# 群の Gelfand-Raikov 表現と群上の正定値関数 ー今昔ー

平井　武（京都大学名誉教授）

# Contents



群 $G$ 上の正定値関数 $f$ からそれを行列要素とする $G$ の表現 $\pi_f$ を作ることは，Gelfand-Raikov の論文 [GR, 1943] で発表され，「局所コンパクト群 $G$ が十分沢山のユニタリ表現を持つ」という非常に重要な結果を示した．ところが，論文が第二次世界大戦中にロシヤ語で発表されたことから，直ちには西側や日本には伝わらず，彼らの仕事は長らく正当な評価を受けられなかった．第 1 節では，そのことを込めて基本的なことを解説する．正定値関数に不変性を要求すれば，それは群表現の指標を取り扱うことになる．第 2 節では論文 [GR] 以前の歴史的な事実も込めて，指標の理論について述べる．私自身の貢献はここでは半単純リー群の既約指標に関することである．

第 3 節では局所有限な離散群の $\mathrm{II}_1$ 型の因子表現の指標が，不変正定値関数として捉えられる．ここでは無限対称群の既約表現の構成にも触れる．第 4 節はあらためて，不変とは限らないが興味ある正定値関数 $f$ について Gelfand-Raikov 表現 $\pi_f$ の構造に関する最近の研究を紹介する．

# 1 群上の正定値関数と Gelfand-Raikov 表現

## 1.1 群上の正定値関数とその性質

**定義 1.1.** 群 $G$ 上の複素関数 $f$ が**正定値** (positive definite) [記号，$f \gg 0$] であるとは，任意個数の $g_i \in G$ と任意の $c_i \in \boldsymbol{C}$ $(1 \leq i \leq n)$ とに対して，

$$(1.1) \qquad \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} f(g_i^{-1} g_j)\, \overline{c_i}\, c_j \geq 0,$$

を満たすこと，すなわち，$n \times n$ 型行列 $(b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$，$b_{ij} := f(g_i^{-1} g_j)$，が正定値な Hermite 型，となること．

$n = 2, g_1 = e$ (単位元)$, g_2 = g,$ の場合，および，

$n = 3, g_1 = e, g_2 = g, g_3 = h$ の場合には，この行列は

$$\begin{pmatrix} f(e) & f(g) \\ f(g^{-1}) & f(e) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f(e) & f(g) & f(h) \\ f(g^{-1}) & f(e) & f(g^{-1}h) \\ f(h^{-1}) & f(h^{-1}g) & f(e) \end{pmatrix},$$

$$\therefore\ f(g^{-1}) = \overline{f(g)},\ f(e) \geq 0,\ f(e)^2 - |f(g)|^2 \geq 0,$$

$$\therefore\ |f(g)| \leq f(e),$$

また，
$$\det = f(e)^3 + f(g)\,\overline{f(h)}\,\overline{f(h^{-1}g)} + \overline{f(g)}\,f(h) f(h^{-1}g) -$$
$$- f(e)\big(|f(g)|^2 + |f(h)|^2 + |f(h^{-1}g)|^2\big) \ \geq\ 0,$$

これから，

$$(1.2) \qquad |f(g) - f(h)|^2 \ \leq\ 3 f(e)\big(f(e) - \Re\{f(h^{-1}g)\}\big).$$

**例 1.1.** $G = \boldsymbol{R}$, $f_\lambda(x) = e^{i\lambda x}\ (x \in \boldsymbol{R})$, $\quad (\lambda \in \boldsymbol{R} \cong \widehat{\boldsymbol{R}})$,
$g_\lambda(x) = \cos(\lambda x) = \big(f_\lambda(x) + f_{-\lambda}(x)\big)/2\ \ (x \in G = \boldsymbol{R})$.

**例 1.2.** $G = \boldsymbol{T}^1 = \{w \in \boldsymbol{C}\,;\, |w| = 1\}$ (1 次元トーラス)，
$f_m(w) = w^m\ (z \in \boldsymbol{T}^1)$, $\quad \big(m \in \boldsymbol{Z} \cong \widehat{\boldsymbol{T}^1}\big)$.

**例 1.3.** $G = \boldsymbol{Z}$,
$f_z(m) = z^m\ (m \in \boldsymbol{Z})$, $\quad (z \in \boldsymbol{T}^1 \cong \widehat{\boldsymbol{Z}})$.

一般に，局所コンパクト群 $G$ に対しては，その連続 1 次元指標の全体である双対 $\widehat{G}$ が基本的な役割を果たす ($G$ 上の関数のフーリエ変換など)．

**(1.2) 式からの帰結：**

(1) $G$ が位相群であれば，$f$ が単位元 $e$ で連続であれば，$G$ 上で一様連続である．

(2) $G$ に $f$ を用いて，群位相を入れることが出来る．

**証明．** $V(f;\varepsilon) := \{g \in G\,;\ |f(e) - f(g)| < \varepsilon\}\ \ (\varepsilon > 0)$,
を単位元 $e$ の基本近傍系とする（分離公理の成立は問わない）．このとき，

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \text{s.t.}\quad V(f;\delta)^{-1}V(f;\delta) \subset V(f;\varepsilon).$$

実際，　$g, h \in V(f;\delta) \implies$

$$|f(g) - f(h)|^2 = |(f(g) - f(e)) - (f(h) - f(e))|^2 < (2\delta)^2 = 4\delta^2,$$

なので，$4\delta^2 < 3f(e)\,\varepsilon$，であればよい． □

**記号 1.1.** $\mathcal{P}(G) :=$ $G$ 上の連続正定値関数の全体,

$\mathcal{P}_{\leqslant 1}(G) := \{f \in \mathcal{P}(G)\,;\ f(e) \leq 1\}$,　凸集合

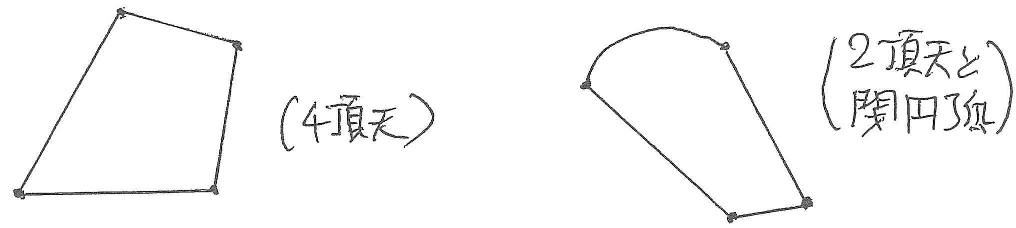
$\mathcal{P}_1(G) := \{f \in \mathcal{P}(G)\,;\ f(e) = 1\}$,　凸集合（$f(e) = 1$ を正規化という）

$\mathrm{Extr}\big(\mathcal{P}_{\leqslant 1}(G)\big)$, $\mathrm{Extr}\big(\mathcal{P}_1(G)\big)$,　端点全体の集合

**定義 1.2.** 凸集合 $X$ の元 $x$ が $X$ の端点 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$x = \lambda y + (1-\lambda)z\ (y, z \in X,\ 0 < \lambda < 1)\ \text{ならば},\ y = z = x$$

図1.1.




**命題 1.1.** $G$ が離散群であれば，$\mathcal{P}_{\leqslant 1}(G)$, $\mathcal{P}_1(G)$ はともに，各点収束の位相で compact である．

**証明．** 写像　$\mathcal{P}_{\leqslant 1}(G) \ni f \mapsto \big(f(g)\big)_{g\in G} \in \prod_{g\in G} D_g$,

$$D_g = D := \{z \in \boldsymbol{C}\,;\ |z| \leq 1\},$$

により，右辺の直積位相（compact）を左辺に移入したのが各点収束位相である．この位相に関して，条件 (1.1) は閉集合を与える． □

注 1.1. 局所コンパクト群に関するこの種の話題については，[Dix] の §§13.5～13.6 を参照せよ．

## 1.2 群の巡回的表現と対角的行列要素

**定義 1.3.** 位相群 $G$ の**ユニタリ表現** $\pi$ とは，Hilbert 空間 $V(\pi)$ があって，$g \in G$ に対し $V(\pi)$ 上のユニタリ作用素 $\pi(g)$ が対応し，

(U1) $\pi(e) = I$ (恒等作用素)，$\pi(g)\pi(h) = \pi(gh)$ $(g, h \in G)$；

(U2) $\forall v, w \in V(\pi)$ に対し，$G \ni g \mapsto \langle \pi(g)v, w \rangle \in \boldsymbol{C}$ (行列要素) が連続．

$\pi$ が**既約**とは，$V(\pi)$ の閉 $G$-不変部分空間が $V(\pi)$ または $\{0\}$ に限るとき． $\pi$ が**巡回的**（cyclic）とは，ある $v_0 \in V(\pi)$ が存在して，$\pi(G)v_0 := \{\pi(g)v_0 \,;\, g \in G\}$ が $V(\pi)$ で total であるとき．この $v_0$ を**巡回的ベクトル**といい，$(\pi, V(\pi), v_0)$ とも表す．

**命題 1.2.** $v \in V(\pi), \neq 0,$ に対応する対角的行列要素 $f_v(g) := \langle \pi(g)v, v \rangle$ $(g \in G)$，は正定値である．

$$\because \qquad \sum_{i,j} f_v(g_i^{-1} g_j) \overline{c_i} c_j = \Big\| \sum_j c_j \pi(g_j) v \Big\|^2 \geq 0. \qquad \square$$

◆ $\mathscr{F}(G)$ を $G$ 上の $\boldsymbol{C}$ 値関数で有限個の点を除いて 0 となるものの全体とし，$\varphi, \psi \in \mathscr{F}(G)$ に対し，

$$(\psi * \varphi)(g) := \sum_{h \in G} \psi(h) \varphi(h^{-1} g) = \sum_{h \in G} \psi(g h^{-1}) \varphi(h) \quad (g \in G), \tag{1.3}$$

とおくと，algebra (多元環) になる．$\varphi^*(g) := \overline{\varphi(g^{-1})}$ とおくと，$*$-algebra で， $\mathscr{F}(G) \cong \boldsymbol{C}[G]$（代数的群環）．

◆ $\pi(\varphi) := \sum_{g \in G} \varphi(g) \pi(g)$ とおくと，$*$-多元環の表現となる：

$$\pi(\psi * \varphi) = \pi(\psi)\pi(\varphi), \quad \pi(\varphi^*) = \pi(\varphi)^*.$$

◆ $G$ 上の関数 $f$ に対して，$\mathscr{F}(G)$ 上の汎関数 $f(\varphi) := \sum_{g \in G} f(g)\varphi(g)$ を定義する．次は，定義式 (1.1) を言い換えたものである．

**命題 1.3.** $G$ 上の関数 $f$ が正定値であるための必要十分条件は，$f$ が定義する $\mathscr{F}(G)$ 上の汎関数が正定値であること，すなわち，

$$f\big(\varphi^* * \varphi\big) \geq 0 \quad \big(\forall \varphi \in \mathscr{F}(g)\big).$$

◆ $G$ が局所コンパクト群のとき，$C_c(G)$ で台が compact な $G$ 上の連続複素数値関数全体とする．$G$ 上には，Haar 測度といわれる左不変測度と右不変測度が存在する．簡単のために，両側不変測度が存在するとして，その一つを $dg$ とする．$F_1, F_2, F \in C_c(G)$ に対し，演算

$$F_2 * F_1(g) := \int_G F_2(gh^{-1}) F_1(h)\, dh, \quad F^*(g) := \overline{F(g^{-1})}, \tag{1.4}$$

により，$C_c(G)$ は $*$-多元環になる．その表現が積分

$$\pi(F) := \int_G \pi(g) F(g)\, dg \quad \big(F \in C_c(G)\big) \tag{1.5}$$

によって得られる．

$G$ 上の連続関数 $f$ に対して, $C_c(G)$ 上の汎関数を $f(F) := \int_G F(g)f(g)dg$ によって定義する．次の定理は「積分と有限和との関係」を知った上での証明が必要である．

**定理 1.4.** $G$ 上の連続関数 $f$ が正定値であるための必要十分条件は，$f$ が定義する $C_c(G)$ 上の汎関数が正定値であること，すなわち，

$$f\big(F^* * F\big) \geq 0 \quad \big(\forall F \in C_c(g)\big).$$

## 1.3 Gelfand-Raikov 表現とそれからの重要な帰結

命題 1.2 とは逆に，群 $G$ 上の正定値関数 $f$ をとる．$f$ を（対角）行列要素とする巡回的表現 $\big(\pi_f, \mathfrak{H}_f, v_f\big)$ を作ることが出来る（Gelfand-Raikov）．

**(1)** $\varphi, \psi \in \mathscr{F}(G)$ の内積を

$$\begin{aligned}(\varphi, \psi)_f &:= \sum_{g,h \in G} f(h^{-1}g)\varphi(g)\overline{\psi(h)} \\ &= \sum_{g \in G} f(g) \sum_{h \in G} \psi^*(h)\varphi(h^{-1}g) \\ &= \sum_{g \in G} f(g)(\psi^* * \varphi)(g) = f(\psi^* * \varphi),\end{aligned} \tag{1.6}$$

とおくと， $\begin{cases} (\varphi,\varphi)_f \;\geq\; 0 & (\text{内積の非負定値性}), \\ \big(\tau(g_0)\varphi, \tau(g_0)\psi\big)_f & (\text{内積の左移動不変性}). \end{cases}$

ここに， $\tau(g_0)\varphi(g) := \varphi(g_0^{-1}g)$ （$g_0$ による左移動）.

**(2)** $\mathscr{F}(G)$ 上の非負定値内積 $(\cdot,\cdot)_f$ の核を $J_f$ とおくと，商ベクトル空間 $\mathscr{F}(G)/J_f$ 上に正定値内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_f$ を得る．それに関しての完備化を $\mathfrak{H}_f$ とする．$\varphi$ の商空間での像を $\varphi^f$ と書き，$v_f = \delta_e^f$ とおく（$\delta_e$ は単位元上に 1 を載せた $\delta$-関数）.

左移動 $\tau$ により核 $J_f$ は不変なので，$\tau$ から $\mathfrak{H}_f$ 上の表現 $\pi_f$ を得て，

$$\langle \pi_f(g_0)v_f, v_f\rangle_f = \big(\tau(g_0)\delta_e, \delta_e\big)_f = \big(\delta_{g_0}, \delta_e\big)_f = f(g_0). \tag{1.7}$$

**定理 1.5（Gelfand-Raikov の構成法）.**
$G$ の巡回的表現 $(\pi, V(\pi), v_0)$ に対して，$f(g) = \langle \pi(g)v_0, v_0\rangle$ とおく．このとき，$(\pi, V(\pi), v_0) \cong \big(\pi_f, \mathfrak{H}_f, v_f\big)$ [同値] である.

**証明.** $f(g) = \langle \pi(g)v_0, v_0\rangle$ を使って，対応 $v_0 \leftrightarrow v_f$ を意識しながら，上述の $(\pi_f, \mathfrak{H}_f, v_f)$ の構成法をなぞっていけば $(\pi, V(\pi), v_0)$ との同型が自然に得られる. □

**定理 1.6 ($\pi_f$ の既約性 [GR]).** $f \in \mathcal{P}_1(G)$ に対し，

$$\pi_f \text{ 既約} \iff f \in \mathrm{Extr}\big(\mathcal{P}_1(G)\big).$$

**証明.** Implication $\Longrightarrow$ は難しい方なので，そちらだけを示す.

$\pi_f$ 既約，とする．$f(g) = \langle \pi_f(g)v_f, v_f\rangle$，である.

$0 \ll f' \ll f$, すなわち，$f'$, $f - f' \gg 0$, とすると，$\varphi \in \mathscr{F}(G)$ に対し，

$$\langle\varphi,\varphi\rangle_{f'} = (\varphi,\varphi)_{f'} \leq (\varphi,\varphi)_f = \langle\varphi,\varphi\rangle_f = \langle \pi_f(\varphi)v_f, \pi_f(\varphi)v_f\rangle.$$

ゆえに，$\mathfrak{H}_f$ 上のある正定値作用素 $B$ が存在して，

$$\langle\varphi,\psi\rangle_{f'} = \langle B\pi_f(\varphi)v_f, \pi_f(\psi)v_f\rangle.$$

そして，

$$\begin{aligned} \langle \pi_f(g)B\pi_f(h)v_f, \pi_f(h)v_f\rangle &= \langle B\pi_f(h)v_f, \pi_f(g^{-1}h)v_f\rangle = f'\big((g^{-1}h)^{-1}h\big) \\ = f'(h^{-1}\cdot gh) &= \langle B\pi_f(gh)v_f, \pi_f(h)v_f\rangle = \langle B\pi_f(g)\pi_f(h)v_f, \pi_f(h)v_f\rangle. \end{aligned}$$

$\{\pi_f(h)v_f\,;\,h\in G\}$ は, $V(\pi_f)$ でtotal, ゆえに, $\pi_f(g)B=B\pi_f(g)$ $(g\in G)$.
$\pi_f$ 既約ゆえ, $B=\alpha I$ $\therefore f'=\alpha f$.
これで, $f$ が端点であることが分かった. □

**定義 1.4.** $G$ が十分沢山の既約ユニタリ表現を持つとは, “ $\forall g_0\in G,\neq e,$ に対して, ある既約ユニタリ表現 $\pi$ があって, $\pi(g_0)\neq I=\pi(e)$.”

注 **1.2.** 第2次世界大戦中の1943年にロシヤ語で発表された論文[GR]の以下の結果は,「無限次元ユニタリ表現」の必然的な登場を意味する, 非常に重要な結果であった. しかしながらなかなか西側や日本には伝わらなかった. その結果として Gelfand-Raikov の名前の代わりに Gelfand-Naimark-Segal の名前が優先されて, GNS construction と一般的には呼ばれている. 何ゆえか, 見事に Raikov の名前がネグられている. ここでは Gelfand-Raikov 表現と呼ぶことにする所以である.

**定理 1.7** (既約ユニタリ表現の十分性 **[GR, 1943, Theorem 7]**).
局所コンパクト群 $G$ は十分沢山の既約ユニタリ表現を持つ.

証明. **(1)** $f\in\mathrm{Extr}\big(\mathcal{P}_1(G)\big)$ に対して, $(\pi_f,\mathfrak{H}_f,v_f)$ を作れば, 既約で

$$f(g)=\langle\pi_f(g)v_f,v_f\rangle_f,\quad f(e)=\langle\pi_f(e)v_f,v_f\rangle_f,\ \pi_f(e)=I,$$

であるから, $f(g)\neq f(e)$ ならば, $\pi_f(g)\neq I=\pi_f(e)$. 従って, $f(g_0)\neq f(e)$ となる端的な連続正定値関数 $f$ の存在を言えばよい.

**(2)** $V$ を $e$ の compact な近傍で, $g_0\notin V$ とする. さらに, $W\subset V$ を $e$ の開近傍で $W^{-1}W\subset V$ となるものを取る. $\varphi=\varphi_W$ を

$$W\text{ の外側で }0,\quad 0\le\varphi(h)\le1,\quad \varphi(e)=1,$$

となるものとする (その存在は compact 集合の一般的性質).

$$\psi=\varphi^* * \varphi,\quad \psi(g)=\int_G\varphi^*(h)\varphi(h^{-1}g)\,dh,$$

とおくと, $\mathrm{supp}(\psi)\subset W^{-1}W\subset V$, $\psi(g_0)=0$, $\psi(e)=\int_G\varphi(h^{-1})^2\,dh>0$,

で，$\psi \gg 0$. 実際，

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} f(g_i^{-1}g_j)\overline{c_i}c_j = \int_G |F(h)|^2 dh \ \geq\ 0,\ \ F(h) := \sum_{1\leqslant i\leqslant n} c_i\varphi(h^{-1}g_i).$$

**(3)** 上の（端的ではない）正定値関数 $\psi$ の存在から **(1)** の要求する（端的な）$f$ の存在を言うのは，かなり複雑で，[GR] の Theorems 5, 6 が必要である（それは原論文で 3 頁あるので省略する）. □

## 1.4 コンパクトでない局所コンパクト群のユニタリ表現

**定理 1.8.** $G$ を古典群

$$SL(n,K)\ (n\geq 2),\ Sp(2n,K)\ (n\geq 1)\ [K=\boldsymbol{R},\boldsymbol{C}]\,;\ SO(n,\boldsymbol{C})\ (n\geq 3),$$

のどれかとすると，$G$ の有限次元既約ユニタリ表現は 1 次元の自明表現 $\mathbf{1}_G$ だけである.

証明. $G$ の部分群で，$SL(2,K)$ または $PSL(2,K)$ と同型になるものの集合は，$G$ を生成する．従って，定理の主張を $G=SL(2,K)$ のときに証明すればよい．このとき，$t\in\boldsymbol{R}$, $x,y\in K$ に対して，

$$a(t)=\begin{pmatrix} e^t & 0\\ 0 & e^{-t}\end{pmatrix},\quad g_x=\begin{pmatrix} 1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad h_y=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ y & 1\end{pmatrix},$$

とおくと，$\{g_x,\,h_y\,;\,x,y\in K\}$ は $G$ を生成する．他方，$e$ を単位元として，

$$\text{(1.8)}\qquad \begin{cases} a(t)g_xa(t)^{-1}=g_{e^{2t}x}\to e & (t\to-\infty),\\ a(t)h_ya(t)^{-1}=h_{e^{-2t}y}\to e & (t\to\infty).\end{cases}$$

ここで，$\pi$ を有限次元既約ユニタリ表現とする．$\pi\big(a(t)\big)$ $(t\in\boldsymbol{R})$ は $\boldsymbol{R}$ の有限次元ユニタリ表現であるから，対角化できて，対角要素は

$$e^{i\mu_j t}\ (1\leq j\leq d=\dim\pi,\ \mu_j\in\boldsymbol{R}),\ \ \pi\big(a(t)\big)=\mathrm{diag}(e^{i\mu_1 t},e^{i\mu_2 t},\ldots,e^{i\mu_d t}).$$

そこで，$A=(a_{kl})_{1\leq k,l\leq d}:=\pi(g_x)$ とおくと，(1.8) 第 1 式より，$\forall k,l$ に対して，

$$e^{i\mu_k t}a_{kl}\,e^{-i\mu_l t}\to\delta_{kl}\quad (t\to-\infty).$$

従って，$a_{kl} = \delta_{kl}$ $(\forall k, l)$, ゆえに，$\pi(g_x) = E_d$ ($d$ 次元単位行列), となる．$\pi(h_y)$ についても，(1.8) 第 2 式より，同様にして，$\pi(h_y) = E_d$ を得る．かくて，$\pi(g) = E_d$ $(\forall g \in G)$ となり，$\pi$ の既約性から $d = 1$, $\pi = \mathbf{1}_G$ を得る． □

**注 1.3.** すぐ分かるように，上の定理の主張はもっと一般の，次の条件を満たす $G$ について成立する．実際，上の証明がそのまま適用する：

**条件 1.1.** $G$ はその部分群で，$SL(2, K)$, $PSL(2, K)$ $(K = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C})$ のどれかと同型なものの集合で生成される．

**例 1.4.** $K$ 上の連結半単純リー群 $G$ で，そのリー環の単純成分がまた半単純な（すなわち，0 以外の可解イデアルを持たない）ものは，上の条件 1.1 を満たす．

**定理 1.9.** $G$ を条件 1.1 を満たす局所コンパクト群とする．このとき，$G$ の有限次元表現の行列要素は $L^2$ ではない．

**証明.** 定理 1.8 に訴える，帰謬法による間接的な証明を与える．

$G$ 上の左移動で不変な Haar 測度を $d\mu_l(g)$ $(g \in G)$ とする．有限次元ユニタリ表現 $\pi$ をとる．$v, w \in V(\pi), \neq 0$, に対して，行列要素 $f(g) = f_{v,w}(g) := \langle \pi(g)v, w \rangle$ が $L^2$ であると仮定する．すなわち，

$$\|f\|_{L^2}^2 := \int_G |f(g)|^2 \, d\mu_l(g) \; < \; \infty,$$

とする．このとき，$w' = \pi(g_0)w$, $(g_0 \in G)$ をとると，その行列要素は，

$$\begin{aligned}\langle \pi(g)v, w' \rangle &= \langle \pi(g)v, \pi(g_0)w \rangle = \langle \pi({g_0}^{-1})\pi(g)v, w \rangle \\ &= \langle \pi({g_0}^{-1}g)v, w \rangle = f({g_0}^{-1}g) = \big(\tau(g_0)f\big)(g),\end{aligned}$$

であって，$\int_G |f({g_0}^{-1}g)|^2 \, d\mu_l(g) = \int_G |f(g)|^2 \, d\mu_l(g)$ となる．

従って，$\{\tau(g_0)f \,;\, g_0 \in G\}$ は次元が $\dim \pi$ 以下の有限次元関数空間 $W$ を張り，その上で $\varphi \mapsto \tau(g_0)\varphi$ $(\varphi \in W)$ がユニタリ表現を与える．このユニタリ表現は有限次元なので，有限個の既約表現の直和に分解される．

他方，$G$ の既約ユニタリ表現は $\mathbf{1}_G$ に限る（定理 1.8）ので，$\tau(g_0)f = f$ $(\forall g_0 \in G)$ を得る．よって，$f$ は $G$ 上の定数関数となり，もとの表現 $\pi$

は $\mathbf{1}_G$ の重複となる.

ところが，Haar 測度の性質として，次が示される：

$$(\star) \qquad \mu_l(G) = \int_G 1\, d\mu_l(g) < \infty \overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow} G\text{ コンパクト}.$$

従って，$\pi$ が $\mathbf{1}_G$ の重複になることはない．矛盾. □

◆ **A. Weil の述懐.**

（Gelfand-Raikov の仕事 [GR] の重要性に関連することであるが,）

Weil はその著作集の最後に付加した Commentaire（各論文・著作についてコメントを書いたもの）において，著書 [Wei, 1940] についてのコメントの後半で次のように（後悔を込めて）述懐している.

………. Je l'avais entrepris surtout avec l'espoir d'ouvrir la voie à une géngéralisation de la théorie des représentations des groupes finis et des groupes compacts; non seulement je n'atteignis pas la terre promise des représentations de dimension infinie, mais je m'arraêtai avant même de l'entrevoir. Je me décourageai trop tôt quand je vis que les coefficients des représentations de degré fini des groupes de Lie simples non compacts ne sont pas de carré intégrable; cela empêche, si on propose d'explorer les représentaions dans $L^2$, d'avancer du connu vers l'inconnu. ……

（註．第 1 行の l'=le=l'ouvlage [Wei]．和訳は文献 [杉浦] 参照.）

## 1.5 凸集合と端点集合，積分表示と群表現の既約分解

凸集合 $K$ の端点集合 $K_e$ は，$K$ の位相的な境界のごく一部である（定義 1.2 の図参照）が，$K$ の確率論的なもしくは調和関数的な「境界」である．この「境界」は群や均質空間上の調和解析に於いても重要な役割を果たす.

**Krein-Milman Thereom ([KM, 1940]).**

*Let $X$ be a locally convex topological vector space (assumed to be Hausdorff), and let $K$ be a compact convex subset of $X$. Then, $K$ is the closed convex hull of its extremal points $K_e$.*

**証明の要点.** $K$ の端点が十分沢山存在することを示すこと. □

**Choquet-Bishop-de Leeuw Theorem ([BiLe,1959], Theorem 5.6).**
$K$ を実局所凸位相ベクトル空間のコンパクト凸部分集合とする. $\mathscr{S}$ を $K_e$ と $K$ の Baire 集合族から生成される $\sigma$-加法族とする. このとき, 任意の $x \in K$ に対して, $\mathscr{S}$ 上の測度 $\mu_x$ で, $\mu_x(K_e) = \mu_x(K) = 1$, となるものが存在して, $x$ は次のように表示される :

$$x = \int_K y \, d\mu_x(y). \tag{1.9}$$ □

**注 1.4.**
**(1)** 定理の主張は, すなわち,「$K$ の任意の点 $x$ は $K_e$ 上に台を持つ, ある確率測度の重心である.」

**(2)** Baire 集合族とは compact $G_\delta$ 集合族から生成される $\sigma$-加法族.

**(3)** 端点集合 $K_e$ は, $K$ の部分集合として, Baire 集合とは限らない変なものも有り得るので, とくに $K_e$ を Baire 集合族に添加して可測集合族 $\mathscr{S}$ を構成している.

**(4)** 上の定理は, G. Choquet が, 距離付け可能な凸集合 $K$ に対して示した結果 [Cho, 1956] の一般化である.

**Choquet-Bishop-de Leeuv Theorem の応用.**

**(1)** $G$ の各種のユニタリ表現の**既約分解**を求める際に応用できる. 例えば, 一般の GR 表現 $\pi_f$ の既約分解など. 離散群もしくは半単純リー群 $G$ の $\ell^2(G)$ もしくは $L^2(G)$ 上の正則表現は, 単位元 $e$ に載る $\delta_e$ を $f$ としたときの $\pi_f$ と捉えられるが, その既約分解は, $f \in K_1(G)$ を確率論的境界 $\mathrm{Extr}\big(K_1(G)\big)$ の上で積分表示することに当たる.

**(2)** 後述するように, 既約指標は $G$ 上の(正規化された)連続不変正定値関数全体 $K_1(G)$ の端点と捉えられる. $\mathrm{Extr}\big(K_1(G)\big)$ を決定する際には, 何らかの手段で求められた $K_1(G)$ の端点の集合が**完全である**ことを示すときに, 表示式 (1.9) が成立するか否かで検証する.

# 2 不変正定値函数と既約指標

## 2.1 GR 表現 $\pi_f$ の関数空間上での実現

$\pi_f$ を $G$ 上の関数空間（行列要素の空間）で書いてみよう．

$$\Phi:\ \mathfrak{H}_f \ni v \longmapsto \varphi_v(g) := \langle \pi_f(g)v, v_f\rangle_f = \langle v, \pi_f(g^{-1})v_f\rangle_f$$

は $\mathfrak{H}_f$ から関数空間 $\mathfrak{F}_f := \Phi(\mathfrak{H}_f)$ への 1-1 写像であり，$\pi_f(g_0)$ は右移動になる： $\Phi$ により，

$$\begin{array}{ccc} v & \overset{\Phi}{\longmapsto} & \varphi(g), \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \qquad (\downarrow \text{ は } g_0 \text{ による変換}) \\ \pi_f(g_0)v & \overset{\Phi}{\longmapsto} & \varphi(gg_0) \end{array}$$

左側の縦列は $\pi_f(g_0)$ での変換，右側の縦列は $\mathfrak{F}_f$ 上の $g_0$ による左移動．

◆ **有限次元既約表現と GR 表現.**

例として，有限次元既約ユニタリ表現 $g \mapsto U(g) = \big(u_{ij}(g)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant d}$，$d = \dim U$, をとる．このとき，対角行列要素 $u_{ii}$, $1 \le i \le d$, はそれぞれ正定値で正規，すなわち，$u_{ii} \in \mathcal{P}_1(G)$．さらにこれは端点である．$f = u_{ii}$ に対する GR 表現 $\pi_f$ を関数空間 $\mathfrak{F}_f$ 上で見てみよう．まず，$\mathfrak{F}_f$ は次の関数で張られる：

$$u_{ii}(gg_0) = \sum_{1\leqslant j\leqslant d} u_{ij}(g)u_{ji}(g_0), \quad g_0 \in G.$$

右辺は，$U(g)X$ の $(i,i)$ 要素である．ここに，$X = \sum_{1\leqslant j\leqslant d} c_j U(g_j)$ は定数行列．ところが，$U$ が既約なので，$X$ としては任意の $M(d, \boldsymbol{C})$ の元が現れるので，$\sum_j u_{ij}(g)x_{ji}$ ($i$ は固定) を拾っていくと，次が分かる：

**定理 2.1.** (i) $f = u_{ii}$ に対して，$\mathfrak{F}_f$ は行列 $U = (u_{kl})_{1\leqslant k,l\leqslant d}$ の第 $i$ 行要素 $u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{id}$ を基底に持つ関数空間 $\mathfrak{U}_i$ である．この基底に関して表現 $\pi_f(g_0)$ は次の形に書ける：

$$\big(u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{id}\big) \longrightarrow \big(u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{id}\big)U(g_0)$$

(ii) $f = \sum_{1\leqslant i\leqslant d} \lambda_i u_{ii}$, $\lambda_i \ge 0$, $\sum_i \lambda_i = 1$, に対しては，

$$\mathfrak{F}_f = \bigoplus_{i:\lambda_i>0} \mathfrak{U}_i \ \text{ の上に，} U \text{ の } \sharp\{i\,;\,\lambda_i > 0\} \text{ 個の直和が働く．}$$

**定義 2.1.** $G$ の有限次元表現 $U$ の**指標**とは,

$$\chi_U(g) := \mathrm{tr}\big(U(g)\big) = \sum_{1\leqslant i\leqslant d} u_{ii}(g) \tag{2.10}$$

であり, $\widetilde{\chi}_U(g) := \dfrac{1}{\dim U}\chi_U(g)$ を**正規化された指標**という : $\widetilde{\chi}_U(e)=1$.

このとき, $\chi_U$ は $G$ 上の**不変**正定値関数である.

**記号 2.1.** $K(G) := \{f \in \mathcal{P}(G)\,;\, f$ は不変$\}$ = 不変正定値関数の全体,
$K_{\leqslant 1}(G) := \{f \in K(G)\,;\, f(e) \le 1\}$,
$K_1(G) := \{f \in K(G)\,;\, f(e) = 1\}$.

$\chi_U \in K(G)$, $\widetilde{\chi}_U \in K_1(G)$ である.
$K_1(G)$ の端点を $G$ の(括弧付きの)「指標」と呼ぶ [HH2].

**定義 2.2.** $G$ のユニタリ表現 $\pi$ が**因子表現**であるとは, $\pi(G)=\{\pi(g)\,;\,g\in G\}$ の生成する作用素環の中心がスカラー作用素 $\alpha I$ だけからなっていることを意味する.

**定理 2.2.** $G$ をコンパクト群とする.

(i) 因子表現 $\pi$ は既約表現の multiple である. そのとき,

$\pi$ 巡回的である $\Longleftrightarrow$ 重複度 $\le d = \dim\pi$.

(ii) $\mathrm{Extr}\big(K_1(G)\big)$ は正規化された既約指標の全体である.

(iii) $dg$ を正規化された $G$ 上の Haar 測度 ( $\int_G 1\,dg = 1$ ) とすると,

$$\pi \text{ 既約のとき,}\quad \int_G |\chi_\pi(g)|^2\,dg = 1, \text{ i.e., }\quad \|\chi_\pi\|_{L^2(G)} = 1.$$

(iv) $G$ 不変関数からなる $L^2(G;dg)$ の部分空間を $L^2(G;dg)^G$ と書くと, 既約指標の全体は, $L^2(G;dg)^G$ の完全正規直交基底をなす.

## 2.2 有限群の場合, とくに Frobenius の $\mathfrak{S}_n$, $\mathfrak{A}_n$ に関する結果

**定理 2.3.** $G$ 有限群, $\widehat{G} :=$ 既約表現 $\pi$ の同値類 $[\pi]$ の全体.

(i) 既約表現の同値類の個数は $G$ の共役類の個数.

(ii) $$\sum_{[\pi]\in\widehat{G}} (\dim\pi)^2 = |G|.$$

◆ Frobenius の既約指標の方程式 [F53, 1896].

$\mathscr{F}(G)$ の不変関数からなる部分環を $\mathscr{F}(G)^G$ と書くと，これは可換環になる： $\varphi*\psi=\psi*\varphi\ \left(\varphi,\psi\in\mathscr{F}(G)^G\right)$.

その構造定数は共役類の個数等で計算可能．関数 $f$ に対して，汎関数

$$f(\varphi):=\sum_{g\in G} f(g)\varphi(g), \quad \mathscr{F}(G)^G\ni\varphi\mapsto f(\varphi)\in \boldsymbol{C},$$

を与える．

**定理 2.4** ([F53, 1896] の結果の１つを現代風に述べる)．有限群 $G$ に対し，

$$\text{正規化された既約指標 } f \overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow} f(\varphi) \text{ は可換環 } \mathscr{F}(G)^G \text{ の準同型.}$$

Frobenius は群の表現論を創始する第１論文 [F53] でまず指標を論じた．

**(1)** 上式の右辺を構造定数を使って，連立方程式に書き，その解を Charakter と呼んだ．現代の用語では“既約指標”のことである．

**(2)** この方程式の解の個数が丁度共役類の個数に等しいことも示した．

**(3)** 具体例も計算した．

◆ **$\mathfrak{S}_n, \mathfrak{A}_n$ の既約表現と既約指標.** Frobenius [F60, 1900], [F61, 1901]

$G=\mathfrak{S}_n$ **の場合.**

$$n \text{ の分割 } \boldsymbol{\lambda}=(\lambda_j)_{1\leqslant j\leqslant m},\ \lambda_1\geq\lambda_2\geq\ldots\geq\lambda_m,\ \sum_{1\leqslant j\leqslant m}\lambda_j=n,$$

に対応する特別の形の Frobenius-Young 部分群

(2.11) $$H=\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\lambda}}:=\mathfrak{S}_{\lambda_1}\times\mathfrak{S}_{\lambda_2}\times\cdots\times\mathfrak{S}_{\lambda_m}\subset\mathfrak{S}_n=G,$$

の自明表現 $\mathbf{1}_H$ を $G$ に誘導して，$\mathrm{Ind}_H^G\mathbf{1}_H$ の trace を計算して指標を求める．

**定理 2.5 [F60].** $H=\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\lambda}}$ たちに $\boldsymbol{\lambda}$ の逆辞書式順序による全順序を付けておき，その順序に従って，$\mathrm{Ind}_H^G\mathbf{1}_H$ の“トップ既約成分” $\pi_{\boldsymbol{\lambda}}$ を拾っていけば，$G=\mathfrak{S}_n$ の既約表現の完全代表元系が得られる．

$\boldsymbol{\lambda}$ を Young 図形 $D_{\boldsymbol{\lambda}}$ で表し，おおきさ $n$ の Young 図形の全体を $\boldsymbol{Y}_n$ とおけば，双対 $\widehat{\mathfrak{S}_n}$ は $\boldsymbol{Y}_n$ でパラメター付けされる． □

これによって，トップ既約成分の指標を逐次的に求めていけばよい．そのやり方を2種類与えた．

**$G_0 = \mathfrak{A}_n$ の場合．**

$G_0 = \mathfrak{A}_n$ は $G = \mathfrak{S}_n$ の指数2の正規部分群である．$G/G_0 \cong \boldsymbol{Z}_2$ に非自明指標が sgn である．上で与えた既約表現 $\pi_{\boldsymbol{\lambda}}$ に対して，$\mathrm{sgn}\cdot\pi_{\boldsymbol{\lambda}}$ をその随伴表現という．$\boldsymbol{\lambda}$ を Young 図形 $D_{\boldsymbol{\lambda}}$ で表し，$D_{\boldsymbol{\lambda}}$ の転置を $D_{\boldsymbol{\mu}}$, $\boldsymbol{\mu} = {}^t\boldsymbol{\lambda}$, と書くと，

$$\mathrm{sgn}\cdot\pi_{\boldsymbol{\lambda}} \cong \pi_{\boldsymbol{\mu}}, \quad \boldsymbol{\mu} = {}^t\boldsymbol{\lambda},$$

である．「指数2の部分群への表現の制限」の一般論を用いて，次を得る．

**定理 2.6.** (i) $\mathfrak{S}_n$ の既約表現 $\pi_{\boldsymbol{\lambda}}$, $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{Y}_n$, を部分群 $\mathfrak{A}_n$ に制限したとき，次のようになる：

$$\begin{cases} \rho_{\boldsymbol{\lambda}} := \pi_{\boldsymbol{\lambda}}|_{\mathfrak{A}_n} \ \text{は既約}, & \boldsymbol{\lambda} \neq {}^t\boldsymbol{\lambda} \ \text{のとき}, \\ \pi_{\boldsymbol{\lambda}}|_{\mathfrak{A}_n} \cong \rho_{\boldsymbol{\lambda}}^{(0)} \oplus \rho_{\boldsymbol{\lambda}}^{(1)},\ \rho_{\boldsymbol{\lambda}}^{(0)} \not\cong \rho_{\boldsymbol{\lambda}}^{(1)} \ \text{既約}, & \boldsymbol{\lambda} = {}^t\boldsymbol{\lambda} \ \text{のとき}. \end{cases}$$

(ii) $\mathfrak{A}_n$ の双対 $\widehat{\mathfrak{A}_n}$ の完全代表元系およびそのパラメーター空間 $\boldsymbol{Y}_n^{\mathfrak{A}}$ は次のように作られる．まず，

$$\boldsymbol{Y}_n^{\mathfrak{A}} := \boldsymbol{Y}_n^{\mathrm{nsym}} \bigsqcup \big(\boldsymbol{Y}_n^{\mathrm{sym}} \times \{0,1\}, \qquad \begin{cases} \boldsymbol{Y}_n^{\mathrm{nsym}} := \{\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{Y}_n\,;\ {}^t\boldsymbol{\lambda} \neq \boldsymbol{\lambda}\}, \\ \boldsymbol{Y}_n^{\mathrm{sym}} := \{\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{Y}_n\,;\ {}^t\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}\}. \end{cases}$$

とおく．そして，$M = (\boldsymbol{\lambda}, \kappa) \in \boldsymbol{Y}_n^{\mathrm{sym}} \times \{0,1\}$ に対して，$\rho_M := \rho_{\boldsymbol{\lambda}}^{(\kappa)}$ とおけば，次の集合が双対 $\widehat{\mathfrak{A}_n}$ の完全代表元系を与える：

$$\{\rho_{\boldsymbol{\lambda}}\,;\ \boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{Y}_n^{\mathrm{nsym}}\} \bigsqcup \{\rho_M\,;\ M \in \boldsymbol{Y}_n^{\mathrm{sym}} \times \{0,1\}\}. \qquad \square$$

[Frobenius の表現論に関する業績に付いては，[平井 3]〜[平井 6] に詳しい解説がある．]

## 2.3 有限群のスピン表現の場合，とくにSchurの結果

**定義2.3.** $G$のスピン表現（射影表現）$\pi$ とは

$$\pi(g)\pi(h) = r_{g,h}\pi(g) \ \ (g, h \in G, \ \exists\, r_{g,h} \in \boldsymbol{C}^{\times}).$$

対応 $g \longmapsto \pi(g)$ は，$G$から $PGL(n, \boldsymbol{C}) = GL(d, \boldsymbol{C})/\boldsymbol{C}^{\times}I$ への準同型を導く．（また，$\pi$ は実質的には，$G$ の多価表現と言っても良い．）

◆ Schurのスピン表現の一般論．

論文 Schur [S4, 1904], [S10, 1907] において，Schur は次のようなことを証明した．

**(1)** 有限群$G$に対して，有限指数の中心拡大$G'$（$G$の被覆群ともいう）

$$1 \longrightarrow Z \longrightarrow G' \longrightarrow G \longrightarrow 1 \quad (Z \text{ は } G' \text{ の中心に入る}),$$

で，「$G$の任意のスピン表現は$G'$のある線形表現からくる」という性質を持つものがある． □

こうした$G'$のうち位数最小のものを，$G$の**表現群**と呼ぶ．

**(2)** $G$の表現群は，同型を除けば，有限個存在する．それらに対する中心的部分群$Z$は共通である．それを$\mathfrak{M}(G)$と書き，Schurの multiplier と呼ぶ．（現代の記号で書けば）$\mathfrak{M}(G) = H^2(G, \boldsymbol{C}^{\times})$． □

◆ 対称群 $\mathfrak{S}_n$, 交代群 $\mathfrak{A}_n$ のスピン既約表現とスピン既約指標．

論文 [S16, 1911] において，Schur は$G = \mathfrak{S}_n, \mathfrak{A}_n$ に対して，

**(3)** $G$ の表現群を構成し，

**(4)** ある一つの表現群（$\widetilde{G}$と書く）を取り上げて，その既約線形表現で下の群 $G$ からは来ていないもの（それが$G$の既約スピン表現）を具体的に構成し，その指標を計算した．

こうして，2重被覆群$\widetilde{\mathfrak{S}}_n$のスピン既約表現とスピン既約指標が求められたのだが，詳しくは（原論文[S16]は読みにくいので）日本語による解説 [平井 7], [平井 10], もしくは英語による解説 [HHH2] を参照されたい．

Schurは彼のお師匠さんである Frobenius の線形表現の結果の粗筋（定理2.5, 定理2.6など）を，舞台をスピン表現に写してスピン表現について

追求しているとも言える．勿論，難しさは格段に増えていて，それ故原論文は難読である．

## 2.4 コンパクト群の場合，とくに古典群に関するWeylの結果

◆ H. Weylの古典群の既約表現と既約指標 (1925–26)

複素古典群 $SL(n,\boldsymbol{C})$, $SO(2n{+}1,\boldsymbol{C})$, $Sp(2n,\boldsymbol{C})$, $SO(2n,\boldsymbol{C})$ の有限次元（正則）既約表現は自然表現のテンソル積を分解すれば得られる．

その指標は，別途計算するが，unitarian trick によって，コンパクト実形である $SU(n)$, $SO(2n{+}1)$, $USp(2n)$, $SO(2n)$ に移行することによって，Weyl の分母公式，指標公式，次元公式，等が得られた．

## 2.5 実半単純リー群の場合，Gelfand学派，Harish-Chandra ほか

一般に，リー群 $G$ の表現 $\pi$ の指標は，第1段として，超函数 (distribution) として定義される：

$$f = \chi_\pi : \ \mathscr{D}(G) = C_c^{(\infty)}(G) \ni \varphi \longmapsto f(\varphi) := \mathrm{tr}\big(\pi(\varphi)\big) \in \boldsymbol{C},$$

$\pi$ を既約と仮定しても，実際にこれが超函数として，存在し得るかどうかは $G$ の性質に依る．例えば，$G$ が連結，冪零であれば，状況は良好である (Dixmier, Killirov)．ところが，$G$ が可解になった途端，状況は不良になり，超函数の意味でも指標が存在しないことも普通である (Dixmier, Auslander-Kostant, 藤原英徳，ほか)．

目下ここで，問題にしている，連結な半単純リー群の場合には，個別の行列群などについてはGelfand達のロシヤ学派の研究が先行したが，一般論を打ち立てたのは，主として Harish-Chandra である．それによると，

◆ 群が連結，半単純なとき，上の超函数は存在するだけでなく，さらに群上の不変微分作用素 (Laplacians) の固有超函数であることが分かる．とくに，楕円型の Laplacian $\Delta$ があって，

$$\Delta f = \lambda f$$

であることから，$f$ が piecewise に実解析的であることが分かる（Harish-Chandra）.

◆ 半単純リー群 $G$ が離散系列の既約表現（すなわち，行列要素が $L^2(G)$ に入る）を持つための必要十分条件は $G$ がコンパクト Cartan 部分群 $H_0$ を持つことであり，$H_0$ 上での指標の形は Weyl の指標公式に似た形で特定できる（Harish-Chandra）.

この離散系列の既約表現の指標は，$H_0$ 上の具体形から出発して，他の Cartan 部分群上の具体形を（もとの離散系列表現を構成しなくても）微分方程式等の計算だけで決定出来た [Hir1, 1981]. 非常に複雑な計算であった.

# 3 局所有限な離散無限群の場合

有限群 $G_n$ の列 $G_1 \hookrightarrow G_2 \hookrightarrow \cdots G_n \hookrightarrow \cdots$ の射影極限 $G_\infty := \lim_{n\to\infty}$ を Kerov に従って，**局所有限な群**という. これは以下に述べるような調和解析的・確率論的な研究において重要な対象をなすカテゴリーである.

## 3.1 Thoma による無限対称群 $\mathfrak{S}_\infty$ の指標

◆ 離散無限群 $G$，とくに $G = G_\infty$，の端的（extremal）不変正定値関数，$\mathrm{Extr}\big(K_1(G)\big)$ の元，は $\mathfrak{S}_\infty$ の $\mathbf{II}_1$ **型因子表現**の指標と同一視出来る [HH2, 2005].

◆ Thoma は論文 [Th, 1964] において，無限対称群 $\mathfrak{S}_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{S}_n$ に対して，その「(正規化された) 指標」，すなわち，$\mathrm{Extr}\big(K_1(\mathfrak{S}_\infty)\big)$ の元をすべて計算した. それは次のように記述される. $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ は互いに素な巡回置換 $\sigma_j$ たちの積に (積の順序を除いて) 一意的に分解される： $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_m$. 巡回置換 $\tau = (i_1\ i_2\ \cdots\ i_p)$ に対して，$\ell(\tau) := l$ とおく. $\tau$ **の長さ**という.

**定理 3.1 [Th, 1964].** $\alpha = (\alpha_i)_{i\in N}$, $\beta = (\beta_i)_{i\in N}$ を非負実数の減少列

(3.12) $\qquad \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots, \quad \beta_1 \geq \beta_2 \geq \ldots,$ ただし，$\|\alpha\| + \|\beta\| \leq 1,$

とする．ここに，$\|\alpha\| := \sum_{i\in N} \alpha_i$．$\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_m \in \mathfrak{S}_\infty$ に対し，

$$
(3.13)\qquad \begin{cases} f_{\alpha,\beta}(\sigma) := f_{\alpha,\beta}(\sigma_1)f_{\alpha,\beta}(\sigma_2)\cdots f(\sigma_m), \\ f_{\alpha,\beta}(\sigma_j) := \sum_{i\geqslant 1} \alpha_i^{\ell_j} + (-1)^{\ell_j-1}\sum_{j\geqslant 1}\beta_j^{\ell_j}, \quad \ell_j := \ell(\sigma_j), \end{cases}
$$

とおくと，これは群 $\mathfrak{S}_\infty$ 上の指標である．さらに，任意の $\mathfrak{S}_\infty$ 上の（正規化された）指標は，$f_{\alpha,\beta}$ の形である． □

$\gamma := 1 - (\|\alpha\| + \|\beta\|)$ とおくと，$\|\alpha\| + \|\beta\| + \gamma = 1$ となり，これは $\boldsymbol{Z}$ 上の確率測度を与える．$(\alpha, \beta, \gamma)$ は Thoma パラメーターと言われる．これをもとに $\mathfrak{S}_\infty$ に関する話題（例えば，下の §3.2）が研究された．

1964 年の Thoma の結果以来，何故か $\mathfrak{S}_\infty$ 以外の局所有限群に対する研究は進まなかった．しかし，2002 年になってようやく [HH1] で他の無限型 Weyl 群等に対して上の定理と同等の結果が得られた．

この拡張の基礎になったのは，上の指標公式の次のような書き換えである．群 $\mathfrak{S}_\infty$ の 1 次元指標は 2 個あるが，記号

$$
\chi_\varepsilon(\sigma) := \big(\mathrm{sgn}_{\mathfrak{S}}(\sigma)\big)^\varepsilon \ \ (\sigma \in \mathfrak{S}_\infty); \quad \alpha_{0,i} = \alpha_i\,,\ \ \alpha_{1,i} = \beta_i\,,
$$

$(\varepsilon = 0, 1\,; i = 1, 2, \ldots)$, を導入すると，$\mathrm{sgn}_{\mathfrak{S}}(\sigma_j) = (-1)^{\ell(\sigma_j)-1}$, であり，公式 (3.13) は次のように書き換えられる：

$$
(3.14)\qquad f_{\alpha,\beta}(\sigma) = \prod_{1\leq j\leq m}\left(\sum_{\varepsilon=0,1}\chi_\varepsilon(\sigma_j)\sum_{i\in N}(\alpha_{\varepsilon,i})^{\ell(\sigma_j)}\right).
$$

## 3.2 $\mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_\infty$ $(n \to \infty)$ の極限移行

◆ $n \to \infty$ **の確率論的極限移行．**

Vershik-Kerov [VK, 1982], Biane [Bia, 1996] ほか．

$\mathfrak{S}_\infty = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{S}_n$ に対して，極限移行途中の $\mathfrak{S}_n$, $n \nearrow \infty$, の既約指標

$$
\chi_{\boldsymbol{\lambda}^n},\ \boldsymbol{\lambda}^n = (\lambda_i^n)_{1\leqslant i\leqslant t_n} \in \boldsymbol{Y}_n,\ \lambda_1^n \geq \lambda_2^n \geq \ldots \geq \lambda_{t_n}^n > 0,
$$

を正規化したものを $\widetilde{\chi}_{\boldsymbol{\lambda}^n}$ とする．

**(1)** $\boldsymbol{\lambda}^n$ の Young 図形の成長に沿って，極限値を持つ様子や，極限値の意味が解明された．

**(2)** $\mathfrak{S}_\infty$ の「指標」はすべてこの形の極限として得られる．

**(3)** とくに，注目すべきは [VK] により，$\mathfrak{S}_\infty$ の極限指標

$$f_{\alpha,\beta}(\sigma) = \lim_{\boldsymbol{\lambda}^n \nearrow} \widetilde{\chi}_{\boldsymbol{\lambda}^n}(\sigma) \quad \sigma \in \mathfrak{S}_n), \tag{3.15}$$

のパラメーター $\alpha_i, \beta_i$ が「$\boldsymbol{\lambda}^n \nearrow$ の増大の仕方の違いででどのように現れてくるか」が図形的，確率論的に説明されたことである．

**定理 3.2 [VK].** ${}^tD_{\boldsymbol{\lambda}^n} = D_{\boldsymbol{\mu}^n}$, すなわち，$\boldsymbol{\mu}^n = {}^t\boldsymbol{\lambda}^n$, とすると，$\boldsymbol{\lambda}^n$ が条件

$$\alpha_i = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_i^n}{\sqrt{n}}, \quad \beta_i = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_i^n}{\sqrt{n}} \quad (i \in \boldsymbol{N}), \tag{3.16}$$

を満たすように増大するとき，極限関係 (3.15) が成立する． □

さらに，極限移行の状況を確率論的にいろいろ調べている．この話題は「増大する分岐グラフ」の理論へと成長した．

そして，洞彰人氏との最近の共著論文 [HoHH, 2008], [HoH, 2014] の研究へと繋がっている．

### 3.3 $\mathfrak{S}_\infty$ の既約ユニタリ表現の構成，ノルム関数 $f$ の対応する GR 表現

離散無限群 $G$ には，既約指標は存在しないが，$\mathrm{II}_1$ 型因子表現の指標は存在する．

◆ 論文 [Hir2, 1990].

一般の離散無限群 $G$ に対して，その部分群 $H$ とその既約表現 $\pi_H^\beta$ ($\beta \in \mathfrak{B}_H$) の族 $\mathfrak{A}_G$ に対して，

**(1)** 誘導表現 $\Pi_{H,\beta} := \mathrm{Ind}_H^G \pi_H^\beta$ が既約になる条件，

**(2)** これらの既約な誘導表現の間の同値・非同値の関係の解析，

を出来るだけ，応用可能な形でまとめた．

◆ 論文 [Hir3, 1991].

上の一般論を $G=\mathfrak{S}_\infty$ に適用して，役に立つ部分群 $H$ とその既約表現 $\pi_H^\beta$ の族 $\mathfrak{A}_G$ を発見して，$\mathfrak{S}_\infty$ の多くの既約表現の系列を構成した．

**Open Problem 1 (Plancherel 型公式).**

この既約表現の族は，ここまでに知られていた既約表現をすべて含んでいて十分大きいが，これを用いて，正則表現の既約分解である Planchrel 型の公式を（数多く）得ることを狙っているが，そこはまだ宿題である．

◆ 論文 [Hir4, 2004]．**$\mathfrak{S}_\infty$ 上の正定値関数の「中心化」.**

$f$ を $\mathfrak{S}_\infty$ 上の不変ではない正定値関数，$K$ を有限部分群とする．**$K$ による $f$ の中心化**とは，

$$C_K:\ f\longmapsto f^K(\sigma):=\frac{1}{|K|}\sum_{k\in K}f(k\sigma k^{-1})\quad(\sigma\in W), \tag{3.17}$$

のことである．$C_K$ は，$f$ の GR 表現 $(\pi_f,\mathfrak{H}_f,v_f)$ 内での操作であって，

$$f^K(\sigma)=\frac{1}{|K|}\sum_{k\in K}\langle\pi_f(\sigma)\pi_f(k)v_f,\pi_f(k)v_f\rangle_f$$

は，$\pi_f$ の行列要素の和である．部分群の増大列 $W_n\nearrow(n\to\infty)$ に沿って，正定値関数の列 $f^{W_n}$ の極限操作を通して $\pi_f$ を調べる方法を提案した．

$W=\mathfrak{S}_n$ を生成元系 $S=\{s_i=(i\ i{-}1)\,;\,1\le i\le n{-}1\}$ を持つ Coxeter 群 $(W,S)$ と捉える．$w\in W$, $s\in S$, に対し，

$|w|$ :=“ $w$ の $S$ に関する長さ”,

$$\|w\|:=\sum\nolimits_{s\in S}\|w\|_s,\qquad \|w\|_s:=\begin{cases}1 & (w\ \text{の最短表示に}\ s\ \text{がある}),\\ 0 & (w\ \text{の最短表示に}\ s\ \text{がない}),\end{cases}$$

とおき，$W=\mathfrak{S}_\infty$ 上の関数

$$f_r(w)\ :=\ r^{|w|}\qquad(-1\le r\le 1,\ w\in W), \tag{3.18}$$

$$f'_q(w)\ :=\ q^{\|w\|}\qquad(0\le q\le 1,\ w\in W), \tag{3.19}$$

$$f''_q(w)\ :=\ \mathrm{sgn}(w)\cdot q^{\|w\|}\qquad(0\le q\le 1,\ w\in W), \tag{3.20}$$

を考える．これらは，$W$ 上の非不変正定値関数であるが，自由確率論の方面から重要視されていて，M. Bożejko 氏から提出された問題は次である：

**Open Problem 2 (Bożejko).**
$f$ を上の正定値関数の１つとするとき，GR表現 $\pi_f$ は既約か？ 既約でなければ，その既約分解を与えよ．

実はこの問題は，完全解決には至らず，未だ Open のままに残っているが，この論文で得た結果は次のようなものである．

**定理 3.3.** $W = \mathfrak{S}_n$ 上の正定値関数 $f$ を $f_r, f'_q, f''_q$ のどれかとすると，

$$f^{\mathfrak{S}_n}(\sigma) \longrightarrow \delta_e(\sigma) \quad (\sigma \in \mathfrak{S}_\infty) \quad [\text{各点収束}] \qquad \square$$

この結果から，「$\pi_f$ が正則表現 $\mathcal{L}_W$ を，weak conteinment topology という弱い位相で，近似し得る」ことが従う．

**定理 3.4.** $\pi$ を，$\mathfrak{S}_n$ の [Hir3, 1991] で作った既約表現のうち，一般の位置にあるもの（すなわち，退化形でないもの）とする．$f$ を $\pi$ のある特定の対角要素とする．

(i) 増大する部分群の列 $K_n \nearrow$ $(n \to \infty)$ をうまく選べば，各点収束極限 $\lim_{n\to\infty} f^{K_n}$ は，Thoma の指標のどれか $f_{\alpha,\beta}$ になる．

(ii) $\pi$ をさらに一般的なものとする（選び方は分かる）．Thoma の指標 $f_{\alpha,\beta}$，$\|\alpha| + \|\beta\| \le 1$, の全てが，上のように $f$ の中心化の極限として得られる． $\square$

**注 3.1.** 主張 (ii) は，Thoma パラメーター $\alpha_i$, $\beta_j$ の，(3.16) とは異なる，第二の幾何学的な意味付けを与えている．

## 3.4 無限ワイル群，無限鏡映群，など

◆ 論文 [HH1, 2002]

$A_\infty$ 型の Weyl 群である $W(A_\infty) = \mathfrak{S}_\infty$ における Thoma の結果と同等の結果を，$B_\infty/C_\infty$, $D_\infty$ 型の Weyl 群 $W = W(B_\infty)$, $W(D_\infty)$，あるいは類似の無限群 $W$ に対して求めた．すなわち，$W$ の指標，$\mathrm{Extr}\big(K_1(W)\big)$ の元，をすべて決定した．

◆ 論文 [HH3, 2005]. $T$ を有限群もしくはコンパクト群とする. $I = \boldsymbol{I}_n := \{1, 2, \ldots, n\}$ または $I = \boldsymbol{I}_\infty := \boldsymbol{N}$, とおき,

$$D_I(T) := \prod_{i \in I}{}' T_i \ (\text{制限直積}), \quad T_i = T \ (i \in I),$$

$\sigma \in \mathfrak{S}_I$ の $d = (t_i) \in D_I(T)$, $t_i \in T_i$, への

作用 $\sigma(d) := (t'_i)_{i \in I}$, $t'_i = t_{\sigma^{-1}(i)}$ $(i \in I)$, の下での

半直積群 $\mathfrak{S}_I(T) := D_I(T) \rtimes \mathfrak{S}_I$,

を $T$ と, $\mathfrak{S}_I \cong \mathfrak{S}_n$ または $\mathfrak{S}_\infty$, との**環積（wreath product）**という. 例えば, $B_n$, $B_\infty$ 型の Weyl 群は, $T = \boldsymbol{Z}_2$,

$$W(B_n) = \mathfrak{S}_n(\boldsymbol{Z}_2), \quad W(B_\infty) = \mathfrak{S}_\infty(\boldsymbol{Z}_2),$$

である. 一般に $\lim_{n \to \infty} \mathfrak{S}_n(T) = \mathfrak{S}_\infty(T)$ （射影極限）である.

$T$ が有限群のときは, $\mathfrak{S}_\infty$ は離散無限群, $T$ が有限でないコンパクト群のときには, $\mathfrak{S}_n(T)$ はコンパクトだが, $\mathfrak{S}_\infty(T)$ は（誘導位相で）コンパクトではない.

この論文 [HH3, 2005] では, $T$ が有限群の場合に,

**(1)** $G_\infty = \mathfrak{S}_\infty(T)$ の全ての指標, 従って, $\mathrm{Extr}\big(K_1(G_\infty)\big)$, を求めた.

**(2)** $G_n = \mathfrak{S}_n(T)$ の正規化された既約指標の極限として, $\mathrm{Extr}\big(K_1(G_\infty)\big)$ の元すべてが得られることを示した.

◆ 論文 [HH4, 2007].

$T$ が任意のコンパクト群であるときに, $G_\infty = \mathfrak{S}_\infty(T)$ の全ての指標を求め, $\mathrm{Extr}\big(K_1(G_\infty)\big)$, を決定した.

◆ 論文 [HoHH, 2008]

下の論文 [HHH1, 2009] をもとに, $G_n = \mathfrak{S}_n(T)$ の正規化された既約指標の極限として, $\mathrm{Extr}\big(K_1(G_\infty)\big)$ の元すべてが得られる状況を確率論的に論じた.

◆ 論文 [HHH1, 2009]

任意のコンパクト群 $T$ と $\mathfrak{S}_\infty$ との半直積群 $\mathfrak{S}_\infty(T)$ を $\mathfrak{S}_n(T)$ の射影極限と捉えたときに, $G_n = \mathfrak{S}_n(T)$ の正規化された既約指標の極限として,

$\mathrm{Extr}\big(K_1(G_\infty)\big)$ の元すべてが得られることや，その極限操作などについて具体的に検討した．

◆ 論文 [HHH3, 2013] および [HHH4, 2013].

有限鏡映群 $G(m,p,n)$, $p|m$, は環積群 $G(m,1,n)=\mathfrak{S}_n(\boldsymbol{Z}_m)$, $T=\boldsymbol{Z}_m$, もしくはその有限指数の正規部分群（$p>1$ のとき）であり，その射影極限

$$G(m,p,\infty)=\lim_{n\to\infty}G(m,p,n)$$

は，$G(m,1,\infty)=\mathfrak{S}_\infty(\boldsymbol{Z}_m)$ またはその有限指数の正規部分群（$p>1$ のとき）である．

これらについて，（上述の線形表現の範疇から飛び出して）スピン表現の範疇において，指標の計算と指標の極限操作についての研究である．

極限移行の状況を抽象化した，分岐グラフ上の調和関数の理論も同時に研究している．

# 4 $\mathfrak{S}_\infty$ 上の norm function に対応する GR 表現

M. Bożejko 氏が自由確率論の立場から問題提起したものである．

## 4.1 Coxeter 群上の（不変ではない）特別の正定値関数

**定義 4.1 (Coxeter 群).** Coxeter 群 $(W,S)$ は，生成元系 $S$, $|S|\le\infty$, と次の形の基本関係式系で決まる：

$$(4.21)\qquad \begin{gathered}(ss')^{m(s,s')}=e\quad(s,s'\in S),\\ m(s,s')=m(s',s)\in\{\infty,1,2,\ldots\},\\ m(s,s')=1\iff s=s'.\end{gathered}$$

**定義 4.2.** $(W,S)$ を Coxeter 群とする．$w\in W$, $s\in S$, に対し，

$|w|:=$“$w$ の $S$ に関する長さ”,

$$\|w\|_s\ (s\text{-半ノルム}):=\begin{cases}1 & w\text{ の最短表示に }s\text{ がある},\\ 0 & w\text{ の最短表示に }s\text{ がない},\end{cases}$$

$$\|w\| := \textstyle\sum_{s\in S}\|w\|_s\,,$$

$$f_r^0(w) := r^{|w|}\ \ (w \in W), \quad (0 \le r \le 1, \text{定数}).$$

さらに，$Q := (q_s)_{s\in S}, 0 \le q_s \le 1$, $F \subset S$, $w \in W$, に対して，

$$(4.22)\qquad \begin{cases} f_{Q,F}(w) := \prod_{s\in F} f_{q_s,s}(w) \quad \text{with} \quad f_{q,s}(w) := q^{\|w\|_s}, \\ f_Q(w) := f_{Q,S}(w) = \prod_{s\in S} f_{q_s,s}(w). \end{cases}$$

これらの関数を length function または norm function という． □

**定理 4.1.** Coxeter 群 $(W,S)$ に対して，$W$ 上の関数 $f_r^0$, $f_{Q,F}$, $f_Q$ はいずれも正定値である．ただし不変関数ではない． □

これらの正定値関数 $f$ は，free probability と深い関係がある．そして，その方面の研究者から，GR 表現 $\pi_f$ の性質を知りたい，との要望が強い．

**課題 4.1.** $f$ を Coxeter 群 $(W,S)$ 上の norm function とするとき，
(1) $\pi_f$ は既約であるか，あるいは因子表現であるか？
(2) $\pi_f$ が既約でないとき，その既約分解は？

### 4.2 Coxeter 群上の norm functions とその GR 表現

◆ $f_r^0$ と $f_q := f_{Q,S}$, $q_s = q\ (\forall s \in S)$, の場合は，
$W = \mathfrak{S}_\infty = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{S}_n$ に対して，[Hir3] で研究，

$W_s := \{w \in W\,;\, \|w\|_s = 0\}$ は $W$ の部分群で，
生成元系 $S_s := S \setminus \{s\}$ をもつ Coxeter 群．
$0 \le q_s \le 1$ に対し，

$$(4.23)\qquad f_{q_s,s}(w) = q_s^{\|w\|_s} = \begin{cases} 1 & \text{if } w \in W_s; \\ q_s & \text{if } w \in W \setminus W_s, \end{cases}$$

$$(4.24)\qquad f_{q_s,s} = q_s 1_W + (1-q_s) X_{W_s},$$

ここに，$1_W$ は $W$ 上定数 1 の関数，
$X_{W_s}$ は $W_s$ の自明指標を $W \setminus W_s$ で 0 として拡張．

$\mathcal{X}_{W_s}$ は 誘導表現 $\Pi_s := \mathrm{Ind}_{W_s}^W \mathbf{1}_{W_s}$ の対角行列要素である.

$\pi_s := \mathbf{1}_W \oplus \Pi_s$ の単位ベクトル $\boldsymbol{v}_{1,s} \in V(\pi_s)$ として,

(4.25) $$\boldsymbol{v}_{1,s} = \sqrt{q_s} \cdot 1_W \oplus \sqrt{1-q_s} \cdot \mathcal{X}_{W_s}.$$

**補題 4.2.** $\pi_s = \mathbf{1}_W \oplus \Pi_s$ の部分空間 $\langle \pi_s(W)\boldsymbol{v}_{1,s}\rangle$ に働く部分表現 $\pi'_s$ は GR 表現 $\pi_{f_{q_s,s}}$ とユニタリ同値.

$\pi'_s$ から $\pi_{f_{q_s,s}}$ への $W$-同型は, 単位巡回ベクトル $\boldsymbol{v}_{1,s} \in V(\pi'_s)$ を $\boldsymbol{v}_{f_{q_s,s}} \in V(\pi_{f_{q_s,s}})$ に写すもので, 一意的である. □

$F \subset S$ に対し, $W_F := \langle S \setminus F\rangle$ とおく.

**補題 4.3.** $F_1, F_2 \subset S$ に対し, $W_{F_1} \cap W_{F_2} = W_{F_1 \cup F_2}$. 部分集合 $B \subset W$ の特性関数を $\mathcal{X}_B$ とすると, $\mathcal{X}_{W_{F_1}} \cdot \mathcal{X}_{W_{F_2}} = \mathcal{X}_{W_{F_1 \cup F_2}}$. □

$Q = (q_s)_{s\in S}$, $0 \le q_s \le 1$ $(s \in S)$, $F \subset S$, に対し, $f_Q = f_{Q,F} \cdot f_{Q,S\setminus F}$.

$F$ が有限のとき,

(4.26) $$f_{Q,F} = \prod_{s\in F}(q_s 1_W + (1-q_s)\,\mathcal{X}_{W_s}) = \sum_{F'\subset F} c_{Q;F,F'}\,\mathcal{X}_{W_{F'}},$$
$$c_{Q;F,F'} := \prod_{s\in F\setminus F'} q_s \prod_{t\in F'}(1-q_t).$$

$F \subset S$ 有限, に対し, $F' \subset F$, $\Pi_{F'} := \mathrm{Ind}_{W_{F'}}^W \mathbf{1}_{W_{F'}}$ とし,

(4.27) $$\pi_{(F)} := \bigoplus_{F'\subset F} \Pi_{F'}, \quad V(\pi_{(F)}) := \bigoplus_{F'\subset F} V(\Pi_{F'}),$$

$V(\pi_{(F)})$ の単位ベクトルを

(4.28) $$\boldsymbol{w}_{Q,F} := \sum_{F'\subset F}^{\oplus} d_{Q;F,F'}\mathcal{X}_{W_{F'}},$$

と取る. $\pi_{(F)}$ の $\boldsymbol{w}_{Q,F}$ に対する対角行列要素は

$$\langle \pi_{(F)}(g)\boldsymbol{w}_{Q,F}, \boldsymbol{w}_{Q,F}\rangle_{V(\pi_{(F)})} = \sum_{F'\subset F}(d_{Q;F,F'})^2\,\mathcal{X}_{W_{F'}}(g) \qquad (g \in W).$$

**補題 4.4.** $F \subset S$ 有限, とする. 直和 $\pi_{(F)} := \bigoplus_{F'\subset F} \Pi_{F'}$, $\Pi_{F'} = \mathrm{Ind}_{W_{F'}}^W \mathbf{1}_{W_{F'}}$, の空間の単位ベクトル $\boldsymbol{w}_{Q,F} \in V(\pi_{(F)})$

$$\boldsymbol{w}_{Q,F} = \sum_{F'\subset F}^{\oplus} d_{Q;F,F'}\mathcal{X}_{W_{F'}}, \quad d_{Q;F,F'} = \sqrt{c_{Q;F,F'}} \qquad (F' \subset F).$$

$\boldsymbol{w}_{Q,F}$ により張られた $\pi_{(F)}$ の巡回表現 $\pi'_{Q,F}$ は正定値関数 $f_{Q,F}$ に associate している．言い換えると，$\pi'_{Q,F} := \pi_{(F)}\big|_{\langle \pi_{(F)}(G)\boldsymbol{w}_{Q,F}\rangle}$,

$$(4.29) \qquad \left(\pi_{f_{Q,F}}, \boldsymbol{v}_{f_{Q,F}}\right) \cong \left(\pi'_{Q,F}, \boldsymbol{w}_{Q,F}\right).$$

ここまでの議論をさらに続けて，$\pi_f$ をある誘導表現の部分表現として埋め込む等の手段を使って，次の小節に述べる結果に行き着く（論文 [BH] 参照，[BH] は free downroad）．$\mathcal{L}_W$ で $W$ の左正則表現を表す

### 4.3 norm function の Gelfand-Raikov 表現

**定理 4.5 ([BH, Theorem 9.1]).** *Let $(W,S)$ be an irreducible affine Weyl group (cf. [Hum, Chap.4]), and $Q = (q_s)_{s\in S}$.*

(i) *Assume $0 < q_s < 1$ $(s \in S)$. Then* $\pi_{f_Q} \cong \mathbf{1}_W \oplus \mathcal{L}_W$.

(ii) *Assume $q_s = 0$ $(s \in F_0 \neq \emptyset)$, $0 < q_s < 1$ $(s \notin F_0)$. Then* $\pi_{f_Q} \cong \mathcal{L}_W$.

(iii) *Assume $q_s = 1$ $(s \in F_1 \neq \emptyset)$, $0 < q_s < 1$ $(s \notin F_1)$. Then*

$$\pi_{f_Q} \cong \mathbf{1}_W \oplus \mathrm{Ind}_{\langle F_1\rangle}^W \mathbf{1}_{\langle F_1\rangle}.$$

(vi) *Assume $q_s = 0$ $(s \in F_0 \neq \emptyset)$, $q_s = 1$ $(s \in F_1 \neq \emptyset)$, $0 < q_s < 1$ otherwise. Then*

$$\pi_{f_Q} \cong \mathrm{Ind}_{\langle F_1\rangle}^W \mathbf{1}_{\langle F_1\rangle}.$$

**定理 4.6 ([BH, Theorem 10.1]).** *Assume that a Coxeter group $(W,S)$ is compact hyperbolic (cf. [Hum, Chap.6]).*

(i) *Assume for $Q = (q_s)_{s\in S}$, $0 < q_s < 1$ $(s \in S)$. Then* $\pi_{f_Q} \cong \mathbf{1}_W \bigoplus \mathcal{L}_W$.

(ii) *Assume $q_s = 0$ $(s \in F_0)$, $0 < q_s < 1$ $(s \notin F_0)$, for an $F_0 \neq \emptyset$. Then* $\pi_{f_Q} \cong \mathcal{L}_W$.

(iii) *Assume $q_s = 1$ $(s \in F_1 \neq \emptyset)$, $0 < q_s < 1$ $(s \notin F_1)$. Then*

$$\pi_{f_Q} \cong \mathbf{1}_W \oplus \mathrm{Ind}_{\langle F_1\rangle}^W \mathbf{1}_{\langle F_1\rangle}.$$

(vi) *Assume* $q_s = 0$ $(s \in F_0 \neq \emptyset)$, $q_s = 1$ $(s \in F_1 \neq \emptyset)$, $0 < q_s < 1$ *otherwise. Then*

$$\pi_{f_Q} \cong \mathrm{Ind}_{\langle F_1 \rangle}^{W} \mathbf{1}_{\langle F_1 \rangle}.$$

**定理 4.7 ([BH, Theorem 10.2]).** *Assume that* $(W, S)$ *is irreducible and non-compact hyperbolic.*

(i) *For* $Q = (q_s)_{s \in S}$, $0 < q_s < 1$ $(s \in S)$, *GR representation* $(\pi_{f_Q}, v_{f_Q})$ *is isomorphic to a cyclic subrepresentation, containing* $\mathbf{1}_W \oplus \mathcal{L}_W$, *of* $\mathbf{1}_W \oplus \Big( \bigoplus_{\substack{s \in S \\ \text{inf. type}}} \mathrm{Ind}_{W_s}^{W} \mathbf{1}_{W_s} \Big) \oplus \mathcal{L}_W$.

(ii) *Assume that an infinite type* $s \in S$ *is unique and denote it by* $s_0$. *Then,*

$$\begin{aligned} \pi_{f_Q} &\cong \mathbf{1}_W \oplus \mathrm{Ind}_{W_{s_0}}^{W} \mathbf{1}_{W_{s_0}} \oplus \mathcal{L}_W, && \text{if } |W/W_{s_0}| = \infty, \\ \pi_{f_Q} &\cong \mathrm{Ind}_{W_{s_0}}^{W} \mathbf{1}_{W_{s_0}} \oplus \mathcal{L}_W, && \text{if } |W/W_{s_0}| < \infty. \end{aligned}$$

**例 4.1.** Irreducible rank 3 Coxeter groups are divided into two cases.

**Case 1.** The Coxeter graphs are of the form

$$\circ \overset{m}{\text{———}} \circ \overset{n}{\text{———}} \circ, \ \ 3 \leq m \leq n \leq \infty.$$

Assume $n < \infty$. Then, except the following cases, the Coxeter group with this graph is compact hyperbolic, and its bilinear form $B$ is of signature $(2, 1)$:

| $(m, n)$ | $(3,3)$ | $(3,4)$ | $(3,5)$ | $(3,6)$ | $(4,4)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| type of Coxeter group | $A_3$ | $B_3$ | $H_3$ | $\widetilde{G_2}$ | $\widetilde{B_2} = \widetilde{C_2}$ |

**Case 2.** The Coxeter graphs are triangle with labels $3 \leq m \leq n \leq p$ on three edges. Assume $p < \infty$, then except only one case of $(m, n, p) = (3, 3, 3)$ for type $\widetilde{A_2}$, all other graphs are for compact hyperbolic Coxeter groups, and Theorem 10.1 (定理 4.5) is applicable.

In the case where only one component of labels $(m, n)$ or $(m, n, p)$ is $\infty$, we can apply Theorem 10.2 (定理 4.7).

**例 4.2.** An example of non-compact hyperbolic Coxeter group of rank 3 is given as follows:

$$S = \{s_1, s_2, s_3\}, \quad m(s_1, s_2) = 3, \quad m(s_2, s_3) = \infty, \quad m(s_1, s_3) = 2.$$

Then the Coxeter group $W$ is isomorphic to $PGL(2, \boldsymbol{Z}) = GL(2, \boldsymbol{Z})/\{\pm 1\}$ by sending the generators $s_1, s_2, s_3$ respectively to

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

where the canonical map $GL(2, \boldsymbol{Z}) \to PGL(2, \boldsymbol{Z})$ is denoted by

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

In this case, $W_F$ is finite except when $F = \{s_1\}$, where $W_{s_1} = \langle s_2, s_3 \rangle$ is equal to the parabolic subgroup $P$ of upper triangular matrices. Hence we have $|W/W_{s_1}| = \infty$, and for $Q = (q_s)_{s \in S}$, $0 \leq q_s < 1$ $(s \in S)$, $\pi_{f_Q} \cong \mathbf{1}_W \oplus \mathrm{Ind}_P^W \mathbf{1}_P \oplus \mathfrak{L}_W$.

**Open Problem 3.**

上の定理 4.5, 4.6, 4.7 に入らない場合，とくに無限 Weyl 群 $W(A_\infty) = \mathfrak{S}_\infty$, $W(B_\infty/C_\infty)$, $W(D_\infty)$ の場合に，上と同様の結果を求めよ．

岡シンポジュウム講演（12 月 7 日 (日) 14:00-16:00,

於： 奈良女子大学理学部数学教室,

報告集

## 日 本 語 文 献

**[杉浦]** 杉浦光夫 (訳), アンドレ・ヴェイユ (著), 数学の創造一著作集自註, 数セミ・ブックス ⟨4⟩, 1983 年, 日本評論社.

**[平井 1]** 平井 武, 対称群の指標に関する Frobenius, Schur の仕事, 第 13 回数学史シンポジュウム, 津田塾大学 数学・計算機科学研究所報, **24**(2003), pp.53-58.

**[平井 2]** Schur の学位論文および対称群の表現, 第 14 回数学史シンポジュウム, 津田塾大学 数学・計算機科学研究所報, **25**(2004), pp.123-131.

**[平井 3]** Frobenius による「群の指標と表現」の研究, 第 15 回数学史シンポジュウム, 津田塾大学 数学・計算機科学研究所報, **26**(2005), pp.222-240.

**[平井 4]** Frobenius による「群の指標と表現」の研究（その２）, ibid., **27**(2006), pp.168-182.

**[平井 5]** Frobenius による「群の指標と表現」の研究（その３）, ibid., **28**(2007), pp.290-318.

**[平井 6]** Frobenius による「群の指標と表現」の研究（その４）, ibid., **29**(2008), pp.168-182.

**[平井 7]** Schur の表現論の仕事（射影表現３部作） その I, 第 19 回数学史シンポジュウム, 津田塾大学 数学・計算機科学研究所報, , **30**(2009), pp.104-132.

**[平井 8]** 数学者から数学者へ／フロベニウス,『数学セミナー』2009, 1 月号, pp.6-7.

**[平井 9]** 数学者から数学者へ／シューア,『数学セミナー』2009, 2 月号, pp.6-7.

**[平井 10]** Schur の表現論の仕事（射影表現３部作） その II, 第 20 回数学史シンポジュウム, 津田塾大学 数学・計算機科学研究所報, **31**(2010), pp.74-82.

**[平井 11]** 群のスピン表現 (射影表現) の歴史概観 (付 年表), 第 22 回数学史シンポジュウム, 津田塾大学 数学・計算機科学研究所報, **34**(2012), pp.99-119.

## REFERENCES

[GR] I.M. Gelfand and D.A. Raikov, Irreducible unitary representations of locally bicompact groups, Amer. Math. Transl., **36**(1964), 1-15 (Original Russian paper in Mat. Sbornik, **13(55)**(1943), 301-315).

[Th] E. Thoma, Die unzerlegbaren positiv-definiten Klassenfunktionen der abzählbar unendlichen, symmetrischen Gruppe, Math. Z., **85**(1964), 40-61.

[Dix] J. Dixmier, Les $C^*$-algèbres et leurs représentations, Gauthier-Villars, Paris, 1964.

[Hir1] T. Hirai, The characters of the discrete series for semisimple Lie groups. J. Math. Kyoto Univ., **21**(1981), 417–500. http://projecteuclid.org/euclid.kjm/1250521974.

[VK] A. Vershik and S. Kerov, Asymptotic theory of characters of the symmetric group, Funct. Anal. Appl., **15**(1982), 246-255.

[Hir2] T. Hirai, Some aspects in the theory of representations of discrete groups, Japan. J. Math., **16**(1990), 197-268.

[Hir3] T. Hirai, Construction of irreducible unitary representations of the infinite symmetric group $\mathfrak{S}_\infty$, J. Math. Kyoto Univ., **31**(1991), 495-541.

[Bia] P. Biane, Minimal factorization of a cycle and central multiplicative functions on the infinite symmetric groups, J. Combin. Theory, Ser. A, **76**(1996), 197-212.

[Hum] ([BoHi] の引用文献) J. Humphrey, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambriege Studies in Advanced Mathmatics, **29**, Cambridge University Press, 1997.

[HH1] T. Hirai and E. Hirai, Characters for the infinite Weyl groups of type $B_\infty/C_\infty$ and $D_\infty$, and for analogous groups, in '*Non-Commutativity, Infinite-Dimensionality and Probability at the Crossroad*', pp.296-317, World Scientific, 2002.

[Hir4] T. Hirai, Centralization of positive definite functions, weak containment of representations and Thoma characters for the infinite symmetric group, J. Math. Kyoto Univ., **44**(2004), 685-713.

[HH2] T. Hirai and E. Hirai, Positive definite class functions on a topological group and characters of factor representations. J. Math. Kyoto Univ., **45**(2005), 355–379. http://projecteuclid.org/euclid.kjm/1250281995.

[HH3] T. Hirai and E. Hirai, Characters of wreath products of finite groups with the infinite symmetric group, J. Math. Kyoto Univ., **45**(2005), 547-597.

[HH4] T. Hirai and E. Hirai, Characters of wreath products of compact groups with the infinite symmetric group and characters of their canonical subgroups, J. Math. Kyoto Univ., **47**(2007), 269-320.

[HoHH] A. Hora, T. Hirai, and E. Hirai, Limits of characters of wreath products $\mathfrak{S}_n(T)$ of a compact group $T$ with the symmetric groups and characters of $\mathfrak{S}_\infty(T)$, II, From a viewpoint of probability theory, J. Math. Soc. Japan, **60**(2008), 1187–1217.

[HHH1] T. Hirai, E. Hirai and A. Hora, Limits of characters of wreath products $\mathfrak{S}_n(T)$ of a compact group $T$ with the symmetric groups and characters of $\mathfrak{S}_\infty(T)$, I, Nagoya Math. J., **193**(2009), 1-93.

[HHH2] T. Hirai, E. Hirai and A. Hora, Introductory expositions on projective representations of groups, in MSJ Memoirs, Vol. 29, Math. Soc. Japan, 2013, pp.1-47.

[HHH3] T. Hirai, E. Hirai and A. Hora, Projective representations and spin characters of complex reflection groups $G(m,p,n)$ and $G(m,p,\infty)$, I, in MSJ Memoirs, Vol. 29, Math. Soc. Japan, 2013, pp.49-122.

[HHH4] T. Hirai, A. Hora and E. Hirai, Projective representations and spin characters of complex reflection groups $G(m,p,n)$ and $G(m,p,\infty)$, II, in MSJ Memoirs, Vol. 29, Math. Soc. Japan, 2013, pp.123-272.

[HoH] A. Hora and T. Hirai, Harmonic functions on the branching graph associated with the infinite wreath product of a compact group, Kyoto J. Math., **54**(2014), 775-817.

[BoHi] M. Bożejko and T. Hirai, Gelfand-Raikov representations of Coxeter groups associated with positive definite norm functions, Probability and Math. Statistics, **34**(2014), 161-180. (free downroad)

## 歴史的な解説のための文献追加.

[Wey] H. Weyl, Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen, I–III, Mathematische Zeitschrift, **23**(1925), 271-301; **24**(1926), 328-376; **24**(1926), 377-395.

[Wei] A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Hermann, Paris, 1$^{er}$ Ver. 1940, 2$^{e}$ Ver. 1965.

[KM] M. Krein and D. Milman, On extreme points of regular convex sets, Studia Mathematica **9** (1940), 133–138.

[Cho] G. Choquet, Existence et unicité des représentations intégrales, Séminaire Bourbaki, Décembre 1956, 139-1∼139-15.

[BiLe] E. Bishop and K. de Leeuw, The representation of linear functionals by measures on sets of extreme points, Ann. Inst. Fourier, **9**(1959), 305-331.

[F53] F. Frobenius, Über Gruppencharaktere, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 985–1021(1896).

[F60] F. Frobenius, Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe, ibid., 516–534(1900).

[F61] F. Frobenius, Über die Charaktere der alternierenden Gruppe, ibid., 303–315(1901).

[S4] J. Schur, Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, Journal für die reine und angewante Mathematik, **127**(1904), 20–50.

[S10] J. Schur, Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, ibid., **132**(1907), 85–137.

[S16] J. Schur, Über die Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, ibid., **139**(1911), 155–255.