Extremal Kähler 計量の存在問題と Donaldson-Tian-Yau 予想について

大阪大学大学院理学研究科　満渕俊樹

2015 年 2 月 26 日

1　はじめに

まずはじめに，第 13 回岡シンポジウムで話をする講演をする機会を与えて下さいましたオーガナイザーの方たちに心より御礼を申し上げます．小生の母が奈良女子高等師範学校の出身であることもあり，非常に感慨深いものがあります．

2　スカラー曲率と extremal Kähler 計量

コンパクト Kähler 多様体 (X, ω) を考える．この小論では，Kähler 計量と Kähler 形式を同義語のように用いる．よって ω は X の局所正則座標 $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ を用いて

$$\omega = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} g_{\alpha\bar{\beta}}\, dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta$$

と書け，しかも $d\omega = 0$ を満たす．このとき ω の Ricci 形式 $\mathrm{Ric}(\omega) := (\sqrt{-1}/2\pi)\bar{\partial}\partial \log \omega^n$ は de Rham コホモロジー類 $c_1(M)$ に属する． エルミート行列 $(g_{\alpha\bar{\beta}})$ の逆行列を $(g^{\bar{\beta}\alpha})$ で表す．$\mathrm{Ric}(\omega)$ を局所正則座標を用いて

$$\mathrm{Ric}(\omega) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} R_{\alpha\bar{\beta}}\, dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta$$

と書くとき，X 上の滑らかな関数 $S_\omega := \Sigma_{\alpha,\beta=1}^n g^{\bar\beta\alpha} R_{\alpha\bar\beta}$ を (X,ω) の**スカラー曲率**と呼ぶ．また，X 上の複素ベクトル場

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^n g^{\bar\beta\alpha} \frac{\partial S_\omega}{\partial \bar z_\beta} \frac{\partial}{\partial z_\alpha}$$

が正則ベクトル場になるとき，ω を **extremal Kähler 計量**と呼ぶ．

3 Donldson-Tian-Yau 予想

以下 (X,L) を偏極射影多様体とする．すなわち，X を n 次元非特異連結射影代数多様体とし，L をその上の大変豊富な複素正則直線束とする．また X の正則自己同型群 $\mathrm{Aut}(X)$ のアフィン部分に含まれる極大代数トーラス T をひとつ固定する．特殊計量の存在問題については，小林・ヒッチン対応の多様体版である

予想（1）： (X,L) が T-相対 K-安定 $\Rightarrow$ $c_1(L)$ に属する $\exists$ extremal Kähler 計量.

が考えられるが，$T=\{1\}$ の場合は Donaldson-Tian-Yau 予想として知られており

予想（2）： (X,L) が K-安定 $\Rightarrow$ $c_1(L)$ に属する $\exists$ 定スカラー曲率 Kähler 計量.

の形に定式化される．こちらの方も最近 $L = K_X^{-1}$ の場合に Tian および Chen-Donaldson-Sun によって肯定的に解かれただけで，一般の場合は全く手がついておらず未解決である．実際，予想（1）も予想（2）も本質的には殆ど変わらないので，以下の議論では，予想（2）について論ずることにする．

4 Donaldson-Futaki 不変量

L のエルミート計量 h_0 で，対応する第 1 チャーン形式 $\omega_0 = c_1(L;h_0)$ が Kähler 計量になるものを固定する．このときベクトル空間 $V = H^0(X, L^{\otimes\ell})$ にエルミート内積 ρ_0 が

$$\rho_0(\sigma,\sigma') := \int_X (\sigma,\sigma')_{h_0}\, \omega_0^n, \qquad \sigma,\sigma' \in V,$$

で定義される．ただし $(\ ,\ )_{h_0}$ によって，$L^{\otimes\ell}$ の h_0^ℓ を用いたエルミート各点内積を示す．そこで $\mu = (\mathcal{X},\mathcal{L},\varphi)$ を (X,L) の指数 ℓ のテスト配位とする．つまり

$$\varphi : \mathbb{C}^* \to \mathrm{GL}(V)$$

は代数群の準同型でコンパクト群 $S^1 \subset \mathbb{C}^*$ の像が (V, ρ_0) に等長的に作用し，しかも $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ が φ の DeConcini-Procesi family，すなわち $\mathcal{X}$ がグラフ

$$\Gamma_\varphi = \bigcup_{t \in \mathbb{C}^*} \{t\} \times \varphi(t) X$$

の $\mathbb{C} \times \mathbb{P}^*(V)$ 内での閉包で，かつ $\mathcal{L} = \mathrm{pr}_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^*(V)}(1)$ であるときに言う．ただし X を，完備線形系 $|L^{\otimes \ell}|$ による小平埋め込みで $\mathbb{P}^*(V)$ の複素部分多様体とみなし，pr_2 は $\mathbb{C} \times \mathbb{P}^*(V)$ から第２成分 $\mathbb{P}^*(V)$ への自然な射影とする．

以下 (X, L) のテスト配位の列 $\mu_j = (\mathcal{X}_j, \mathcal{L}_j, \varphi_j)$, $j = 1, 2, \dots,$ で，μ_j の指数 ℓ_j が条件 $\ell_j \to +\infty$ を満たすものを考える．ただし，この章では指数 ℓ のテスト配位 $\mu = (\mathcal{X}, \mathcal{L}, \varphi)$ をひとつ固定し，各 j に対して $\ell_j := j\ell$，$V_j := H^0(X, L^{\otimes \ell_j})$, $N_j := \dim V_j$ とおき，

$$\mathcal{X}_j = \mathcal{X}, \quad \mathcal{L}_j = \mathcal{L}^{\otimes \ell_j}$$

かつ $\varphi_j : \mathbb{C}^* \to \mathrm{GL}(V_j)$ は φ から自然に誘導されたものを考える．$d_j = \ell_j^n c_1(L)^n[X]$ かつ $W_j := \mathrm{Sym}^{d_j}(V_j)^{\otimes n+1}$ とおき，Chow norm

$$W_j^* \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \qquad w \mapsto \|w\|,$$

を考える．完備線形系 $|L^{\otimes \ell_j}|$ による X の小平埋め込みにより X を $\mathbb{P}^*(V_j)$ 上の既約かつ被約な代数的サイクルと考えたときの，X の Chow form を $\mathrm{CH}_j(X)$ で表す．また

$$\varphi_j^{\mathrm{SL}} : \mathbb{R}_+ \to \mathrm{SL}(V_j), \qquad t \mapsto \{\det \varphi(t)\}^{-1/N_j} \varphi_j(t),$$

を φ_j の SL 化とする．$\mathbb{R}_+$ に属する各 t に対して，実変数 s を $t = \exp s$ で導入し，実数直線上の実数値関数 $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f_j(s) := \ell_j^{-n} \log \|\varphi_j^{\mathrm{SL}}(t) \cdot \mathrm{CH}_j(X)\|, \qquad s \in \mathbb{R},$$

によって定義する．$\mathcal{X}_j$ の原点上のファイバー $(\mathcal{X}_j)_0$ を，複素射影空間 $\{0\} \times \mathbb{P}^*(V_j) \cong \mathbb{P}^*(V_j)$ 上の代数的サイクルと考えたときの $(\mathcal{X}_j)_0$ の Chow form $\mathrm{CH}_j((\mathcal{X}_j)_0)$ における，φ_j^{SL} による $\mathbb{R}_+$-作用のウエイトを α_j とすると，以下の公式が成り立つ（[1] 参照）．

$$\lim_{s \to -\infty} \frac{df_j(s)}{ds} = \ell_j^{-n} \alpha_j = (n+1)! c_1(L)^n[X] \{F_1(\mu) + F_2(\mu) \ell_j^{-1} + \dots\}.$$

ここで，$F_1(\mu)$ はテスト配位 μ の **Donaldson-Futaki 不変量**と呼ばれる．

5　テスト配位列の Donaldson-Futaki 不変量

この章では，指数 ℓ_j が $\ell_j \to +\infty$ となるような，(X, L) のテスト配位 $\mu_j = (\mathcal{X}_j, \mathcal{L}_j, \varphi_j)$, $j = 1, 2, \ldots$, の列 $\{\mu_j\}$ に対し，その Donaldson-Futaki 不変量 $F_1(\{\mu_j\})$ を以下のように定義する．ただし，前章で定義した関数 f_j を少し修正する．すなわち f_j の定義域である s-軸を（j に依る）正数で定数倍し，一方 f_j の値域も（j に依る）正数で定数倍する．各 φ_j^{SL} の基本生成元 $u_j \in \mathfrak{sl}(V_j)$ は V_j の基底を選び対角行列と書ける．その対角成分

$$b_{j,1}, b_{j,2}, \ldots, b_{j,N_j}$$

はすべて有理数で，かつその和が零となる．u_j のノルム $|u_j|_1$ および $|u_j|_\infty$ を

$$\begin{aligned}|u_j|_1 \ &:= \ \ell_j^{-n-1}(|b_{j,1}| + |b_{j,2}| + \cdots + |b_{j,N_j}|)\\|u_j|_\infty &:= \ \ell_j^{-1} \max\{|b_{j,1}|, |b_{j,2}|, \ldots, |b_{j,N_j}|\}\end{aligned}$$

で定義する．まず $u_j = 0$ のときは，s の関数 $f_j(s)$ を定数関数として定義する．そこで $u_j \neq 0$ と仮定しよう．この場合は，$\mathbb{R}_+$ に属する t に対して，実変数 s を $t = \exp(s/|u_j|_\infty)$ で導入し，実数値関数 $f_j(s)$ を

$$\begin{aligned}f_j(s) &:= \frac{|u_j|_\infty}{|u_j|_1}\,\ell_j^{-n} \log \|\varphi_j^{\mathrm{SL}}(t) \cdot \mathrm{CH}_j(X)\|\\&= \frac{|u_j|_\infty}{|u_j|_1}\,\ell_j^{-n} \log \|\exp\left(\frac{s u_j}{|u_j|_\infty}\right) \cdot \mathrm{CH}_j(X)\|\end{aligned}$$

で定義する．そこで一般にテスト配位列 $\{\mu_j\}$ の Donaldson-Futaki 不変量 $F_1(\{\mu_j\})$ を以下の極限として定義する（[2] 参照）．

$$F_1(\{\mu_j\}) := \lim_{s \to -\infty} \left\{ \underline{\lim}_{j \to \infty} \frac{df_j(s)}{ds} \right\}.$$

6　K-安定性と強 K-安定性

この章では偏極射影多様体 (X, L) の安定性を考察する．(X, L) が K-準安定であるとは，(X, L) のすべてのテスト配位 $\mu = (\mathcal{X}, \mathcal{L}, \varphi)$ に対して $F_1(\mu) \leq 0$ が成り立つときに言い，K-準安定である (X, L) が K-安定であるとは，$F_1(\mu) = 0$ が成り立つならば μ が自明である，すなわち φ^{SL} が自明である，ときに言う．

この概念を少し強くした安定性の概念を導入する．すなわち，(X,L) が**強 K-準安定**であるとは，(X,L) に対し，指数 ℓ_j が $\ell_j \to +\infty$ を満たすすべてのテスト配位列 $\{\mu_j\}$ に対して $F_1(\{\mu_j\}) \geq 0$ が成り立つときに言い，強 K-準安定である (X,L) が**強 K-安定**であるとは，指数 ℓ_j が $\ell_j \to +\infty$ を満たすテスト配位列 $\{\mu_j\}$ に対して $F_1(\{\mu_j\}) = 0$ が成り立つならば，$j \gg 1$ なるすべての j に対して μ_j が自明であるときに言う．

この強 K-安定性の概念は，基準になる L のエルミート計量 h_0 の取り方に依らない．また $c_1(L)$ に属する定スカラー曲率 Kähler 計量が X 上で存在する場合には (X,L) が強 K-安定となることも分かるが，ここでは深入りはしない．この小論では，冒頭に掲げた予想（２）の代わりに以下の予想（３）を考える．

予想（３）： (X,L) が強 *K-安定* $\Rightarrow$ $c_1(L)$ に属する $\exists$ 定スカラー曲率 Kähler 計量.

7　予想（３）の量子化版

ここで $T=\{1\}$ を仮定していることに注意する．偏極類 $c_1(L)$ に属する定スカラー曲率 Kähler 計量 ω がもし存在するならば，Donaldson の結果から，偏極射影多様体 (X,L) は漸近 Chow-安定，すなわち各正整数 $\ell \gg 1$ に対して $(X,L^{\otimes \ell})$ が Chow-安定で $c_1(L)$ に属する ℓ 次 balanced 計量 ω_ℓ が存在して $\ell \to \infty$ のとき ω_ℓ は ω に収束する．よって balanced 計量は定スカラー曲率 Kähler 計量の量子化版とみなせる．最近我々は

定理： (X,L) が強 K-安定 $\Rightarrow$ (X,L) は漸近 Chow-安定.

という結果 [3] を新田と共同で得たが，この定理はある意味で予想（３）の量子化版が肯定的に成立するということを示している．

8　予想（３）の「証明」の概略

(X,L) を強 K-安定とする．正整数の列 $\ell_j \gg 1$, $j=1,2,\dots,$ で条件 $\ell_j \to +\infty$ を満たすものをとる．前章の定理から $(X,L^{\otimes \ell_j})$ は Chow-安定なので，$c_1(L)$ に属する ℓ_j 次 balanced 計量 ω_{ℓ_j} が得られるが，簡単のため ω_{ℓ_j} を ω_j と書く．また L のエルミート計量 h_j が存在して，$\omega_j = c_1(L;h_j)$ と書ける．

基準のエルミート計量 h_0 とケーラー計量 $\omega_0 = c_1(L;h_0)$ による $V_j := H^0(X,L^{\otimes \ell_j})$ のエルミート内積を ρ_0，エルミート計量 h_j およびケーラー計量 ω_j による V_j のエルミー

ト内積を ρ_j で表すと，各 $\sigma, \sigma' \in V_j$ に対し，

$$\rho_0(\sigma,\sigma') := \int_X (\sigma,\sigma')_{h_0}\omega_0^n, \qquad \rho_j(\sigma,\sigma') := \int_X (\sigma,\sigma')_{h_j}\omega_j^n$$

で定義される．(V_j, ρ_0) の正規直交基底を適当に選ぶとことにより，ρ_0 はもちろん単位行列になるが，ρ_j も正値対角行列となるようにできる．必要とあらば h_j を定数倍して，ρ_j は $\mathrm{SL}(V_j)$ に属する対角行列と思える．この対角成分を

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_{N_j}$$

とするときに $b_\alpha = -\log\sqrt{\lambda_\alpha}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, N_j$, とおく．各 b_α は，$b_1 + b_2 + \cdots + b_{N_j} = 0$ をみたす実数であるが，有理数で近似することによって，最初から各 b_α が有理数であると仮定して一般性を失わない．この $b_1, b_2, \ldots, b_{N_j}$ を対角成分にもつ対角行列を u_j とすると，$u_j \in \mathfrak{sl}(V_j)$ を基本生成元にもつ代数群の（単位元の近傍における）局所準同型

$$\varphi_j : \mathbb{C}^* \to \mathrm{SL}(V_j)$$

を考えると，定義域 $\mathbb{C}^*$ の適当な被覆からの well-defined な global な準同型を定め，これを同じ φ_j で表すことにする．この φ_j に対する DeConcini Procesi family をとることにより (X, L) の指数 ℓ_j のテスト配位 $\mu_j = (\mathcal{X}_j, \mathcal{L}_j, \varphi_j)$ ができる．ここで

$$d_\infty := \sup_j |u_j|_\infty$$

とおくと，次の 2 つの場合にわかれる．

$$(\mathrm{Case\,1}) \quad d_\infty = +\infty, \qquad (\mathrm{Case\,2}) \quad d_\infty < +\infty.$$

まず (Case 1) の場合は，$F_1(\{\mu_j\}) = 0$ となり，(X, L) の強 K-安定性から μ_j が $j \gg 1$ に対して自明となり，矛盾が導かれるか balanced 計量 ω_j が定スカラー曲率ケーラー計量に収束するかのどちらかで，この場合の証明は終わる．
そこで (Case 2) の場合を考えよう．この場合は，次の定理を用いる．

定理： 偏極射影多様体 (X, L) の指数 ℓ のテスト配位 $\mu = (\mathcal{X}, \mathcal{L}, \varphi)$ に対して，
(1)「μ の ℓ-乗根」とよばれる (X, L) の指数 1 のテスト配位 $\kappa = (\mathcal{Y}, \mathcal{F}, \psi)$,
(2) $\mathbb{C}^*$-同変な特異点解消 $\iota : \hat{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$,
(3) 原点上のファイバー $\hat{\mathcal{X}}_0$ にサポートをもつ $\hat{\mathcal{X}}$ 上の divisor $\hat{D}$,
(4) $\mathbb{C}^*$-同変な特異点解消 $\eta : \hat{\mathcal{X}} \to \mathcal{Y}$ が存在して
$\hat{\mathcal{L}} := \iota^*\mathcal{L}$, $\hat{\mathcal{F}} := \eta^*\mathcal{F}$, $D := \hat{D}/\ell$ とおき，φ, ψ の基本生成元をそれぞれ u, v とすると，

(5) $\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{O}_{\hat{\mathcal{X}}}(\hat{D}) \otimes \hat{\mathcal{F}}^{\otimes \ell}$ よって形式的には $\hat{\mathcal{L}} = \left\{\mathcal{O}_{\hat{\mathcal{X}}}(D) \otimes \hat{\mathcal{F}}\right\}^{\otimes \ell}$，かつ
(6) $\ell^{-n} \deg \iota_* D + \deg \eta_* D \leq C_1 |u|_\infty$，かつ
(7) $|v|_\infty \leq C_2 |u|_\infty$
を満たすような，μ や κ や ℓ の選び方に依らない，正定数 C_1, C_2 が存在する．

この定理はある意味でテスト配位のモジュライ空間の precompactness を示しており，この事実と Tian の peak section method を用いると，(Case 2) の場合も，balanced 計量の列 ω_j, $j = 1, 2, \ldots,$ の適当な部分列が定スカラー曲率 Kähler 計量に収束することが示される（ただし現在論文を書いている途中なので完全に断言することは躊躇される）．

参考文献

[1] T. Mabuchi: *Relative stability and extremal metrics*, J. Math. Soc. Japan **66** (2014),535–563.

[2] T. Mabuchi: *The Donaldson-Futaki invariant for sequences of test configurations*, to appear in "Geometry and Analysis on Manifolds", Progress in Math., Birkhäuger.

[3] T. Mabuchi and Y. Nitta: *Strong K-stability and asymptotic Chow-stability*, to appear in "Geometry and Analysis on Manifolds", Progress in Math., Birkhäuger.