}_X$-algebra homomorphism $\varphi\colon \operatorname{Sym} \Theta_X \to \mathcal{E}nd(\mathcal{F})$.

A morphism $f\colon Y \to X$ between manifolds naturally induces an $\mathcal{O}_Y$-homomorphism $f_\sharp\colon \Theta_Y \to f^*\Theta_X$. Hence, if $(\mathcal{F}, \varphi)$ is a Higgs sheaf on X, its pullback $f^*\mathcal{F}$ (more precisely the pullback modulo torsion) carries a natural Higgs sheaf structure with the Higgs field $\varphi_Y = (1 \otimes \varphi) f_\sharp$. For instance, given a closed submanifold $Z \subset X$, the restriction of a Higgs sheaf to Z naturally is a Higgs sheaf on Z. Another example is a surjective, separable morphism (*i.e.*, $f_\sharp$ is generically surjective). In this case, the saturated Sym $f^*\Theta_X$-subsheaves and the saturated Sym Θ_Y-subsheaves of $f^*\mathcal{F}$ are exactly the same. Therefore, in view of observations in Subsection 1A above, we obtain the following

Theorem 1.2 (Semistability of Higgs sheaves under separable morphisms). *Let $f\colon Y \to X$ be a surjective, separable, generically finite morphism between projective manifolds. Let $\vec{H}$ be a weak polarization of X and $(\mathcal{F}, \varphi)$ a Higgs sheaf on X. Then the Higgs sheaf $(f^*\mathcal{F}, \varphi_Y)$ is $f^*\vec{H}$-semistable if and only if $(\mathcal{F}, \varphi)$ is $\vec{H}$-semistable.*

Let $(\mathcal{F}, \varphi)$ be a Higgs sheaf of rank r on X, a projective manifold of dimension d. Let K be the function field of X, $\overline{K}$ the algebraic closure of K and $\overline{\mathcal{O}}$ the integral closure of $\mathcal{O}_X$ in $\overline{K}$. Take a K-basis $\theta_1, \ldots, \theta_d$ of $\Theta_X \otimes K \cong K^d$. We view $\varphi(\theta_1), \ldots, \varphi(\theta_d)$ as K-linear endomorphisms of $\mathcal{F} \otimes K \cong K^{\oplus r}$. Since these endomorphisms mutually commute, they are simultaneously represented by upper triangular matrices, with eigenvalues $\omega_{i1}, \ldots, \omega_{ir} \in \overline{K}$ in the diagonal of $\varphi(\theta_i)$. Because the K-linear map φ comes from an $\mathcal{O}_X$-linear homomorphism, its eigenvalues are essentially in $\overline{\mathcal{O}}$, *i.e.*, the correspondence $\theta_i \mapsto \omega_{ij}$ defines a muti-valued regular section of Ω^1_X or, equivalently, a closed subscheme Z of the total space Spec $\operatorname{Sym} \Theta_X$ of the vector bundle Ω^1_X.

Z is finite of degree r over X. We call Z the *spectral scheme* attached to $(\mathcal{F},\varphi)$. When X is a curve, the structure of the *spectral curve* Z was closely studied by Hitchin-Murray [10].

In view of what was said so far, the following theorem is elementary linear algebra.

Theorem 1.3 (Eigensheaf decomposition). *Let $f\colon Y\to X$ be a surjective separable morphism between manifolds such that the function field of Y contains the function fields of the irreducible components of the spectral scheme Z. Then there are global 1-forms* (eigenforms) $\omega_1,\dots\omega_e$ *on Y and a direct sum decomposition*

$$f^*\mathcal{F}=\bigoplus_{j=1}^{e}\mathcal{F}_Y^{\omega_j}$$

into Higgs subsheaves (eigensheaves) $\mathcal{F}_Y^{\omega_j}$ *in such a way that the restriction $\varphi_Y|_{\mathcal{F}_Y^{\omega_j}}$ of the Higgs field is the sum of the* scalar field $\omega_j\otimes\mathrm{id}$ *and a* nilpotent Higgs field φ_j^{nil}. *The Higgs sheaf $(\mathcal{F},\varphi)$ is $\vec{H}$-semistable if and only if all the eigensheaves $\mathcal{F}_Y^{\omega_j}$ have the same $f^*\vec{H}$-slope and each nilpotent Higgs sheaf $(\mathcal{F}_Y^{\omega_j},\varphi_j^{\mathrm{nil}})$ is $f^*\vec{H}$-semistable.*

Here a Higgs field φ is said to be *nilpotent* if there exits a positive integer s such that $\varphi\colon \mathrm{Sym}^{s+1}\Theta_X\to\mathcal{E}nd(\mathcal{F})$ is a zero mapping. A Higgs sheaf with nilpotent Higgs field is called a *nilpotent Higgs sheaf.*

Theorem 1.3 together with Theorem 1.2 tells us that many questions about Higgs bundles (in characteristic zero) reduce to questions about nilpotent Higgs bundles. To be more specific, in order to prove the product therem and the Bogomolov inequality, we may assume without loss of generality that the Higgs field φ is nilpotent.

C. Nilpotent Higgs sheaves

Let $(\mathcal{F},\varphi)$ be a nilpotent Higgs sheaf. Given an integer k, we define $\mathcal{F}^{(-k)}\subset\mathcal{F}$ to be the subsheaf annihilated by $\varphi(\mathrm{Sym}^k\Theta)$ or, equivalently, $\varphi^{-1}(0)$, where φ^k is interpreted as a homomorphism from φF to $\mathrm{Sym}^k\Omega_X^1\otimes\varphi F$. The Higgs sheaves $\mathcal{F}^{(-k)}$ define the *Jordan filtration*

$$0=\mathcal{F}^0\subset\mathcal{F}^{(-1)}\subset\mathcal{F}^{(-2)}\subset\cdots\subset\mathcal{F}^{(-s-1)}=\mathcal{F},$$

which gives rise to the associated graded module

$$\mathbf{Gr}^{\mathrm{Jor}}(\mathcal{F})=\mathcal{G}=\bigoplus_{j=1}^{s+1}\mathcal{G}^{(-j)}=\bigoplus_{j=1}^{s+1}\mathcal{F}^{(-j)}/\mathcal{F}^{(-j+1)}.$$

By construction, φ induces $\mathcal{O}_X$-homomorphisms $\overline{\varphi}\colon\Theta_X\otimes\mathcal{G}^{(-j)}\to\mathcal{G}^{(-j+)}$, so that $(\mathcal{G},\overline{\varphi})$ is again a nilpotent Higgs sheaf.

Similarly, if we define $\mathcal{F}^{\langle k\rangle}$ to be the saturation in $\mathcal{F}$ of the subsheaf $\varphi(\mathrm{Sym}^k\Theta_X)\mathcal{F}$, we get the *dual Jordan filtration*

$$0=\mathcal{F}^{\langle s+1\rangle}\subset\mathcal{F}^{\langle s\rangle}\subset\cdots\subset\mathcal{F}^{\langle 1\rangle}\subset\mathcal{F}^{\langle 0\rangle}=\mathcal{F},$$

inducing a graded module $\mathbf{Gr}^{*\text{-Jor}}(\mathcal{F})$. It is easy to check that $(\mathcal{F}^*)^{(-k)}=(\mathcal{F}/\mathcal{F}^{\langle k\rangle})^*$, where $\cdot^*$ stands for the dual Higgs sheaf $\mathcal{H}om(\cdot,\mathcal{O}_X)$. In particular, when $\mathcal{F}$ is reflexive, $\mathbf{Gr}^{*\text{-Jor}}(\mathcal{F})$ is isomorphic to $\Big(\mathbf{Gr}^{\mathrm{Jor}}(\mathcal{F}^*)\Big)^*$.

Examples. For the standard Higgs sheaf $\mathbf{E}^s(X)$, we have

$$\mathbf{Gr}^{\mathrm{Jor}}(\mathbf{E}^s(X)) = \mathbf{Gr}^{*\text{-}\mathrm{Jor}}(\mathbf{E}^s(X)) = \bigoplus \mathrm{Sym}^k \Theta_X.$$

If X is a smooth hypersurface in Y and $\mathcal{F} = \mathbf{E}^s(Y)|_X$, then

$$\begin{aligned} \mathbf{Gr}^{\mathrm{Jor}}(\mathcal{F}) \quad &= \bigoplus \mathrm{Sym}^k \Theta_Y|_X \\ \mathbf{Gr}^{*\text{-}\mathrm{Jor}}(\mathcal{F}) \quad &= \bigoplus \mathrm{Sym}^k \Theta_X \otimes \mathrm{Sym}^{s-k}(\mathcal{N}_{X/Y} \oplus \mathcal{O}_X), \end{aligned}$$

where $\mathcal{N}_{X/Y}$ stands for the normal bundle. If we ignore the gradings, the two modules are isomorphic to to $\mathbf{E}^s(Y)|_X$ and $\mathrm{Sym}^s(\Theta_X \oplus \mathcal{N}_{X/Y} \oplus \mathcal{O}_X)$, respectively.

Remark. Do not confuse the Jordan filtration $\{\mathcal{F}^{(-k)}\}$ or the dual Jordan filtration $\{\mathcal{F}^{\langle k \rangle})$ with the slope filtration $\{\mathcal{F}_j^{\mathrm{Higgs}}\}$. They have no relation in general.

The length s of the Jordan filtration is called the *depth* of the nilpotent Higgs sheaf $\mathcal{F}$. By the definition of s, the $\mathrm{Sym}\,\Theta_X$-module structure of $\mathcal{F}$ descends to a module structure over $\mathbf{E}^s(X) = \mathrm{Sym}\Theta_X/(\mathrm{Sym}^{s+1}\Theta_X)$, where $(\mathrm{Sym}^{s+1}\Theta_X)$ denotes the ideal generated by the $s+1$-th symmetric tensors (see [23], Section 2, Example 3). Let $\mathbf{F}^s(X) = \bigoplus_{j=0}^s \mathrm{Sym}^j \Omega_X^1$ denote the dual Higgs bundle of $\mathbf{E}^s(X)$.

Proposition 1.4 (Standard realization of associated graded Higgs sheaves). *Let $\mathcal{F}$ be a nilpotent Higgs sheaf of depth s. In the notation as above, there exists an injective Higgs homomorphism*

$$\mathbf{Gr}^{\mathrm{Jor}}(\mathcal{F}) = \mathcal{G} = \bigoplus_{k=1}^{s+1} \mathcal{G}^{(-k)} \hookrightarrow \mathbf{F}^s(X) \otimes \mathcal{G}^{(-1)},$$

where $\mathcal{G}^{(-1)} = \mathcal{F}^{(-1)}$ is regarded as a Higgs sheaf with zero Higgs field. Through this embedding, we have

$$\mathcal{G}^{(-k)} = \mathcal{G} \cap \left(\mathrm{Sym}^{k-1}\Omega_X^1 \otimes \mathcal{G}^{(-1)}\right).$$

Proof. Let $(\mathcal{F}^*, {}^t\varphi)$ be the dual Higgs sheaf. We denote by $\overline{\mathcal{F}}^*$ the Higgs sheaf $(\mathcal{F}^*, 0)$ with zero Higgs field ($\overline{\mathcal{F}}^*$ is identical with $\mathcal{F}^*$ as an $\mathcal{O}_X$-module but with a different Higgs structure). Then we have a surjective Higgs homomorphism $\mathbf{E}^s(X) \otimes \overline{\mathcal{F}}^* \to \mathcal{F}^*$ defined by $\theta_1 \cdots \theta_m \otimes a \mapsto {}^t\varphi(\theta_1 \cdots \theta_m)(a)$. Taking the dual, we have a Higgs embedding

$$\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F}^{**} \hookrightarrow \mathbf{F}^s(X) \otimes \overline{\mathcal{F}}^{**},$$

together with a natural identification $\mathcal{F}^{(-k)} = \mathcal{F} \cap \left(\mathbf{F}^{k-1}(X) \otimes \overline{\mathcal{F}}^{**}\right)$. In particular, there is an inclusion $\mathcal{G}^{(-k)} = \mathcal{F}^{(-k)}/\mathcal{F}^{(-k+1)} \subset \mathrm{Sym}^{k-1}\Omega_X^1 \otimes \overline{\mathcal{F}}^{**}$. Therefore, we can express an element $\gamma \in \mathcal{G}^{(-k)}$ in the form $\sum_{|I|=k-1} dx^I \otimes \gamma_I$, where the I are multiindices and $\gamma_I \in \overline{\mathcal{F}}^{**}$. Then, by letting ∂^I act on $\mathcal{G}^m$, we get

$$\gamma_I = \varphi(\partial^I)\gamma \in \varphi(\mathrm{Sym}^{k-1}\Theta_X)\mathcal{G}^{(-k)} \subset \mathcal{G}^{(-1)}.$$

This proves that $\mathcal{G}^{(-k)}$ is contained in $\mathrm{Sym}^{k-1}\Omega_X^1 \otimes \mathcal{G}^{(-1)}$. □

Let $\mathcal{F}$ be a nilpotent Higgs bundle on a smooth curve C, with Jordan filtration $0 \subset \mathcal{F}^{(-1)} \subset \cdots \subset \mathcal{F}^{(-s-1)}$. In this case, Θ_C is a line bundle and the Higgs field φ induces injections

$\overline{\varphi}\colon \Theta_C \otimes \mathcal{G}^{(-k-1)} \hookrightarrow \mathcal{G}^{(-k)}$ or, alternatively, injections $\mathcal{S}^{(-k-1)} = \Theta_C^{\otimes k} \otimes \mathcal{G}^{(-k-1)} \hookrightarrow \mathcal{S}^{(-k)} = \Theta_C^{\otimes k-1} \otimes \mathcal{G}^{(-k)}, \quad k = 1, \dots, s$. Thus we have the canonical realization

$$\mathcal{G} \cong \bigoplus_{k=}^{s+1} \Omega_C^{\otimes k-1} \otimes \mathcal{S}^{(-k)},$$

where $\mathcal{F}^{(-1)} = \mathcal{S}^{(-1)} \supset \mathcal{S}^{(-2)} \supset \cdots \supset \mathcal{S}^{(-s-1)}$ is a decreasing sequence of $\mathcal{O}_C$-modules. The Higgs field $\overline{\varphi}$ of $\mathcal{G}$ is simply the natural contraction map $\Theta_C \otimes \Omega_C^{\otimes k} \otimes \mathcal{S}^{(-k-1)} \hookrightarrow \Omega_C^{\otimes k-1} \otimes \mathcal{S}^{(-k-1)} \subset \Omega_C^{\otimes k-1} \otimes \mathcal{S}^{(-k)}$, represented by the matrix in the Jordan normal form

$$\begin{pmatrix} 0 & dx & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & dx & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & \dots & dx \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Let $\tau_k \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_C, \Theta_C^{\otimes k})$ be an extension class represented by a Čeck cocycle and let $\vec{\tau}$ denote $(\tau_1, \dots, \tau_s)$. We define a $\vec{\tau}$-twist $\mathbf{F}^s(C)_{\vec{\tau}}$ to be $\mathbf{F}^s(C)$ on open affine sets patched together by the transition matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & \tau_1 & \tau_2 & \dots & \tau_{s-1} & \tau_s \\ 0 & 1 & \tau_1 & \dots & \tau_{s-2} & \tau_{s-1} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \tau_{s-3} & \tau_{s-2} \\ & & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \tau_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

which commutes with the Higgs field represented by the Jordan matrix. The $\vec{\tau}$-twist $\mathbf{F}^s_{\vec{\tau}}$ is thus a Higgs bundle on a curve. Conversely, any nilpotent Higgs bundle of which the associated graded module is $\mathbf{F}^s(C)$ is obtained in this way.

In general, we have the following proposition, which is an immediate consequence of the explicit description of nilpotent Higgs bundles.

Proposition 1.5. *Let the notation as above. A nilpotent Higgs bundle on a curve C is embedded into $\mathbf{F}^s(C)_{\vec{\tau}} \otimes \mathcal{F}^{(-1)}$ for certain $\vec{\tau}$, and we have*

$$\mathcal{F} = \sum_{k=1}^{s+1} \mathbf{F}^{k-1}(C)_{\vec{\tau}} \otimes \mathcal{S}^{(-1)} \subset \mathbf{F}^s(C)_\tau \otimes \mathcal{F}^{(-1)},$$

where $\mathcal{F}^{(-1)} = \mathcal{S}^{(-1)} \supset \mathcal{S}^{(-2)} \supset \cdots \supset \mathcal{S}^{(-s-1)}$ is a decreasing sequence of vector bundles.

2. $\mathcal{R}$-sheaves, Higgs sheaves and the Mehta-Ramanathan restriction theorem

In this section, the characteristic of the ground field is arbitrary.

Let X be a variety defined over an algebraically closed field and let $\mathcal{R}$ be a finitely generated $\mathcal{O}_X$-algebra that contains $\mathcal{O}_X$. A coherent sheaf on X equipped with an $\mathcal{R}$-module structure is said to be an *$\mathcal{R}$-sheaf* (caution: in general $\mathcal{R}$ itself is not a coherent sheaf and hence not an $\mathcal{R}$-sheaf). Higgs sheaves are nothing but $\operatorname{Sym}\Theta_X$-sheaves. $\mathcal{R}$-sheaves form a subcategory of the category of coherent sheaves. When an $\mathcal{R}$-sheaf is a locally free $\mathcal{O}_X$-module, we often call it an $\mathcal{R}$-bundle. For instance, a Higgs bundle is a $\operatorname{Sym}\Theta_X$-bundle.

Given a coherent $\mathcal{O}_X$-sheaf $\mathcal{F}$, the set of its quotient $\mathcal{O}_X$-sheaves with a fixed Hilbert polynomial form a projective scheme $\operatorname{Quot}(\mathcal{F})$ (see FGA [7]). When $\mathcal{F}$ is an $\mathcal{R}$-sheaf, its quotient $\mathcal{R}$-sheaves with the Hilbert polynomial form a closed subset of $\operatorname{Quot}(\mathcal{F})$. In particular, the theory of quot schemes for $\mathcal{R}$-sheaves is completely parallel to the case of usual coherent sheaves, and we have the following $\mathcal{R}$-sheaf counterpart of the Mehta-Ramanathan's restriction theorem on $\mathcal{O}_X$-sheaves:

Theorem 2.1 (Restriction heorem for $\mathcal{R}$-sheaves). *Let X be a projective manifold of dimension $d \geqq 2$ defined over an algebraically closed field. Let $\vec{H} = (H_1, \ldots, H_{d-1})$ be a multi-polarization and Y a smooth member of $|mH_{d-1}|$ with the multi-polarization $\vec{H}_Y = (H_1|_Y, \ldots, H_{d-2}|_Y)$. Let $\mathcal{R} \supset \mathcal{O}_X$ be a finitely generated $\mathcal{O}_X$-algebra and $\mathcal{F}$ an $\mathcal{R}$-sheaf on X. Denote by $(\mathcal{F}|_Y)_0$ the maximally $\vec{H}_Y$-destabilizing $\mathcal{R}|_Y$-subsheaf of $\mathcal{F}|_Y$. If the integer m is sufficiently large and Y is general, then $(\mathcal{F}|_Y)_0$ coincides with the restriction $\mathcal{F}_0|_Y$ of the maximally $\vec{H}$-destabilizing $\mathcal{R}$-subsheaf $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$. In particular, $\mathcal{F}$ is an $\vec{H}$-semistable $\mathcal{R}$-sheaf if and only if $\mathcal{F}|_Y$ is an $\vec{H}_Y$-semistable $\mathcal{R}|_Y$-sheaf.*

Proof. Recall the argument of Mehta-Ramanathan [17], the outline of which is as follows. Embed X into a projective space $\mathbb{P} = \mathbb{P}^N$ via the linear system $|mH_{d-1}|$. The dual projective space $\mathbb{P}^*$ of $\mathbb{P}$ is identical with the linear system $|mH_{n-1}|$ consisting of hyperplanes of $\mathbb{P}$. Let W be the incidence variety $\{(x, \Pi) \; ; \; x \in X \cap \Pi\} \subset X \times \mathbb{P}^*$, equipped with two projections π_X and $\pi_{\mathbb{P}^*}$. Then, thanks to the theory of quot schemes, there exists a unique saturated subsheaf $\widetilde{\mathcal{F}_0}$ of $\pi_X^*\mathcal{F}$ such that its restriction to a general fibre $Y = \pi_{\mathbb{P}^*}^{-1}(\Pi) = X \cap \Pi$ coincides with the maximally destabilizing subsheaf of $\mathcal{F}|_Y$. Then they use the Lefschetz theorem $\operatorname{Pic}(W) \cong \operatorname{Pic}(X) \oplus \operatorname{Pic}(\mathbb{P}^*)$ and the Serre vanishing theorem to conclude that $\widetilde{\mathcal{F}}_0$ is trivial along the fibres of π_X so that it descends to a sheaf $\mathcal{F}_0$ on X.

Their argument perfectly works as well in our situation. Indeed, the family of the maximally destabilizing $\mathcal{R}|_\Pi$-subsheaves is a closed subset of the quot scheme, determining $\widetilde{\mathcal{F}}_0 \subset \pi_X^*\mathcal{F}$, an $\mathcal{O}_X$-subsheaf trivial along the fibres of π_X. Thus the maximally destabilizing $\mathcal{R}$-subsheaf $(\mathcal{F}|_Y)_0$ indeed lifts to an $\mathcal{O}_X$-subsheaf $\mathcal{F}_0$ of $\mathcal{F}$. Hence the proof reduces to the following

Key Lemma 2.2. *In the notation in Theorem 2.1, let $\mathcal{E}$ be a saturated $\mathcal{O}_X$-subsheaf of the $\mathcal{R}$-sheaf $\mathcal{F}$. Fix an ample divisor H on X and a constant rational number c, which may depend on X, $\vec{H}$, H, $\mathcal{R}$ and $\mathcal{F}$, but independent of $\mathcal{E}$. Let Y be a nonsingular member of $|mH_{d-1}|$ and assume that*

(a) *the restriction* $\mathcal{E}|_Y$ *is an* $\mathcal{R}|_Y$*-subsheaf of* $\mathcal{F}|_Y$*, and that*

(b) $\mu_{\vec{H}_Y}(\mathcal{E}|_Y) \geqq -c\,\mu_{\vec{H}_Y}(\mathcal{O}_Y(H)) = -cmH_1 \cdots H_{d-2}H_{d-1}H.$

If m *is sufficiently large, then the* $\mathcal{O}_X$*-subsheaf* $\mathcal{E}$ *is actually an* $\mathcal{R}$*-subsheaf. In particular, if the maximally* $\mathcal{R}|_Y$*-destabilizing subsheaf* $(\mathcal{F}|_Y)_0$ *of* $\mathcal{F}|_Y$ *extends to a saturated* $\mathcal{O}_X$*-subsheaf of* $\mathcal{F}$*, then the lift is automatically the maximally destabilizing* $\mathcal{R}$*-subsheaf* $\mathcal{F}_0$ *of* $\mathcal{F}$*.*

Proof. Take a coherent subsheaf $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$ such that $\mathcal{S}$ generates the algebra $\mathcal{R}$ over $\mathcal{O}_X$. Fix a positive integer a such that both $\mathcal{F}$ and $\mathcal{S}$ can be embedded in direct sums of copies of $\mathcal{O}_X(aH)$.

Suppose that $\mathcal{E}$ is not an $\mathcal{R}$-subsheaf. Then $\widetilde{\mathcal{E}} = (\mathcal{O}_X + \mathcal{S})\mathcal{E} \supsetneqq \mathcal{E}$, and therefore $\widetilde{\mathcal{E}}$ and its saturation $\overline{\mathcal{E}}$ in $\mathcal{F}$ have a strictly larger rank, say, $r + \operatorname{rank}\mathcal{E}$, than $\mathcal{E}$ does. Since both $\mathcal{E}$ and $\overline{\mathcal{E}}$ are saturated in $\mathcal{F}$, they are subbundles in codimension one, meaning that, at a general point p on the divisor Y, the ranks of $\mathcal{E} \otimes k(p)$ and $\overline{\mathcal{E}} \otimes k(p)$ are $\operatorname{rank}\mathcal{E}$ and $r + \operatorname{rank}\mathcal{E}$, respectively. On the other hand, noting that $\mathcal{E}|_Y$ is an $\mathcal{R}|_Y$-sheaf, we have $\mathcal{E} \otimes k(p) = \widetilde{\mathcal{E}} \otimes k(p)$. Thus the saturation process necessarily makes a big difference of the first Chern classes:

$$c_1(\overline{\mathcal{E}}) - c_1(\widetilde{\mathcal{E}}) \geqq rY = rmH_{d-1}.$$

Let $\mathcal{K}$ be the kernel of the natural surjection $\mathcal{S} \otimes \mathcal{E} \to \widetilde{\mathcal{E}}/\mathcal{E}$. Then we have

$$\begin{aligned} c_1(\overline{\mathcal{E}}) &\geqq rmH_{d-1} + c_1(\widetilde{\mathcal{E}}) \\ &= rmH_{d-1} + c_1(\mathcal{E}) + c_1(\tilde{\mathcal{E}}/\mathcal{E}) \\ &= rmH_{d-1} + c_1(\mathcal{E}) + c_1(\mathcal{S} \otimes \mathcal{E}) - c_1(\mathcal{K}) \\ &= rmH_{d-1} + (\operatorname{rank}\mathcal{S} + 1)c_1(\mathcal{E}) + (\operatorname{rank}\mathcal{E})c_1(\mathcal{S}) - c_1(\mathcal{K}). \end{aligned}$$

Because $\mathcal{K}$ is a subsheaf of $\mathcal{S} \otimes \mathcal{F}$, and hence a subsheaf of a direct sum of copies of $\mathcal{O}_X(H) \otimes \mathcal{O}_X(H) = \mathcal{O}_X(2H)$, we can esteimate the first Chern class of $\mathcal{K}$ from above:

$$c_1(\mathcal{K}) \leqq (\operatorname{rank}\mathcal{K})(2aH) \leqq (\operatorname{rank}\mathcal{S})(\operatorname{rank}\mathcal{F})\, 2aH.$$

Therefore

$$c_1(\overline{\mathcal{E}}) \geqq rmH_{d-1} + (\operatorname{rank} S + 1)c_1(\mathcal{E}) + (\text{a term independent of } m \text{ and } \mathcal{E}).$$

Furthermore, by our assumption, we have $\mu_{\vec{H}}(\mathcal{E}) \geqq -cH_1H_2 \cdots H_{d-1}H$, to conclude that

$$\mu_{\vec{H}}(\overline{\mathcal{E}}) \geqq \frac{rmH_1H_2 \cdots H_{d-1}H}{\operatorname{rank}\overline{\mathcal{E}}} + (\text{a term independent of } m \text{ and } \mathcal{E}).$$

On the other hand, $\mu_{\vec{H}}(\overline{\mathcal{E}}) \leqq aH_1H_2 \ldots H_{d-1}H$ because $\overline{\mathcal{E}}$ is embedded in a direct sum of $\mathcal{O}_X(aH)$. Comparing the two inequalities, we see that m must stay bounded from above as long as $\tilde{\mathcal{E}} \neq \mathcal{E}$ and $r > 0$. □

From Theorem 2.1 we deduce the following refined version of the restriction theorem for Higgs bundles:

Theorem 2.3 (Refined restriction theorem). *Let* X *be a projective manifold of dimension* $d \geqq 2$ *over an algebraically closed field of characteristic* $\geqq 0$*. Let* $\vec{H} = (H_1, \ldots, H_{d-1})$ *be a multi-polarization and* Y *a smooth member of* $|mH_{d-1}|$ *with multi-polarization* $\vec{H}_Y = (H_1|_Y, \ldots, H_{d-2}|_Y)$*.*

Let $\mathcal{F}$ be a Higgs sheaf on X. If m is sufficiently large and Y is general, then the maximally $\vec{H}_Y$-destabilizing Higgs subsheaf $(\mathcal{F}|_Y)_0$ of the restriction $\mathcal{F}|_Y$ is the restriction $\mathcal{F}_0|_Y$ of the maximally $\vec{H}$-destabilizing Higgs subsheaf $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$. In other words, the two natural procedures $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}|_Y$ and $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_0$ commute.

Proof. In order to simplify the notation, let $\mathcal{E}_Y \subset \mathcal{F}|_Y$ denote the maximally destabilizing Higgs subsheaf or, equivalently, the maximally destabilizing $\operatorname{Sym}\Theta_Y$-subsheaf $(\mathcal{F}|_Y)_0$, of which rank is denoted by e. We will show that $\mathcal{E}_Y$ is in fact a $\operatorname{Sym}(\Theta_X|_Y)$-sheaf. Then, by Theorem 2.1, it extends to the maximally destabilizing $\operatorname{Sym}\Theta_X$-subsheaf $\mathcal{F}_0$ of $\mathcal{F}$, yielding the assertion.

Suppose otherwise. Then

$$\widetilde{\mathcal{E}_Y} = (\mathcal{O}_X + \Theta_X|_Y)\,\mathcal{E}_Y \subset \mathcal{F}|_Y$$

is a subsheaf of rank $e+r$, strictly greater than the rank e of $\mathcal{E}_Y = (\mathcal{O}_X+\Theta_Y)\mathcal{E}_Y$. Since the normal bundle $(\Theta_X|_Y)/\Theta_Y$ is isomorphic to $\mathcal{O}_Y(mH_{d-1})$, there is a surjection $\mathcal{E}_Y(mH_{d-1}) \to \widetilde{\mathcal{E}_Y}/\mathcal{E}_Y$. Its kernel is of the form $\mathcal{K}(mH_{d-1})$, where $\mathcal{K} \subset \mathcal{E}_Y$ is a (saturated) subsheaf of rank $e-r$.

$\mathcal{F}|_Y$ is embedded in a direct sum of copies of $\mathcal{O}_Y(aH|_Y)$, and so are $\mathcal{K}$ and $\widetilde{\mathcal{E}_Y}$. Hence $\mu_{\vec{H}_Y}(\mathcal{K}) \leqq a\mu_{\vec{H}_Y}(H)$ and $\mu_{\vec{H}_Y}(\widetilde{\mathcal{E}_Y}) \leqq a\mu_{\vec{H}}(H)$, while $\mu_{\vec{H}_Y}(\mathcal{E}_Y) \geqq \mu_{\vec{H}_Y}(\mathcal{F}_Y)$ because $\mathcal{E}_Y$ is maximally destabilizing. On the other hand, we have the identity

$$c_1(\widetilde{\mathcal{E}_Y}) = c_1(\widetilde{\mathcal{E}_Y}/\mathcal{E}_Y) + c_1(\mathcal{E}_Y) = rmH_{d-1} + 2c_1(\mathcal{E}_Y) - c_1(\mathcal{K}).$$

Therefore

$$\begin{aligned}
amH_1H_2\cdots H_{d-1}H &= \mu_{\vec{H}_Y}(aH) \\
&\geqq \mu_{\vec{H}_Y}(\widetilde{\mathcal{E}_Y}) = \frac{c_1(\widetilde{\mathcal{E}_Y})}{e+r} \\
&= \frac{mr\,\mu_{\vec{H}_Y}(H_{d-1}|_Y) + 2\,\mu_{\vec{H}_Y}(\det\mathcal{E}_Y) - \mu_{\vec{H}_Y}(\det\mathcal{K})}{e+r} \\
&= \frac{mr\,\mu_{\vec{H}_Y}(H_{d-1}|_Y) + 2e\,\mu_{\vec{H}_Y}(\mathcal{E}_Y) - (e-r)\,\mu_{\vec{H}_Y}(\mathcal{K})}{e+r} \\
&\geqq \frac{mr\,\mu_{\vec{H}_Y}(H_{d-1}|_Y) + 2e\,\mu_{\vec{H}_Y}(\mathcal{F}|_Y) - (e-r)a\,\mu_{\vec{H}_Y}(H|_Y)}{e+r} \\
&\geqq \frac{r}{e+r}\,m^2H_1H_2\cdots H_{d-1}^2 + 2\min\{\mu_{\vec{H}|_Y}(\mathcal{F}|_Y), 0\} - a\,\mu_{\vec{H}_Y}(H|_Y) \\
&\geqq \frac{1}{\operatorname{rank}\mathcal{F}}\,m^2H_1H_2\cdots H_{d-1}^2 - mM,
\end{aligned}$$

where M is a constant independent of m and $\mathcal{E}_Y$. This inequality obviously leads to a contradiction when m is sufficiently large. □

3. Deforming nilpotent semistable Higgs bundles on curves to semistable vector bundles

In this section, all varieties are defined over the complex number field (or, more generally, over an algebraically closed field of characteristic zero).

Let $f\colon \widetilde{C} \to C$ be a morphism of degree d between smooth projective curves of genus $\tilde{g}$ and $g \geqq 1$. Given $\tau \in \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_{\widetilde{C}}}(\mathcal{O}_{\widetilde{C}}, f^*\Theta_C) \cong H^1(\widetilde{C}, f^*\Theta_C)$, we have the associated extension

$$0 \to f^*\Theta_C \to f^*\mathbf{E}^1(C)_\tau \to \mathcal{O}_{\widetilde{C}} \to 0,$$

which we view as a deformation of the pull-back Higgs bundle $f^*\mathbf{E}^1(C) = f^*\Theta_C \oplus \mathcal{O}_{\widetilde{C}}$. The natural homomorphisms

$$f^*\Theta_C \otimes f^*\mathbf{E}^1(C)_\tau \to f^*\Theta_C \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{C}} \cong f^*\Theta_C \subset f^*\mathbf{E}^1(C)_\tau$$

equips $f^*\mathbf{E}^1(C)_\tau$ with a canonical nilpotent $f^*\mathbf{E}^1(C)$-module structure, which in turn induces a $\operatorname{Sym} f^*\Theta_C$-module structure as well as a $\operatorname{Sym}\Theta_{\widetilde{C}}$-module structure (Higgs structure). In particular, the s-th symmetric tensor power $f^*\mathbf{E}^s(C)_\tau = \operatorname{Sym}^s f^*\mathbf{E}^1(C)_\tau$ is a nilpotent $\operatorname{Sym} f^*\Theta_C$-module of depth s. The Higgs bundle $f^*\mathbf{E}^s(C)_\tau$ is called the *τ-twist* of $f^*\mathbf{E}^s(C)$. The graded modules $\mathbf{Gr}^{\mathrm{Jor}}(f^*\mathbf{E}^s(C)_\tau)$ and $\mathbf{Gr}^{*\text{-}\mathrm{Jor}}(f^*\mathbf{E}^s(C)_\tau)$ obviously coincide with $f^*\mathbf{E}^s(C)$.

If we represent τ as a Čeck 1-cocycle $\{\tau_{\alpha\beta}\}$ attached to an open covering $\{U_\alpha\}$ of C, the τ-twist $f^*\mathbf{E}^s(C)_\tau$ is explicitly described in terms of the covering $\{U_\alpha\}$:

(a) There are isomorphisms

$$h_\alpha \colon f^*\mathbf{E}^s(C)_{\overline{\tau}}|_{U_\alpha} \xrightarrow{\approx} f^*\mathbf{E}^s(C)|_{U_\alpha} = \bigoplus_{k=0}^{s} f^*\Theta_C^{\otimes s-k}|_{U_\alpha}.$$

(b) On $U_\alpha \cap U_\beta$, the transition data

$$h_{\alpha\beta} = h_\beta h_\alpha^{-1} \colon f^*\mathbf{E}^s(C)|_{U_\alpha} \to f^*\mathbf{E}^s(C)|_{U_\beta}$$

is given by the Jordan normal form

$$\begin{pmatrix} 1 & \tau_{\alpha\beta} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \tau_{\alpha\beta} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \tau_{\alpha\beta} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

More generally, given a Higgs bundle $(\mathcal{F},\varphi)$ of depth $\leqq s$ on C, we define the *τ-twist* $f^*\mathcal{F}_\tau$ of $f^*\mathcal{F}$ to be the tensor product $f^*\mathbf{E}^s(C)_\tau \otimes_{f^*\mathbf{E}^s(C)} f^*\mathcal{F}$ over the $\mathcal{O}_{\widetilde{C}}$-algebra $f^*\mathbf{E}^s(C)$, which is obviously a nilpotent $\operatorname{Sym} f^*\Theta_C$-module (and hence a Higgs bundle) of depth $\leqq s$.

Let $\mathcal{G} = \mathbf{Gr}^{\mathrm{Jor}}(\mathcal{F}) = \bigoplus \mathcal{G}^{(-k)}$ be the graded module attached to the Jordan filtration. If we describe $\mathcal{F}$ as a successive extension of the graded pieces $\mathcal{G}^{(-k)}$ given by extension data $\{\sigma^{ij}_{\alpha\beta}\} \in \operatorname{Ext}^1(\mathcal{G}^{(-j)}, \mathcal{G}^{(-i)})$, the $\vec{\tau}$-twist $(f^*\mathcal{F})_\tau$ is defined by the twisted data

$$\begin{cases} \overline{\sigma}^{ij}_{\alpha\beta} + \overline{\varphi}(\tau_{\alpha\beta}) = 1 \otimes \sigma^{ij}_{\alpha\beta} + (1 \otimes \varphi)(\tau_{\alpha\beta}), & j = i+1 \\ \overline{\sigma}^{ij}_{\alpha\beta} = 1 \otimes \sigma^{ij}_{\alpha\beta}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

or, equivalently, by the upper triangular matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{\sigma}^{12}_{\alpha\beta} + \overline{\varphi}(\tau_{\alpha\beta}) & \overline{\sigma}^{13}_{\alpha\beta} & \dots & \overline{\sigma}^{1,s}_{\alpha\beta} & \overline{\sigma}^{1,s+1}_{\alpha\beta} \\ 0 & 1 & \overline{\sigma}^{23}_{\alpha\beta} + \overline{\varphi}(\tau_{\alpha\beta}) & \dots & \overline{\sigma}^{2,s}_{\alpha\beta} & \overline{\sigma}^{2,s+1}_{\alpha\beta} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \overline{\sigma}^{3,s}_{\alpha\beta} & \overline{\sigma}^{3,s+1}_{\alpha\beta} \\ & & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \overline{\sigma}^{s,s+1}_{\alpha\beta} + \overline{\varphi}(\tau_{\alpha\beta}) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In view of this description, it is straightforward to check the isomorphisms $f^*(\mathcal{E}\otimes\mathcal{F})_\tau \cong f^*\mathcal{E}_\tau \otimes f^*\mathcal{F}_\tau$, $(f^*\mathrm{Sym}^k\mathcal{F})_\tau \cong \mathrm{Sym}^k f^*\mathcal{F}_\tau$ and $(f^*\bigwedge^k\mathcal{F})_\tau \cong \bigwedge^k f^*\mathcal{F}_\tau$. Furthermore, we deduce that $(f^*\mathcal{F}^*)_\tau \cong (f^*\mathcal{F}_\tau)^*$ from the natural isomorphism $\mathcal{F}^* \cong \bigwedge^{\mathrm{rank}\,\mathcal{F}-1}\mathcal{F}\otimes(\det\mathcal{F})^{-1}$.

Lemma 3.1. *Let the notation be as above and assume that $\mu(\mathcal{F}) \geqq 0$. Let r denote the rank of $\mathcal{F}$ and put $M = \mu_{\max}(\mathcal{G}) \geqq 0$. If the extension class $\tau \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_{\widetilde{C}}, f^*\Theta_C)$ is general, then any line bundle $\mathcal{L}$ contained in $(f^*\mathcal{F})_\tau$ satisfies one of the following two conditions:*

(1) $\mathcal{L} \subset (f^*\mathcal{F})_\tau^{(-1)} = f^*\mathcal{F}^{(-1)}$;

(2) $\deg\mathcal{L} \leqq d(M+2g-2) - \dfrac{\tilde{g}-1}{3(r-1)}$.

Proof. When $\mathcal{F}$ is given by the extension data $\sigma^{ij}_{\alpha\beta}$, then the twisted extension data $t^{j-i}\sigma^{ij}_{\alpha\beta}$ define a family of vector bundles $\mathcal{F}_{(t)}$ parametrized by $t\in\mathbb{C}$, such that $\mathcal{F}_{(t)} \cong \mathcal{F}$ for $t \in \mathbb{C}^\times$ and $\mathcal{F}_{(0)} \cong \mathcal{G}$. Thus, the upper semicontinuity of $\dim H^0(\widetilde{C}, \mathcal{L}^{-1}\otimes\mathcal{F}_{(t)})$ in mind, we may assume that $\mathcal{F}\cong\mathcal{F}_{(0)} = \mathcal{G}$ without loss of generality.

Fix an embedding $\mathcal{L} \subset f^*\mathcal{F}_\tau$ and let m be the smallest integer such that the line bundle $\mathcal{L}$ is contained in $(\bigoplus_{k\leqq m} f^*\mathcal{G}^{(-k)})_\tau \subset f^*\mathcal{F}_\tau$. Let us assume that $m \geqq 2$, so that we have an embedding of $\iota\colon \mathcal{L}$ into the quotient $(f^*\mathcal{G}^{(-m+1)}\oplus f^*\mathcal{G}^{(-m)})_\tau$, which then induces an injection $\bar{\iota}\colon \mathcal{L} \hookrightarrow f^*\mathcal{G}^{(-m)}$. By construction, $\bar{\iota}(\mathcal{L})$ generates an $f^*\mathbf{E}^1(C)$-subsheaf $\overline{\mathcal{L}} \cong f^*\mathbf{E}^1(C)_\tau\otimes\mathcal{L}$ in $(f^*\mathcal{G}^{(-m+1)}\oplus f^*\mathcal{G}^{(-m)})_\tau$, while $\iota(\mathcal{L})$ is a direct summand of $\iota(\mathcal{L}) + f^*\mathcal{G}^{(-m+1)} \subset (f^*\mathcal{G}^{(-m+1)}\oplus f^*\mathcal{G}^{(-m)})_\tau$. It means that the natural homomorphism

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_{\widetilde{C}}, f^*\Theta_C) \cong \mathrm{Ext}^1(\bar{\iota}(\mathcal{L}), f^*\Theta_C\cdot\bar{\iota}(\mathcal{L})) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\bar{\iota}(\mathcal{L}), f^*\mathcal{G}^{m-1})$$

kills the extension class τ. Therefore τ must be contained in the image of

$$\mathrm{Hom}(\bar{\iota}(\mathcal{L}), f^*\mathcal{G}^{(-m+1)}/f^*\Theta_C\cdot\bar{\iota}(\mathcal{L})) \cong H^0(\widetilde{C}, \bar{\iota}(\mathcal{L})^{-1}\otimes(f^*\mathcal{G}^{(-m+1)}/f^*\Theta_C\cdot\bar{\iota}(\mathcal{L}))).$$

Let us bound the dimension of this vector space.

For the sake of simplicity of the notation, put

$$L = \bar{\iota}(\mathcal{L}), \qquad \mathcal{A} = \bar{\iota}(\mathcal{L})^{-1}\otimes f^*\mathcal{G}^{(-m+1)}.$$

The injection $f^*\Theta_C\cdot L \hookrightarrow f^*\mathcal{G}^{(-m+1)}$ defines an embedding $f^*\Theta_C \hookrightarrow \mathcal{A}$, and we want to compute $\dim H^0(\widetilde{C}, \mathcal{A}/f^*\Theta_C)$. The saturation $\mathcal{M}$ of $f^*\Theta_C$ in $\mathcal{A}$ is a line bundle and we have the natural exact sequence

$$0 \to H^0(\widetilde{C}, \mathcal{M}/f^*\Theta_C) \to H^0(\widetilde{C}, \mathcal{A}/f^*\Theta_C) \to H^0(\widetilde{C}, \mathcal{A}/\mathcal{M}).$$

Since $\mathcal{M} \subset \mathcal{A} \cong \mathcal{L}^{-1}\otimes f^*\mathcal{G}^{(-m+1)} \subset \mathcal{L}^{-1}\otimes f^*\mathcal{G}$, its degree is bounded from above by $dM - \deg\mathcal{L}$, so that the dimension of the global sections of the torsion sheaf $\mathcal{M}/f^*\Theta_C$ is bounded from above by $d(M+2g-2) - \deg\mathcal{L} \geqq 0$.

In the meantime, for any subsheaf $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, we have

$$\deg\mathcal{B} = (\mathrm{rank}\,\mathcal{B})\mu(\mathcal{B}) \leqq (\mathrm{rank}\,\mathcal{B})(dM - \deg\mathcal{L}).$$

When $\mathcal{B}$ contains $\mathcal{M}$ (and hence $\operatorname{rank}\mathcal{B} \geqq 1$), we see that

$$\begin{aligned}\deg \mathcal{B}/\mathcal{M} &= \deg \mathcal{B} - \deg \mathcal{M} \\ &\leqq \deg \mathcal{B} - \deg, f^*\Theta_C \\ &\leqq (\operatorname{rank}\mathcal{B})(dM - \deg, \mathcal{L}) + d(2g-2) \\ &\leqq (\operatorname{rank}\mathcal{B})\{d(M+2g-2) - \deg, \mathcal{L}\}.\end{aligned}$$

Thus, if $\mathcal{B}/\mathcal{M} \neq 0$ (and hence $\operatorname{rank}\mathcal{B} \geqq 2$)), we get

$$\mu(\mathcal{B}/\mathcal{M}) \leqq \frac{\operatorname{rank}\mathcal{B}}{\operatorname{rank}\mathcal{B}-1}\{d(M+2g-2) - \deg \mathcal{L}\},$$

meaning that the maximum slope of $\mathcal{A}/\mathcal{M}$ is at most $2d(M+2g-2) - 2\deg \mathcal{L}$ and that

$$\begin{aligned}\dim H^0(\widetilde{C}, \mathcal{A}/\mathcal{M}) &\leq 2(\operatorname{rank}\mathcal{A} - 1)\{d(M+2g-2) - \deg \mathcal{L}\} \\ &\leq 2(r-2)\{d(M+2g-2) - \deg \mathcal{L}\}.\end{aligned}$$

Combining the two estimates above, we arrive at the estimate

$$\dim H^0(\widetilde{C}, \mathcal{A}/f^*\Theta_C) \leqq (2r-3)\{d(M+2g-2) - \deg \mathcal{L}\}.$$

In other words, when we fix an arbitrary embedding $\bar{\iota}\colon \mathcal{L} \hookrightarrow f^*\mathcal{G}^{(-m)}$, the elements of $\operatorname{Ext}^1(\mathcal{O}_{\widetilde{C}}, f^*\Theta_C)$ that are annihilated in $\operatorname{Ext}^1(\bar{\iota}(\mathcal{L}), f^*\mathcal{G}^{(-m+1)})$ form a vector subspace $V_{\bar{\iota}}$ of dimension $\leqq (2r-3)\{d(M-g+1) - 2\deg \mathcal{L}\}$. On the other hand, the embedding $\bar{\iota}$ is parametrized by an open subset of $\operatorname{Hom}(\mathcal{L}, f^*\mathcal{G}^{(-m)})$ and its dimension is bounded by

$$r(dM - \deg \mathcal{L}) \leqq r\{d(M+2g-2) - \deg \mathcal{L}\}.$$

Consequently, the union $\bigcup_{\bar{\iota}} V_{\bar{\iota}}$ in $\operatorname{Ext}^1(\mathcal{O}_{\widetilde{C}}, f^*\Theta_C)$ has dimension at most

$$3(r-1)\{d(M+2g-2) - \deg \mathcal{L}\}.$$

Therefore, if every general extension class τ is contained in some $V_{\bar{\iota}}$, we necessarily have

$$3(r-1)\{d(M+2g-2) - \deg \mathcal{L}\} \geqq \dim \operatorname{Ext}^1(\mathcal{O}_{\widetilde{C}}, f^*\Theta_C) = d(2g-2) + \tilde{g} - 1$$

or, equivalently,

$$\deg \mathcal{L} \leqq dM + \frac{d(3r-4)(2g-2)}{3(r-1)} - \frac{\tilde{g}-1}{3(r-1)} \leqq d(M+2g-2) - \frac{\tilde{g}-1}{3(r-1)},$$

completing the proof. □.

Corollary 3.2. *Let $\mathcal{F}$ be a nilpotentt Higgs bundle of rank r and degree $\geqq 0$ on a smooth projective curve C of genus $g \geqq 1$ and put $M = \mu_{\max}(\mathbf{Gr}^{\mathrm{Jor}}(\mathcal{F}))$. Let $f\colon \widetilde{C} \to C$ be a ramified covering of degree d with sufficiently large ramification locus so that the genus $\tilde{g}$ of $\widetilde{C}$ is larger than $3r!d(M+2g-2)$. Choose a general extension class $\tau \in \operatorname{Ext}^1(\mathcal{O}_{\widetilde{C}}, f^*\Theta_C)$. Then the τ-twist $f^*\mathcal{F}_\tau$ as well as its dual $f^*\mathcal{F}_\tau^*$ is a semistable vector bundle whenever $\mathcal{F}$ is Higgs semistable.*

Proof. Suppose that $f^*\mathcal{F}_\tau$ is unstable and let $\mathcal{S}$ be its maximally destabilizing sbusheaf of rank r'. The invertible sheaf $\mathcal{L} = \bigwedge^{r'} \mathcal{S}$ is the maximally destabilizing subsheaf of the vector bundle

$\bigwedge^{r'}(f^*\mathcal{F})_\tau = (f^*\bigwedge^{r'}\mathcal{F})_\tau$ of rank $r'' = \begin{pmatrix} r \\ r' \end{pmatrix} \leqq r!$. Then, by our assumption and Lemma 3.1, $\mathcal{L} = \bigwedge^{r'}\mathcal{S}$ must be contained in the first Jordan filter $\left(\bigwedge^{r'} f^*\mathcal{F}_\tau\right)^{(-1)}$. Thanks to Lemma 3.3 below, this means that $\mathcal{S} \subset f^*\mathcal{F}_\tau$ is actually a Higgs subsheaf, and hence $f^*\mathcal{F}_\tau$ is Higgs unstable. Consider the one-parameter family $\{f^*\mathcal{F}_{t\tau}\}_{t\in\mathbb{C}}$. Since $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ and $f^*\mathcal{F}_{t\tau} \cong f^*\mathcal{F}_\tau$ for $t \neq 0$, the $\mathcal{F}_{t\tau}$ are Higgs unstable and so is their limit $f^*\mathcal{F} = f^*\mathcal{F}_{0\tau}$. Hence $\mathcal{F}$ must be Higgs unstable. □

Lemma 3.3. *Let V be a vector space of dimension r and φ a nilpotent endomorphism of V. A vector subspace $W \subset V$ of dimension r' is φ-stable if and only if the induced endomorphism $\varphi\colon \bigwedge^{r'} V \to \bigwedge^{r'} V$, $v_1 \wedge \cdots \wedge v_{r'} \mapsto \sum v_1 \wedge \cdots \wedge \varphi(v_i) \wedge \cdots v_{r'}$ annihilates the one-dimensional vector space $\bigwedge^{r'} W$.*

Proof. If W is φ-stable, then φ is a nilpotent endomorphism of the one-dimensional vector space $\bigwedge^{r'} W$, and hence zero. Assume that W is not φ-stable. Putting $W' = (\varphi|_W)^{-1}(W) \subset W$, we have an injection $\varphi : W/W' \hookrightarrow V/W$. Let $\{w_1', \ldots, w_s', w_1'', \ldots, w_t''\}$ be a basis of W such that $\{w_1', \ldots, w_s'\}$ is a basis of W'. Then the $\varphi(w_k'')$ are linearly independent in V/W. Hence $\varphi(w_1' \wedge \cdots \wedge w_s' \wedge w_1'' \wedge \cdots \wedge w_t'')$ contains a non-trivial term in $\bigwedge^{r-1} W \otimes \varphi(w_k'')$, $k = 1, \ldots, t$, and hence non-zero $\bigwedge^{r'} V$. □

Corollary 3.2 yields a characterization of semistable Higgs bundles:

Theorem 3.4. *A nilpoten Higgs bundle $(\mathcal{F}, \varphi)$ on a smooth projective curve C is Higgs semistable if and only if there exit a ramified covering $f\colon \widetilde{C} \to C$ and an extension class $\tau \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_{\widetilde{C}}, f^*\Theta_C)$ such that the τ-twist $f^*\mathcal{F}_\tau$ is semistable as a vector bundle on $\widetilde{C}$.*

Proof. If $\mathcal{F}$ is Higgs unstable and $\mathcal{S}$ is its maximally destabilizing Higgs subsheaf, we have a natural inclusion $f^*\mathcal{S}_\tau \subset f^*\mathcal{F}_\tau$, which is a destatabilizing subsheaf. This proves the "if" part of the statement. The "only-if" part was proved in Corollary 3.2. □

Corollary 3.5. *If $\mathcal{E}$ and $\mathcal{F}$ are semistable Higgs bundles on a non-singular projective curve C, then so are $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$, $\mathrm{Sym}^n \mathcal{F}$ and $\bigwedge^n \mathcal{F}$.*

Proof. Recall that there is a natural isomorphism $f^*(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F})_\tau \cong f^*\mathcal{E}_\tau \otimes f^*\mathcal{F}_\tau$. In the meantime, it is known that the tensor product of two semistable vector bundles is again semistable (see [21] Corollary 3.7), and hence the assertion for the tensor product follows from Theorem 3.4. We infer the assertion for symmetric tensor products and exterior products by noting that in characteristic zero they are direct summands of tensor powers. □

What we have proved so far implies the following unexpected

Theorem 3.6. *Let $\mathcal{F}$ is a nilpotent $\vec{H}$-semistable Higgs sheaf on a smooth projective curve of genus $\geqq 1$, and let $\mathbf{Gr}^{\mathrm{Jor}}(\mathcal{F})$ and $\mathbf{Gr}^{*\text{-}\mathrm{Jor}}(\mathcal{F})$ denote the graded modules attached to the Jordan and dual Jordan filtrations. Then we have the equivalence between three semistability conditions:*

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \text{ is Higgs } \vec{H}\text{-semistable} &\Leftrightarrow \mathbf{Gr}^{\mathrm{Jor}}(\mathcal{F}) \text{ is Higgs } \vec{H}\text{-semistable} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{Gr}^{*\text{-}\mathrm{Jor}}(\mathcal{F}) \text{ is Higgs } \vec{H}\text{-semistable.} \end{aligned}$$

Proof. Because $\mathbf{Gr}^{*\text{-Jor}}(\mathcal{F})$ is the dual of $\mathbf{Gr}^{\text{Jor}}(\mathcal{F}^*)$ and semistability is inherited by duals, it suffices to show ($\mathcal{F}$ is Higgs semistable) $\Rightarrow$ ($\mathbf{Gr}^{\text{Jor}}(\mathcal{F})$ is Higgs semistable). Assume that $\mathcal{G} = \mathbf{Gr}^{\text{Jor}}(\mathcal{F})$ is Higgs unstable and let $\mathcal{S}$ be its maximal destabilizing Higgs subsheaf of rank s. Then take a suitable covering $f\colon \widetilde{C} \to C$ with sufficiently large ramification locus and construct the τ-twist $f^*\mathcal{G}_\tau$ for general τ. Consider the inclusion $\bigwedge^s \mathcal{S} \cong \bigwedge^s \mathcal{S}_\tau \subset \bigwedge^s \mathcal{G}_\tau$. By Lemma 3.1, $\bigwedge^s \mathcal{S}$ is necessarily contained in $(\bigwedge^s \mathcal{G}_\tau)^{(-1)}$, which coincides with the untwisted filter $(\bigwedge^s \mathcal{G})^{(-1)}$. Since $\mathcal{F}$ and $\mathcal{G} = \mathbf{Gr}^{\text{Jor}}(\mathcal{F})$ are locally identical, it follows that $\mathbf{Gr}^{\text{Jor}}(\mathcal{F}) \cong \mathbf{Gr}^{\text{Jor}}(\mathcal{G})$ and that $\mathbf{Gr}^{\text{Jor}}(\bigwedge^s \mathcal{F}) \cong \mathbf{Gr}^{\text{Jor}}(\bigwedge^s \mathcal{G})$. Consequently we have $(\bigwedge^s \mathcal{G})^{(-1)} \cong (\bigwedge^s \mathcal{F})^{(-1)} \subset \bigwedge^s \mathcal{F}$, meaning that $\bigwedge^s \mathcal{S} \subset \bigwedge^s \mathcal{F}$. Hence $\bigwedge^s \mathcal{F}$ is unstable and so is $\mathcal{F}$. □

By combining Corollary 3.5 with the restriction theorem, we have the following product theorem (= Theorem 0.3):

Theorem 3.7. *$(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$, $\mathrm{Sym}^k\mathcal{F}$ and $\bigwedge^k \mathcal{F}$ are Higgs $\vec{H}$-semistable if $\mathcal{E}$ and $\mathcal{F}$ are $\vec{H}$-semistable Higgs sheaves on a multi-polarized manifold X.*

4. Relative Higgs sheaves and the Bogomolov inequality

Throughout this section, the ground field is assumed to be algebraically closed of characteristic zero.

Let $\pi\colon S \to B$ be a two-dimensional Lefschetz fibre space. Namely, S is a smooth projective surface, B is a smooth projective curve and every fibre of π is a connected reduced curve whose singularities are at worst ordinary double points. Let $D \subset B$ be an effective, reduced divisor of even, sufficiently high degree, such that π is a smooth morphism over $B \setminus D$. Then we have the natural exact sequence

$$0 \to \pi^*\Omega_B(D) \to \Omega_S(\log \pi^*D) \to \omega_{S/B} \to 0.$$

Here $\Omega_B(D) = \Omega^1_B(D)$ and $\Omega_S(\log \pi^*D) = \Omega^1_S(\log \pi^*D)$ are the logarithmic cotangent sheaves and $\omega_{S/B} = \mathcal{O}_S(K_S - \pi^*K_B)$ is the relative dualizing sheaf, which coincides with the double dual of the relative cotangent sheaf $\Omega_{S/B} \cong \mathcal{J}\omega_{S/B}$, $\mathcal{J}$ standing for the ideal sheaf of the critical points of π. Let $\Theta_S(-\log \pi^*D)$ be the logarithmic tangent sheaf, *i.e.,* the dual vector bundle of $\Omega_S(\log \pi^*D)$ and let $\Theta_{S/B} \subset \Theta_S(-\log \pi^*D)$ denote the *relative tangent sheaf, i.e.* the dual of the quotient $\omega_{S/B}$ of $\Omega_S(\log \pi^*D)$.

A coherent torsion-free sheaf $\mathcal{F}$ on the fibered surface (S, B, D) is said to be a *relative Higgs sheaf* [resp. a *logarithmic Higgs sheaf*] if it has a $\mathrm{Sym}\,\Theta_{S/B}$-module structure [resp. a $\mathrm{Sym}\,\Theta_S(-\log \pi^*D)$-module structure]. A Higgs sheaf, or equivalently a $\mathrm{Sym}\,\Theta_S$-module, is a logarithmic Higgs sheaf, while a logarithmic sheaf is a relative Higgs sheaf. Standard examples of relative Higgs sheaves are the nilpotent $\mathcal{O}_S$-algebras $\mathbf{E}^s(S/B) = \mathrm{Sym}^s(\Theta_{S/B} \oplus \mathcal{O}_S)$, $s = 0, 1, \ldots$, which are sequence of quotient algebras of $\mathrm{Sym}\,\Theta_{S/B}$. A nilpotent relative Higgs sheaf of depth $\leqq s$ is nothing but an $\mathbf{E}^s(S/B)$-modulde.

Let $\mathcal{F}$ be a nilpotent Higgs sheaf on S of depth s. When viewed as a nilpotent relative Higgs sheaf, $\mathcal{F}$ has the *dual relativeJordan filtration*

$$0 = \mathcal{F}^{[s+1]} \subset \mathcal{F}^{[s]} \subset \cdots \subset \mathcal{F}^{[1]} \subset \mathcal{F}^{]0]} = \mathcal{F},$$

the k-th filter $\mathcal{F}^{[k]}$ denoting the saturation of $\Theta_{S/B}^{\otimes k} \cdot \mathcal{F}$ in $\mathcal{F}$. As we have observed in Section 1C, the relative Jordan filter $(\mathcal{F}^*)^{(-k)}$ of the dual Higgs bundle $\mathcal{F}^*$ is identical with $(\mathcal{F}/\mathcal{F}^{[k]})^*$.

Proposition 4.1. *Let $\mathcal{F}$ be a logarithmic Higgs sheaf on S with dual relative Jordan filtration $\{\mathcal{F}^{[k]}\}$. Then the associated graded module*

$$\mathbf{Gr}^{*\text{-rJor}}(\mathcal{F}) = \mathcal{H} = \bigoplus \mathcal{H}^{[k]} = \bigoplus \mathcal{F}^{[k]}/\mathcal{F}^{[k+1]}$$

has a natural $\mathrm{Sym}(\Theta_{S/B} \oplus \pi^*\Theta_B(-D))$*-module structure.*

Proof. From our definition, it follows that the action of $\Theta_{S/B}$ sends $\mathcal{F}^{[k]}$ to $\mathcal{F}^{[k+1]}$, inducing trivial actions on the graded pieces $\mathcal{H}^{[k]}$ and natural generically surjective homomorphisms $\Theta_{S/B} \otimes \mathcal{H}^{[k]} \to \mathcal{H}^{[k+1]}, \quad k = 0, \dots, s-1$. The action of $\Theta_S(-\log \pi^* D)$ on $\mathcal{F}$ naturally induces a system of actions on the $\mathcal{H}^{[k]}$, which descends to a natural action of $\pi^*\Theta_B(-D) = \Theta_S(-\log \pi^*D)/\Theta_{S/B}$ on $\mathcal{H}$. The two actions above of $\Theta_{S/B}$ and $\pi^*\Theta_B(-D)$ on $\mathcal{H}$ obviously commute, whence the desired assertion. □

When $\mathcal{F}$ is the standard logarithmic Higgs bundle

$$\mathbf{E}^s(S, B, D) = \mathrm{Sym}^s(\mathcal{O}_S \oplus \Theta_S(-\log \pi^* D)),$$

its dual relative Jordan filtration and the associated graded modules are given by the subsheaves

$$\mathbf{E}^{[k]}(S, B, D) = \Theta_{S/B}^{\otimes k} \otimes \mathrm{Sym}^{s-k}(\mathcal{O}_S \oplus \Theta_S(-\log \pi^* D))$$

and

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^s(S, B, D) &= \bigoplus_{k=0}^{s} \Theta_{S/B}^{\otimes -k} \otimes \mathrm{Sym}^{s-k}(\mathcal{O}_S \oplus \pi^*\Theta_B(-D)) \\ &\cong \mathrm{Sym}^s(\Theta_{S/B} \oplus \pi^*\Theta_B(-D) \oplus \mathcal{O}_X), \end{aligned}$$

respectively. $\mathbf{H}^s(S, B, D)$ is a nillpotent quotient algebra of the $\mathcal{O}_S$-algebra

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^\infty(S, B, D) &= \bigoplus_{k,l \geqq 0} \Theta_{S/B}^{\otimes k} \otimes \mathrm{Sym}^l (\pi^*\Theta_B(-D) \oplus \mathcal{O}_S) \\ &\cong \mathrm{Sym}(\Theta_{S/B} \oplus \pi^*\Theta_B(-D)). \end{aligned}$$

In particular, we can talk about $\mathbf{H}^s(S, B, D)$-modules and their tensor products over $\mathbf{H}^s(S, B, D)$. As we have seen, $\mathcal{H} = \mathbf{Gr}^{*\text{-Jor}}(\mathcal{F})$ is an $\mathbf{H}^s(S, B, D)$-module.

Proposition 4.2. *Let the notation be as above and fix a ramified generically finite surjective morphism $f\colon \widetilde{S} \to S$ from a smooth projective surface $\widetilde{S}$ such that a general fibre $\widetilde{C}$ of $\pi f\colon \widetilde{C} \to B$ is an irreducible curve of a given genus $\tilde{g}$. Assume that the degree of the divisor D on C is even and greater or equal to four. Then:*

(0) *There exists an extension*

$$0 \to \Theta_B(-D) \to \mathcal{O}(-\delta)^{\oplus 2} \to \mathcal{O}_B \to 0$$

with extension class $\sigma \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_B, \Theta_B(-D)) \cong H^1(B, \Theta_B(-D))$, where δ is an effective divisor such that $2\delta \sim K_B + D$.

(1) *The sheaf*

$$\mathbf{H}^s(S,B,D)_\sigma = \mathrm{Sym}^s(\Theta_{S/B} \oplus \mathcal{O}_S(-\pi^*\delta)^{\oplus 2})$$

is a $\mathbf{H}^s(S,B,D)$*-module and hence it is a module over the subalgebra* $\mathbf{E}^s(S/B)$*, i.e., a relative Higgs bundle. The associated Jordan graded module of this relative Higgs bundle is* $\mathcal{O}_S$*-isomorphic to* $\mathbf{H}^s(S,B,D)$ *but with different grading, the first graded piece being* $\mathrm{Sym}^s(\Theta_{S/B} \oplus \pi^*\Theta_B(-D))$ *instead of* $\Theta_{S/B}^{\otimes s}$*. The same* $\mathbf{H}^s(S,B,D)_\sigma$ *has a second* $\mathbf{E}^s(S/B)$*-module structure which is induced by the multiplication*

$$\Theta_{S/B} \otimes \mathcal{O}_S(-\pi^*\delta)^{\oplus 2} \to \Theta_{S/B}(-\pi^*\delta), \quad \theta \otimes (a,b) \mapsto \theta \otimes a + \theta \otimes b$$

and can be extended to a module structure over a larger $\mathcal{O}_S$*-algebra* $\widehat{\mathbf{E}}^s(S/B) = \mathrm{Sym}^s(\mathcal{O}_S \oplus \Theta_{S/B}(\pi^*\delta))$*. The first Jordan filtration of this new relative Higgs bundle is isomorphic to* $\mathrm{Sym}^s(\Theta_{S/B} \oplus \mathcal{O}_S(-\pi^*\delta))$*.*

(2) *Fix an arbitrary extension class* $\tau \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_{\widetilde{C}}, (f|_{\widetilde{C}})^*\Theta_C)$*. If the degree of* D *or, equivalently, the degree of* δ *is sufficiently large, then there exists an extension class* $\tilde{\tau} \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_{\widetilde{S}}, f^*\Theta_{S/B}(\pi^*\delta))$ *of which the restriction to* $\widetilde{C}$ *coincides with* τ*. The corresponding extension*

$$0 \to f^*\Theta_{S/B}(\pi^*\delta) \to f^*\widehat{\mathbf{E}}^1(S/B)_{\tilde{\tau}} \to \mathcal{O}_S \to 0$$

is an $f^*\widehat{\mathbf{E}}^1(S/B)$*-module and* $f^*\widehat{\mathbf{E}}^s(S/B)_{\tilde{\tau}} = \mathrm{Sym}^s f^*\widehat{\mathbf{E}}^1(S/B)_{\tilde{\tau}}$ *is an* $f^*\widehat{\mathbf{E}}^s(S/B)$*-module.*

(3) *Given a nilpotent logarithmic Higgs bundle* $\mathcal{F}$ *of depth* s *with the associated graded module* $\mathcal{H} = \mathbf{Gr}^{*\text{-Jor}}(\mathcal{F})$*, the tensor product*

$$\mathcal{H}_\sigma = \mathbf{H}^s(S,B,D)_\sigma \otimes_{\mathbf{H}^s(S,B,D)} \mathcal{H}$$

of $\mathbf{H}^s(S,B,D)$*-modules has the structure of an* $\widehat{\mathbf{E}}^s(S/B)$*-module via the second relative Higgs bundle structure of* $\mathbf{H}^s(S,B,D)_\sigma$*. Therefore, the tensor product*

$$f^*\mathcal{H}_{\sigma\tilde{\tau}} = f^*\widehat{\mathbf{E}}^s(S/B)_{\tilde{\tau}} \otimes_{f^*\widehat{\mathbf{E}}^s(S/B)} f^*\mathcal{H}_\sigma$$

is well defined. We have the equality $[f^*\mathcal{H}_{\sigma\tilde{\tau}}] = [f^*\mathcal{F}]$ *in the* K*-group* $K(\widetilde{S})$*.*

(4) *The restriction* $\mathcal{H}_\sigma|_C$ *of the* σ*-twist to* C *is isomorphic to* $\mathcal{H}|_C = \mathbf{Gr}^{*\text{-Jor}}(\mathcal{F})|_C$ *and it is Higgs semistable if and only if* $\mathcal{F}|_C$ *is so. The restriction* $f^*\mathcal{H}_{\sigma\tilde{\tau}}|_{\widetilde{C}}$ *of the* $\sigma\tilde{\tau}$*-twist constructed in (3) is identical with the* τ*-twist of* $f^*\mathcal{H}|_{\widetilde{C}}$*.*

Proof. (0) The assertion trivially follows from standard arguments based on the Riemann-Roch theorem on curves.

(1) Since $\mathbf{H}^1(S,B,D)_\sigma$ is an extension of $\mathcal{O}_S$ by $\Theta_{S/B} \oplus \pi^*\Theta_B$, the action of $(\Theta_{S/B} \oplus \pi^*\Theta_S)\mathbf{H}^\infty(S,B,D)$ on $\mathbf{H}^1(S,B,D)_\sigma$ is defined as the standard nilpotent action. The subsheaf of $\mathbf{H}^1(S,B,D)$ annihilated by $\Theta_{S/B}$ is clearly $\Theta_{S/B} \oplus f^*\Theta_B(-D)$ and hence the associated graded module is $\mathbf{H}^1(S,B,D)$ with a new grading. This standard $\mathbf{H}^\infty(S,B,D)$-action on $\mathbf{H}^1(S,B,D)$ induces a $\mathbf{H}^\infty(S,B,D)$-action on the symmetric tensor $\mathrm{Sym}^s\mathbf{H}^1(S,B,D)_\sigma = \mathbf{H}^s(S,B,D)_\sigma$, meaning that $\mathbf{H}^s(S,B,D)_\sigma$ is a $\mathbf{H}^s(S,B,D)$-module. Now the rest of the statement is obvious.

(2) is again trivial.

(3) The $\widehat{\mathbf{E}}^s(S/B)$-module structure of $\mathcal{H}_\sigma$ is naturally defined by that of $\mathbf{H}^s(S,B,D)_\sigma$. Since the sheaves in question are constructed as successive extensions, we have $[\mathbf{H}^s(S,B,D)_\sigma] = [\mathbf{H}^s(S,B,D)]$ in $K(S)$ and $[f^*\widehat{\mathbf{E}}^s(S/B)_{\tilde{\tau}}] = [f^*\widehat{\mathbf{E}}^s(S/B)]$ in $K(\widetilde{S})$, leading to the conclusion.

(4) The extension σ as well as the divisor δ is trivial on the fibre C of π. Therefore we have isomorphisms $\mathbf{H}^s(S,B,D)_\sigma|_C \cong \mathbf{H}(S,B,D)|_C$ and $\mathcal{H}_\sigma|_C \cong \mathcal{H}|_C$. Furthermore we have seen in Theorem 3.7 that $\mathcal{H}|_C$ is Higgs semistable if and only if $\mathcal{F}|_C$ is so, thus establishing the equivalence between semistability of $\mathcal{H}_\sigma|_C$ and that of $\mathcal{F}|_C$. Since $\mathcal{H}_\sigma|_C \cong \mathcal{H}|_C$ and $\widehat{\mathbf{E}}^s(S/B)|_C = \mathbf{E}^s(C)$, the final statement is obvious. □

From Corollary 3.2, Theorem 3.7 and Proposition 4.2, we derive the following

Corollary 4.3. *Let the notation and the assumption as in Proposition 4.2, and put* $r = \operatorname{rank}\mathcal{F}$, $g = g(C)$, $\tilde{g} = g(\widetilde{C})$, $d = \deg f$, $M = \mu_{\max}(\mathcal{H}|_C)$. *Assume the following three conditions:*

(1) $\tilde{g} - 1$ *is sufficiently large compared to* $r!d(g-1)$, *i.e., the ramification locus of* f *is large.*

(2) $\deg\delta$ *is large enough to ensure the subjectivity of the restriction map*

$$\operatorname{Ext}^1(\mathcal{O}_S, f^*\Theta_{S/B}(\pi^*\delta)) \to \operatorname{Ext}^1(\mathcal{O}_{\widetilde{C}}, (f|_{\widetilde{C}})^*\Theta_C).$$

(3) *The extension class* $\tilde{\tau} \in \operatorname{Ext}^1(\mathcal{O}_S, f^*\Theta_{S/B}(\pi^*\delta))$ *is general.*

Then the restriction of the $\sigma\tilde{\tau}$*-twist* $f^*\mathcal{H}_{\sigma\tilde{\tau}}$ *to* $\tilde{C}$ *is bundle semistable if and only if* $\mathcal{F}|_C$ *is Higgs semistable.*

This corollary implies the following inequality for the Chern numbers of relatively semistable logarithmic Higgs bundles on a fibered surface:

Corollary 4.4. *Let* $\mathcal{F}$ *be a vector bundle which is a nilpotent* $\Theta_S(-\log\pi^*D)$*-module on a fibred surface* (S,B,π). *If the restriction of* $\mathcal{F}$ *to a general fibre* C *of* π *is Higgs semistable, then*

$$c_2(\mathcal{F}) \geqq \frac{r-1}{2r}c_1(\mathcal{F})^2.$$

.

Proof. Let the notation be as in Corollary 4.3. Then $\mathcal{E} = f^*\mathcal{H}_{\sigma\tilde{\tau}}$ on a general fibre $\widetilde{C}$ of $\pi\circ f$ is semistable as a vector bundle. It follows that both $\dim H^0(\widetilde{S}, \operatorname{Sym}^N\mathcal{E})$ and (by Serre duality) $\dim H^2(\widetilde{S}, \operatorname{Sym}^N\mathcal{E})$ are bounded by (constant)$N^{\operatorname{rank}\mathcal{E}}$. Thus $\chi\left(\widetilde{S}, \operatorname{Sym}^N\mathcal{E}\right) \leqq O(N^{\operatorname{rank}\mathcal{E}})$, (for further details see [21]). Then, noting that the Chern classes of $\mathcal{E}$ are identical with those of $f^*\mathcal{F}$, we deduce the inequality from the Riemann-Roch theorem. □

If X is a projective manifold of dimension n and $H_1,\dots,H_{n-1}$ are ample divisors, we consider a general complete intersection surface Y cut out by high multiples of $H_{n-1},\dots,H_2$, and then a general Lefschetz pencil $\Lambda \subset |mH_1|$ on Y. By blowing up the base points of Λ, we get a fibered surface $\pi\colon S \to \mathbb{P}^1$. Then, by Corollary 4.3 and the restriction theorem, we have the following

Theorem 4.5 (= Theorem 0.4). *Let* $(X, \overrightarrow{H})$ *be a multi-polarized projective manifold of dimension* $n \geqq 2$ *and let* $\mathcal{F}$ *be an* $\overrightarrow{H}$*-semistable Higgs sheaf of rank* r *on* X. *Then the Bogomolov inequality*

$$c_2(\mathcal{F})H_1\cdots H_{n-2} \geqq \frac{r-1}{2r}c_1(\mathcal{F})^2H_1\cdots H_{n-2}$$

holds.

Proof. When $n = 2$, we are done with locally free $\mathcal{F}$. A torsion free sheaf $\mathcal{F}$ on a surface is not locally free in general, but its double dual $\mathcal{F}^{**}$ is indeed locally free. We have $c_1(\mathcal{F}^{**}) = c_1(\mathcal{F})$, $c_2(\mathcal{F}^{**}) \geqq c_2(\mathcal{F})$, so that the Bogomolov inequality holds for general H-semistable Higgs sheaves on a surface. Then the assertion follows from the restriction theorem. □

Remark. As we have mentioned in Introduction, Simpson [26] proved Theorem 0.4 by constructing a Yang-Mills connection on a stable Higgs bundle. An attempt toward an algebraic proof was made by Langer [14], who showed the inequality for Higgs bundles of rank up to three.

An immediate consequence of Theorem 4.5 is the following

Corollary 4.6 (Miyaoka-Yau inequality). *Let X be a smooth projective variety of dimension d with a multi-polarization $\vec{H} = (H_1, \dots, H_{d-1})$. Assume the following two conditions*

(a) *K_X is pseudo-effective and hence $\mu_{\vec{H}}(\Omega_X^1) \geqq 0$;*

(b) *Any subsheaf $\mathcal{S} \subset \Omega_X^1$ satisfies $\mu_{\vec{H}}(\mathcal{S}) \leqq \dfrac{1 + \operatorname{rank} \mathcal{S}}{\operatorname{rank} \mathcal{S}} \cdot \dfrac{H_1 \cdots H_{d-1} K_X}{d+1}$.*

Then we have $2(d+1)\, c_2(\Omega_X^1) H_2 \cdots H_{d-1} \geqq d\, K_X^2 H_2 \cdots H_{d-1}$.

Proof. The conditions (a) and (b) above guarantee the $\vec{H}$-semistability of the standard Higgs bundle $\mathbf{F}^1(X) = \mathcal{O}_X \oplus \Omega_X^1$. Then the Bogomolov inequality for $\mathbf{F}^1(X)$ is exactly the desired inequality. □

Remarks. (1) The hypothesis (a) in Corollary 4.5 amounts to the non-uniruledness of X (see [24] and [3]), a natural assumption one would make. The hypothesis (b) is far harder to check, albeit it is a considerably weaker condition than $\vec{H}$-semistability of Ω_X^1. What we know about the cotangent bundle of a general non-uniruled manifold is no more than its generic semipositivity [20], *i.e.*, the non-negativity of the minimum slope $\mu_{\vec{H},\min}(\Omega_X^1)$.

In two special cases, however, we are in a position favorable enough to check the hypothesis (b).

One is the case where $(X, \vec{H})$ is a canonical manifold, *i.e.*, K_X is ample and $H_1 = \cdots = H_{d-1} = K_X$. In this standard situation, Ω_X^1 is indeed K_X-semistable (see Tsuji [28]), and Corollary 4.6 recovers Yau's inequality $2(d+1)\, c_2(X) K_X^{d-2} \geqq d\, K_X^d$ shown in [30].

We know another nice situation where X is a surface S with nef canonical divisor. In this classical framework, any invertible sheaf $\mathcal{S} \subset \Omega_S^1$ satisfies $\mu_{K_X}(\mathcal{S}) = c_1(\mathcal{S}) K_S \leqq c_2(S)$ (see [18]) and meets the condition (b) provided $H = K_X$ and $2\, c_2(S) \leqq K_S^2$. Thus Corollary 4.6 gives a fourth proof of the Miyaoka-Yau inequality $3\, c_2(S) \geqq K_S^2$ after an algebro-geometric proof [18] and analytic proofs by Yau [30] and Simpson [26].

(2) It is routine work to extend our results to logarithmic Higgs sheaves and orbifold logarithmic Higgs sheaves. Specifically, it will not be difficult to prove certain higher-dimensional analogues of generalized Miyaoka-Yau inequalities due to Sakai [25], Miyaoka [19], Kobayashi [11][12], Kobayashi-Nakamura-Sakai [13], Langer [15] and Miyaoka [22].

References

1. Y. André, *Slope filtrations.* Confluentes Math **1** (2009), 1 – 85.
2. F.A. Bogomolov, *Holomorphic tensors and vector bundles on projective manifolds.* Izv. Acad. Nauk SSSR Ser. Mat. **42** (1978), 1227 – 1287.
3. S. Boucksom, J.-P. Demailly, M. Paŭn and T. Peternell, *The pseudo-effective cone of a compact Käbler manifold and varieties of negative Kodaira dimension.* J. Algebraic Geom. **22** (2013), 333 – 363.
4. S.K. Donaldson, *Anti self-dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles.* Proc. London Math. Soc. (3) **50** (1985), 1 – 26.
5. S.K. Donaldson, *Infinite determinants, stable bundles and curvature.* Duke Math. J. **54** (1987), 231 – 247.
6. D. Gieseker, *On a theorem of Bogomolov on Chern classes of semistable bundles.* Amer. J. Math. **101** (1979), 77 – 85.
7. A. Grothendieck, *Fondements de la Géometrie Algébrique*, Secretariat Math. Paris, 1962.
8. G. Harder and M.S. Narasimhan, *On the chohomology groups of moduli spaces of vector bundles on curves.* Math. Ann. **212** (1974/75) , 215 – 248.
9. N.J. Hitchin, *The self-duality equations on a Riemann surface.* Proc. London Math. Soc. (3) **55** (1987), 59 – 126.
10. N.J Hitchin and M.K. Murray, *Spectral curves and the ADHM method.* Comm. Math. Phys. **114** (1988), 463 – 474.
11. R. Kobyashi, *Einstein-Kaehler metrics on open algebraic surfaces of general type.* Tohoku Math. J. (2) **37** (1985), 43 – 77.
12. R. Kobayashi, *Einstein-Kähler metrics on open Satake V-surfaces with isolated quotient singularities.* Math. Ann. **272** (1985), 385 – 398.
13. R. Kobayashi, S. Nakamura and F. Sakai, *A numerical characterizations of ball quotients for normal surfaces with branch loci.* Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **65** (1989), 238 – 241.
14. A. Langer, *A note on Bogomolov's instability and Higgs sheaves.* In: *Algebraic Geometry*, de Gruyte, Berlin, 2002, pp. 237 – 256.
15. A. Langer, *Logarithmic orbifold Euler numbers of surfaces with applications.* Proc. London Math. Soc. (3) **86** (2003), 358 – 396.
16. A. Langer, *Semistable sheaves in positive characteristic.* Ann. of Math. (2) **159** (2004), 251 – 276.
17. V.B. Mehta and A. Ramanathan, *Semistable sheaves oon projective varieties and their restriction to curves.* Math. Ann. **258** (1981/82), 213 – 224.
18. Y. Miyaoka, *On the Chern numbers of surfaces of general type.* Invent. Math. **42** (1977), 225 – 237.
19. Y. Miyaoka, *The maximal number of quotient singularities on surfaces with given numerical invariants.* Math. Ann. **268** (1984), 159 – 171.
20. Y. Miyaoka, *Deformations of a morphism along foliation and applications*, Proc. Symposia Pure Math. **46**, Part I, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, pp. 245 – 268.
21. Y. Miyaoka, *The Chern classes and Kodaira dimension of a minimal variety.* Advanced Studies Pure Math. **10**, North-Holland, Amsterdam and Kinokuniya, Tokyo, 1987, pp. 449 – 476.
22. Y. Miyaoka, *The orbibundle Miyaoka-Yau-Sakai inequality and an effective Bogomolov-McQuillan theorem.* Publ. Res. Inst. Math. Sci. **44** (2008), 403 – 417.
23. Y. Miyaoka, *Stable Higgs bundles with trivial Chern classes. Several examples.* Proc. Steklov Inst. Math. **264** (2009), 121 – 130.
24. Y. Miyaoka and S. Mori, *A numerical criterion for uniruledness.* Ann. of Math. (2) **124** (1986), 325 – 332.
25. F. Sakai, *Semistable curves on algebraic surfaces and logarithmic pluricanonical maps.* Math. Ann. **254** (1980), 89– 120.

26. C. Simpson, *Constructing variations of Hodge structure using Yang-Mills theory and applications to uniformization.* J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), 867 – 918.

27. C. Simpson, *Higgs bundles and local systems.* I.H.E.S. Publ. Math. **75** (1992), 5 – 95.

28. H. Tsuji, *Stability of tangent bundles of minimal algebraic varieties.* Topology **27** (1988), 429 – 442.

29. K.K. Uhlenbeck and S.-T. Yau, On the existence of Heritian-Yang-Mills connections in stable vector bundle. Comm. Pure Appl. Math. **39-S** (1986), 257 – 293.

30. S.-T. Yau, Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **74** (1977), 1798 – 1799.