領域の変動に関する2階変分公式と擬凸状域

山口 博史　(滋賀大学)

1. 動機とリーマン面の変動に関する2階変分不等式

西野利雄先生の研究：

「複素多変数制関数の新研究」（仏語）
(I) $\sim$ (V)　京都大学紀要 (1965 $\sim$1975)

の最終結果として 次が述べてある (cf. [Nn]).

$f(x,y)$ は $\mathbb{C}$ の定数でない整関数とすれば，任意の $t\in\mathbb{C}$ に対して f の定数面 $f(x,y)=t$ は $\mathbb{C}^2$ 内に高々加算個の既約成分 (開リーマン面) からなる： $S'_t, S''_t, \cdots, S_t^{(p)}, \cdots$

定理. $f(x,y)$ に関する上記の記号の下で

<u>条件</u> ：各 $S_t^{(p)}$ は開リーマン面として 或るコンパクトなリーマン面から有限個の点を除いたリーマン面と同値である（もちろん コンパクトなリーマン面も除かれる点の数も t,p に依っている）.

<u>結論</u> ：$f(x,y)$ は次の意味で多項式に帰着される：或る正則変換 $T:\mathbb{C}^2_{x,y}\to\mathbb{C}^2_{z,w}$, 或る (二変数の) 多項式 $P(z,w)$ および 或る (一変数の) 多項式 $F(\zeta)$ が存在して

$$f(x,y)=F\circ P\circ T(x,y) \quad \text{on} \quad \mathbb{C}_{x,y}.$$

これを完成する途中で 次の予想をたてられた：

西野予想. $f(x,y)$ に関する上記の記号の下で, もし

$$集合\ e=\{t\in\mathbb{C}_t : \exists\ S_t^{(p)}\ は放物型リーマン面である\}$$

の $\mathbb{C}_t$ での対数容量が正ならば, すべての $t\in\mathbb{C}_t$ に対して 各 $S'_t, S''_t, \cdots, S_t^{(p)}, \cdots$ は放物型リーマン面である.

予想を解くための準備を行う.「一変数関数論から」

1) 領域 $D(\subset\mathbb{C})$ での実関数 $s(z)$ が D で <u>劣調和</u> とは $-\infty\le s(z)<+\infty$ であって, 任意の $\zeta\in D$ に対して

$$(i)\ \varlimsup_{z\to\zeta} s(z)\le s(\zeta);\quad (ii)\ s(\zeta)\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} s(\zeta+re^{i\theta})d\theta,\ 0<\forall r\ll 1$$

が成り立つときを言う．但し，$s(z)\equiv-\infty$ on D も劣調和とする.

2) 開リーマン面 R が <u>放物型</u> とは R には定数でない有界な劣調和関数が存在しないときを言う.

3) $\mathbb{C}$ の部分集合 e が <u>対数容量 0</u> とは 任意の閉集合 $e'\subset e$ に対して 領域 $\mathbb{C}\setminus e'$ が放物型であるときを言う.

4) 「劣調和関数の吸引力の原理」 関数 $s(z)$ は領域 $D(\subset\mathbb{C})$ で劣調和とする．もし集合 $e=\{z\in D:\ s(z)=-\infty\}$ の対数容量が正ならば，$e=D$ 即ち $s(z)\equiv-\infty$ on D である.

5) 「開リーマン面 R 上の Green 関数 $g(z)$ 及び Robin 定数 λ の定義」 $\{R_n\}, n=1,2,\ldots$ を R の一つの標準近似とする．即ち $R_n\Subset R_{n+1}\Subset R$ 且つ $\lim_{n\to\infty}R_n=R$ である．ここに R_n は ∂R_n が C^ω 級滑らかな境界成分よりなるリーマン面であっ

て, $R\setminus R_n$ は R での相対コンパクトな領域を含まない．点 $\zeta\in R_1$ 及び その局所座標をとってくる．簡単のために，$|x-\zeta|<r$ と書く．このとき次の Green 関数 $g_n(z)$ for $(R_n,\{\zeta\})$ が定まる：

(i) $g_n(z)$ は $R_n\setminus\{\zeta\}$ で調和な関数である.

(ii) $g_n(z)=\log\frac{1}{|z-\zeta|}+\lambda_n+h_n(z)$ near ζ, where $h_n(\zeta)=0$.

(iii) $g_n(z)=0$ on ∂R_n.

このとき $g_n(z)\nearrow\exists g(z)$ on R, $\lambda_n\nearrow\exists\lambda$ as $n\to\infty$ である．$g(z)$ を Green 関数, λ を Robin 定数 for $(R,\{\zeta\})$ という．次の関係がある：

$$\text{リーマン面 } R \text{ は放物型} \iff g(z)\equiv+\infty \text{ on } R \iff \lambda=+\infty.$$

「多変数関数論から」

1) 領域 $D\subset\mathbb{C}^n$ が正則域とは D を自然存在域とする正則関数が存在するときを言う.

2) 領域 $D\subset\mathbb{C}^n$ が 擬凸状域 とは次の 2 条件 (i), (ii) を満たすときを言う：

(i) 任意の $0<r'<r$, $0<\rho'<\rho$ に対して

$$E_1=\{|z_1<r\}\times\cdots\times\{|z_n|<r\},\qquad E_2=\{|z_n|<\rho\},$$
$$E_1'=\{|z_1<r'\}\times\cdots\times\{|z_n|<r'\},\qquad E_2'=\{\rho'<|z_n|<\rho\},$$
$$\mathcal{E}_1=E_1\times E_2',\quad \mathcal{E}_2=E_1'\times E_2$$

と置く．もし $\mathcal{E}_1\cup\mathcal{E}_2\subset D$ ならば $E_1\times E_2\subset D$ である.

(ii) Q を $\mathbb{C}^n_z$ の任意の球体とし，$w=F(z)$ を 開集合 $Q\cap\mathbb{C}^n_z$ から $\mathbb{C}^n_w$ への任意の正則変換とする．このとき 開集合 $F(Q\cap D)\subset\mathbb{C}^n_w$ は条件 (i) を満たす.

3) 領域 $D\subset\mathbb{C}^n$ が 正則凸状域 とは，任意の $K\Subset D$ に対して 次の条件を満たす D での有限個の正則関数 $f_1,\cdots,f_p$ が見つかるときを言う：

$\bigcap_{i=1}^p\{z\in D:|f_i(z)|<1\}$ の有限個の連結成分 E があって, $K\Subset E\Subset D$ である.

4) 「2 次元擬凸状域に関する E. E. Levi の定理 (1911)」 $D\subset\mathbb{C}^n$ は C^2 級滑らかな ∂D の領域とする．即ち 次を満たす ∂D の 定義関数 $\varphi(z)$ がある：$\varphi(z)$ は ∂D の近傍 V での C^2 級の実関数であって, $\varphi<0$ in $V\cap D$, $\varphi=0$ on ∂D, $\varphi>0$ in $V\cap\overline{D}^c$, $\nabla\varphi(z)=(\frac{\partial\varphi}{\partial z_1},\cdots,\frac{\partial\varphi}{\partial z_n})\neq(0,\cdots,0)$, $\forall z\in\partial D$. 次の関数を考える.

$$\mathcal{L}\varphi:=\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\overline{z}}\Big|\frac{\partial\varphi}{\partial w}\Big|^2-2\Re\Big\{\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\overline{w}}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\overline{z}\partial w}\Big\}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial w\partial\overline{w}}\Big|\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|^2 \text{ on } \partial D$$

次の Levi の定理が成立する.

$$D \text{ は擬凸状域である} \iff \mathcal{L}\varphi\geq 0 \text{ on } \partial D.$$

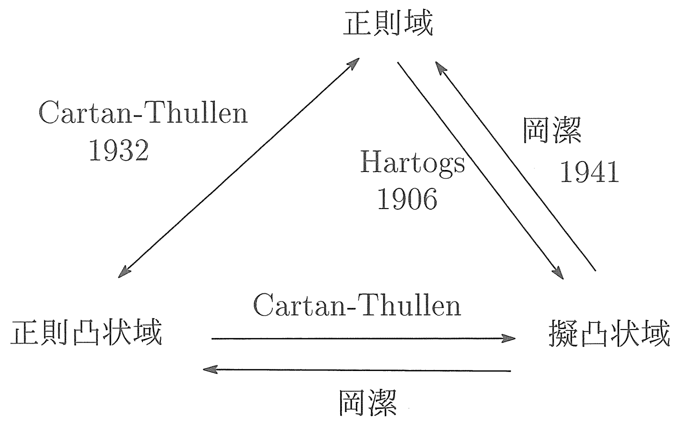
$\mathcal{L}(\varphi)$ を Levi form と呼ぶ．$\mathcal{L}\varphi(z)>0$ or $=0$, or <0 at $z\in\partial D$ は定義関数 φ の取り方に依らない.

5) 「多重劣調和関数 (plurisubharmonic function, 略して psh fn) の定義」 領域 $D(\subset\mathbb{C}^n)$ 上の実関数 $s(z)$, $-\infty\leq s(z)<+\infty$ が D 上の 多重劣調和関数 とは, 任意の複素直線 l に対して $D\cap l$ 上で $s(z)$ が（一変数の）劣調和であるときを言う． もし $s(z)$ が D 上の C^2 級関数ならば，次と同値である：$\big(\frac{\partial^2 s(z)}{\partial z_i\partial\overline{z}_j}\big)_{i,j}\geq 0$ at $\forall z\in D$.

更に，$\big(\frac{\partial^2 s(z)}{\partial z_i\partial\overline{z}_j}\big)_{i,j}>0$ at $\forall z\in D$ のとき，$s(z)$ は D 上の 強多重劣調和関数 (略して strictly psh fn) と言う．例えば $\|z\|=\sum_{i=1}^n|z_i|^2$ は $\mathbb{C}^n$ での strictlty psh fn.

6) 「近似関数（exhaustion function, 略して exh fn ）の定義」 領域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 上の連続な実関数 $s(z), -\infty < s(z) < +\infty$ が D での exh fn とは, $D_n = \{s(z) < n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ が D の標準近似であるときを言う.

$\mathbb{C}^n$ の領域に関して次の同値関係がある.



7) 複素 n 次元空間 M の領域 D が Stein 領域とは次の２条件を満たすときを言う.
  (i) D の任意の２点を与えるとき，D 上のある正則関数によって分離される.
  (ii) D は正則凸状域である．すなわち $\forall K \Subset D$ を与えるとき，次の条件を満たす D 上の有限個の関数 $f_1, \ldots, f_\nu$ が存在する：
  $\bigcap_{i=1}^{\nu}\{p \in M : |f_i(p)| < 1\}$ の或る有限個の連結成分 E に対して $K \Subset E \Subset D$.

Stein 領域の概念は岡先生の論文 (VII) ~ (IX) (1948~1953) (cf. [Ok-1]) でなされた $\mathbb{C}^n$ の内分岐域での研究を複素空間の領域での研究のために拡張された概念である．これによって 岡先生の不定域イデアル (idéaux de domaines indéterminés) の研究を基礎にして 研究が色々の分野に広がっていった．次の Grauert の定理はその基礎となった (cf. [G])：領域 $D \subset M$ に対して

D は Stain 領域である $\Longleftrightarrow$ D には strictly psh exh fn が存在する

複素多様体に於いては 強多重劣調和関数は $\mathbb{C}^n$ の場合と同じに定義できる．特異点を持つ複素空間の場合には そのままでは定義できないので，$\mathbb{C}^n$ での強多重劣調和関数の持つ性質によって定義してある.

複素多様体 M では 領域 D が擬凸状域であることの定義も $\mathbb{C}^n$ の場合と同じにできる．従って D に strictly psh fn 存在するならば，D は擬凸状域であることは自明である. Grauert は その逆は言えない例を 複素２次元のトーラス M のある滑らかな境界を持つ領域 D によって示した．次は Levi 問題 と呼ばれている：

「複素多様体 M の擬凸状域 D はいつ Stein 領域になるか ?」

上に述べた Grauert の定理によって 次と同値である.

「複素多様体 M の擬凸状域 D はいつ strictly psh exh fn を持つか？」

M が複素等質空間 及び Hopf 曲面の Stein ではない擬凸状域の分類を講演の後半に述べる.

西野予想に戻る．$f(x, y)$ は $\mathbb{C}^2$ の整関数, 任意の $t \in \mathbb{C}$ に対しての f の定数面 $f(x, y) = t$ の既約成分を $S'_t, S''_t, \cdots, S_t^{(p)}, \cdots$ とする．球体 $Q_n = \{|x|^2 + |y|^2 < n^2\}$, $n = 1, 2, \ldots$ に対して $\mathbb{C}^2$ での有限個の解析曲線 $\mathbf{s}_i$ と解析直線 l_j を選んで

$$D_n = Q_n \setminus \left[\left(\sum_{i=1}^{\mu} \mathrm{s}_i\right) \cup \left(\sum_{j=1}^{\nu} l_j\right)\right]$$

が次の条件を満たすように出来る．

(*i*) D_n は Stein 領域である．

(*ii*) $f(x,y)$ を D_n の正則関数とみるとき，$\forall t \in \mathbb{C}$ に対して $\{(x,y) \in D_n : f(x,y) = t\}$ は D_n での高々有限個の non-singular な解析曲線である．

以上を組み合わせると 西野予想は次の定理 1.1, (cf. [Y-1]) に帰着される．$(\widetilde{\mathcal{R}}, \widetilde{\pi}, B)$ を次の正則族とする: $\widetilde{\mathcal{R}}$ は複素 2 次元多様体，$B = \{|t| < \rho\} \subset \mathbb{C}_t$ は円板, $\widetilde{\pi}:\ \widetilde{\mathcal{R}} \to B$ は正則射影であって $\widetilde{R}(t) := \widetilde{\pi}^{-1}(t), t \in B$ と書くとき，各 $\widetilde{R}(t)$ は 既約 且つ non-singular in $\widetilde{R}$ である．次の条件を満たす 部分正則族 $(\mathcal{R}, \pi, B)$ を考える．$\mathcal{R} \subset \widetilde{\mathcal{R}}$ であって $\pi = \widetilde{\pi}|_B$ と書くとき

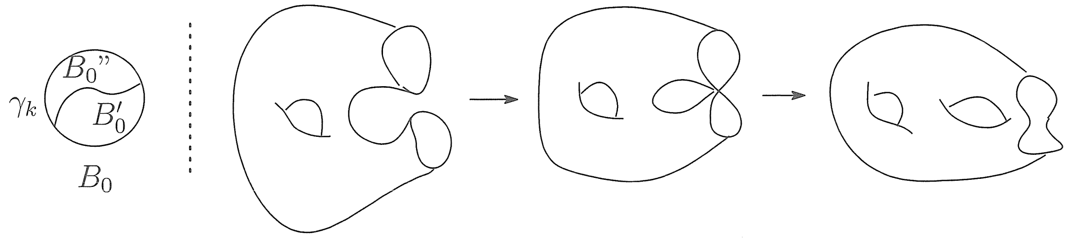
(*i*) $\mathcal{R}$ の $\widetilde{\mathcal{R}}$ における 境界 $\partial\mathcal{R}$ は C^ω 級滑らかである．

(*ii*) $R(t) = \pi^{-1}(t) \Subset \widetilde{R}(t), \quad \forall t \in B.$

(*iii*) B 上の $\mathcal{R}$ の正則切断 $\zeta : t \in B \to \zeta(t) \in R(t)$ が存在する．

各 $R(t), t \in B$ は 有限個 $\nu(t)$ の閉曲線で囲まれた有限種数 $g(t) \geq 0$ のリーマン面である．$\partial\mathcal{R}$ は $\widetilde{\mathcal{R}}$ で滑らかであるが, 各 $\partial R(t), t \in B$ は $\widetilde{\mathcal{R}}(t)$ において滑らかとは限らない．しかし，各点 $t_0 \in B$ に対して 小円板 $B_0 = \{|t - t_0| < r\} \Subset B$ を描けば，B_0 内の滑らかな（お互いに交わるかもしれない）有限個の曲線 γ_k $(k = 1, \ldots, \mu)$ があって, $\partial R(t)$ for $\forall t \in B_0 \setminus \bigcup_{k=1}^{\mu} \gamma_k$ は C^ω 級滑らかな閉曲線よりなる．2 次元領域 $\mathcal{R} = \cup_{t \in B}(t, R(t))$ $(\Subset \widetilde{\mathcal{R}})$ を 次のリーマン面の

$$\text{変動:}\ \ \mathcal{R}:\ t \in B \to R(t) \ \ (\Subset \widetilde{R}(t))$$



$R(t'),\ t' \in B_0'$ $\qquad$ $R(t_0),\ t_0 \in \gamma_k$ $\qquad$ $R(t"),\ t" \in B_0"$

と同一視する．正則切断 ζ の近傍 V に π-局所座標 $B \times \{|z| < r_0\}$ （ただし ζ は $B \times \{0\}$ に対応する) を固定する．各 リーマン面 $R(t)$, $t \in B$ に Green 関数 $g(t,x)$ 及び Robin 定数 $\lambda(t)$ for $(R(t), 0)$ が定まる．

$$g(t,z) = \log\frac{1}{|z|} \ + \ \lambda(t) + h(t,z) \text{ near } z = 0, \text{ where } h(t,0) = 0$$

定理 1.1. $\mathcal{R}$ が擬凸状域ならば 次の *2* 階変分不等式 が成立する．

$$\frac{\partial^2\lambda(t)}{\partial t \partial \bar{t}} \leq -\frac{4}{\pi} \iint_{R(t)} \left|\frac{\partial^2 g(t,z)}{\partial \bar{t} \partial z}\right|^2 dxdy, \quad \forall t \in B.$$

故に $-\lambda(t)$ は B 上の劣調和関数である．

[証明] $t = 0$ で示せばよい．$\mathcal{R}$ は $B \times \mathbb{C}$ の不分岐域としてよい (cf. [GN] or [Nm]).

Case 1. $\partial R(0)$ が C^ω 滑らかな場合. Green の公式から

$$\lambda(t)-\lambda(0)=\frac{-1}{2\pi}\int_{\partial R(0)} g(t,z)\frac{\partial g(0,z)}{\partial n_z}ds_z \quad \text{in } B_0=\{|t|\ll 1\}.$$

$$\therefore\ \frac{\partial^2\lambda(t)}{\partial t\partial\bar{t}}=\frac{-1}{2\pi}\int_{\partial R(0)}\frac{\partial^2 g(t,z)}{\partial t\partial\bar{t}}\,\frac{2}{i}\frac{\partial g(0,z)}{\partial z}dz.$$

$-g(t,z)$ は $\mathcal{R}|_{B_0}$ の定義関数と見れるから $\mathcal{R}$ は擬凸状域より，Levi form は

$$\mathcal{L}(-g(t,z))=\Big(\frac{\partial^2 g}{\partial t\partial\bar{t}}\Big|\frac{\partial g}{\partial z}\Big|^2-2\,\Re\Big\{\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial\bar{z}}\frac{\partial^2 g}{\partial\bar{t}\partial z}\Big\}+\Big|\frac{\partial g}{\partial t}\Big|^2\frac{\partial^2 g}{\partial z\partial\bar{z}}\Big)\geq 0 \quad \text{on } \partial R(t).$$

$$\therefore\ \frac{\partial^2 g}{\partial t\partial\bar{t}}\Big|_{t=0}\leq 2\,\Re\Big\{\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial^2 g}{\partial\bar{t}\partial z}\Big/\frac{\partial g}{\partial z}\Big\}\Big|_{t=0} \quad \text{on } \partial R(0)$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{\partial^2\lambda}{\partial t\partial\bar{t}}(0)&\leq\frac{2}{\pi}\,\mathrm{Im}\Big\{\int_{R(0)}\frac{\partial g}{\partial t}(0,z)\frac{\partial^2 g}{\partial\bar{t}\partial z}(0,z)dz\Big\}\\&=\frac{2}{\pi}\,\mathrm{Im}\Big\{\iint_{R(0)}d\Big(\frac{\partial g}{\partial t}(0,z)\frac{\partial^2 g}{\partial\bar{t}\partial z}dz\Big)\Big\}\\&=\frac{-4}{\pi}\iint_{R(0)}\Big|\frac{\partial^2 g}{\partial\bar{t}\partial z}\Big|^2dxdy.\end{aligned}$$

Case 2. $\partial R(0)$ が滑らかでない場合. $R(t)$ は前ページの図のような変動をする. $\lambda(t)$ は $B_0\setminus\cup_{k=1}^{\mu}\gamma_k$ では C^ω 級の優調和関数であり 且つ「 $\mathcal{R}|_{B_0}$ は擬凸状域である 」ことから，$\lambda(t)$ は B_0 全体で C^1 級関数であることが分かる．従って，$\lambda(t)$ は B_0 で優調和関数になる. なお 定理 1.1 の $\frac{\partial^2\lambda}{\partial t\partial\bar{t}}$ は $\partial R(t)$ が滑らかでない点 $t\in\gamma_k$ 対しては 超関数の意味の微分である. □

$\pi:\mathcal{R}\to B$ は 複素 2 次元正則族，$B=\{|t|<r\}\subset\mathbb{C}_t$, $R(t)=\pi^{-1}(t)$, $t\in B$ は $\mathcal{R}$ で 既約且つ non-singular とする. このとき 定理 1.1 の応用 及び その証明法から次を得る.

系 1.1. (同時一意化の定理)

仮定 (*i*) $\mathcal{R}$ は擬凸状域である.

(*ii*) 各 $R(t)$, $t\in B$ は平面領域と同相な放物型リーマン面である.

結論 $\mathcal{R}$ は $B\times\mathbb{C}_w$ の単葉域に正則同値である. 即ち $\mathcal{R}$ 上の π-正則変換 $(t,z)\in\mathcal{R}\to(t,w)=(t,f(t,z))\in B\times\mathbb{C}_w$ がある

系 1.2. (自明な正則族)

仮定 (*i*) $\mathcal{R}$ は擬凸状域である.

(*ii*) $R(0)$ は bordered リーマン面であって，円板と同値でない.

(*iii*) 各 $R(t)$, $t\in B$ はリーマン面として $R(0)$ と同値である.

結論 $(\mathcal{R},\pi,B)$ は正則族として 直積 $B\times R(0)$ と同値である.

岡先生が 1978 年に亡くなり，たくさんの遺稿が残された．それを 西野利雄先生と武内章先生が編集された (cf. [Ok-2]). その中に岡先生が京大へ提出された日本語の手書きの学位論文（第 VI 論文が出来るか出来ないかの時期）があった．ある頁に n 次元擬凸状域に

ついての2つの図が描かれていた．それを見て 次元が高い擬凸状域では動的な性質を含んでいる．次元が高い領域でも 実の調和関数が複素多変数的働きをするのではないか と思えた．次節はそれについて述べる．

2. $\mathbb{C}^n$ の領域の変動に関する2階変分不等式

$n\,(\geq 2)$ 次元空間 $\mathbb{C}^n_z$ で $t \in B = \{|t| < r\} \subset \mathbb{C}_t$ に対しての領域 $D(t)$ の変動を考える．

$$\mathcal{D} : t \in B \to D(t) \Subset \mathbb{C}^n_z$$

変動 $\mathcal{D}$ を $B \times \mathbb{C}^n_z$ の領域 $\mathcal{D} = \bigcup_{t\in B}(t, D(t))$ と同一視するとき，$\partial\mathcal{D} = \cup_{t\in B}(t, \partial D(t)) \subset B \times \mathbb{C}^n$ は滑らかと仮定する（各 $\partial D(t) \subset \mathbb{C}^n$, $t \in B$ は滑らかとは限らない）．

空間 $\mathbb{C}^n$ での実ラプラシアンを $\Delta_z = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_i}$ と書く．各 $t \in B$ に対して Green 関数 $g(t, z)$ 及び Robin 定数 $\lambda(t)$ for $(D(t, 0))$ が定まる．即ち

(i) $g(t, z)$ は $D(t) \setminus \{0\}$ で調和，i.e., $\Delta_z g(t, z) = 0$ in $D(t) \setminus \{0\}$.

(ii) $g(t, z) = \frac{1}{\|z\|^{2n-2}} + \lambda(t) + h(t, z)$ near $z = 0$, where $h(t, 0) = 0$.

(iii) $g(t, z) = 0$ on $\partial D(t)$.

$n \geq 2$ より $\underline{\lambda(t) < 0}$ である．

定理 2.1. $\mathcal{D}\,(\subset B \times \mathbb{C}_z)$ が $n+1$ 次元の擬凸状域ならば，次の *2*階変分不等式が成立する．

$$\frac{\partial^2 \lambda(t)}{\partial t \partial \bar{t}} \leq \frac{-4}{(n-1)\omega_{2n}} \iint_{D(t)} \Big(\sum_{i=1}^n \Big|\frac{\partial^2 g}{\partial t \partial \bar{z}_i}\Big|^2\Big)\, dV_z$$

但し，ω_{2n} は $\mathbb{R}^2_n$ の単位球面の面積である

[証明の方針] 2変数 (t, z) の Levi form

$$\mathcal{L}_{t,z}\varphi := \frac{\partial^2\varphi}{\partial t \partial \bar{z}}\Big|\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|^2 - 2\,\Re\Big\{\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial \bar{z}}\frac{\partial^2\varphi}{\partial \bar{t}\partial z}\Big\} + \Big|\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z \partial \bar{z}} \qquad \text{on } \partial\mathcal{D}$$

を使って $n+1$ 次元変数 $(t, z) = (t, z_1, \ldots, z_n)$ の <u>対角 Levi form</u> on $\partial\mathcal{D}$ を導入する：

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\varphi(t, z) &:= \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_{t,z_i}\,\varphi(t, z_i, \ldots, z_n) \\
&= \sum_{i=1}^n \Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t \partial \bar{t}}\Big|\frac{\partial\varphi}{\partial z_i}\Big|^2 - 2\,\Re\Big\{\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial \bar{z}_i}\frac{\partial^2\varphi}{\partial \bar{t}\partial z_i}\Big\} + \Big|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_i \partial \bar{z}_i}\Big) \\
&= \frac{\partial^2\varphi}{\partial t \partial \bar{t}}\big\|\nabla_z\varphi\big\|^2 - 2\,\Re\Big\{\sum_{i=1}^n \frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial \bar{z}_i}\frac{\partial^2\varphi}{\partial \bar{t}\partial z_i}\Big\} + \Big|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|^2\Delta_z\varphi.
\end{aligned}$$

- $\mathcal{D}$ が $(n+1)$ 次元の擬凸状域であるから，$\mathcal{L}\varphi(t, z_1, \ldots z_n) \geq 0$ on ∂D である．
- $-g(t, z_1, \ldots, z_n)$ は $\partial\mathcal{D}$ の定義関数である．

この2つから 定理 1.1 の計算と同じくして 定理2.1 を得る (cf. [Y-2]). □

系 2.1. 上の条件の下で $-\lambda(t)$ 及び $\log(-\lambda(t))$ は B 上の劣調和関数である．

実際，定理 2.1 より $-\lambda(t)$ は劣調和である．$\log(-\lambda(t))$ が劣調和であることは，拡大縮小変換 $(t, z) \to (t, w) = (t, \varphi(t)z)$ (但し，$\varphi(t) \neq 0$ は正則関数 on B) によって $D(t)$ が $\widetilde{D}(t)$ になったとすると，Green 関数 $\widetilde{g}(t, w)$ 及び Robin 定数 $\widetilde{(t)}$ for $(\widetilde{D}(t), 0)$ は

$\widetilde{g}(t,w)=|\varphi(t)|^{2-2n}g(t,z)$ 及び $|\varphi(t)|^{2-2n}(-\lambda(t))=-\widetilde{\lambda}(t)$ である．故に 全ての $\varphi(t)$ に対して $|\varphi(t)|^{2-2n}(-\lambda(t))$ 劣調和となり結論を得る． □

系 2.2. $D\subset\mathbb{C}^n_z$ は C^2 級滑らかな擬凸状域とする．各点 $\zeta\in D$ に対して Green 関数 $G(\zeta,z)$ 及び Robin 定数 $\Lambda(\zeta)$ for (D,ζ) を考える．

$$G(\zeta,z)=\frac{1}{\|z-\zeta\|^{1n-2}}\ +\ \Lambda(\zeta)+H(\zeta,z) \text{ near } z=\zeta, \text{ where } H(\zeta,\zeta)=0.$$

このとき

(1) $-\Lambda(\zeta)>0$ であり，D 上の強多重劣調和近似関数である．

(2) $\log(-\Lambda(\zeta))$ も D 上の強多重劣調和近似関数である．

[証明の方針] 各 $\zeta\in D$ に対して $D(\zeta)=\{w\in\mathbb{C}^n_w : w=z-\zeta\}\Subset\mathbb{C}^n_w$ と置き，平行移動の

$$\text{変動 } \mathcal{D}:\zeta\in D\to D(\zeta)\Subset\mathbb{C}^n$$

を得る．各 $D(\zeta)\ni 0, \forall\zeta\in D$ 且つ $\mathcal{D}=\cup_{\zeta\in D}(\zeta,D(\zeta))$ は複素 $2n$ 次元の擬凸状域である．

$$\lambda(\zeta):=\ \text{Robin 定数 for } D(\zeta,0),\quad \zeta\in D$$

は定理 2.1 から D での strictly psh fn である．更に，$\zeta\in D\to\partial D$ ならば dist $(\partial D(\zeta))\to 0$ から，Green 関数の性質により，$\lambda(\zeta)\to-\infty$ である．実ラプラシアンは平行移動で不変だから，$\Lambda(\zeta)=\lambda(\zeta)$ より (1) は示された．(2) も同様である． □

系 2.2 で述べた Robin 定数 $\Lambda(\zeta)$ for $(D(\zeta),\zeta)$ を <u>Robin 関数</u> on D と呼ぶ．系 2.2 から，$-\Lambda(\zeta)$ 及び $\log(-\Lambda(\zeta))$ は D 上の次のケーラー計量を生む：

$$ds^2=\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\frac{\partial^2(-\Lambda)}{\partial\zeta_\alpha\partial\overline{\zeta}_\beta}d\zeta_\alpha\otimes d\overline{\zeta}_\beta \quad \text{及び} \quad ds^2_\Lambda=\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\frac{\partial^2(\log(-\Lambda))}{\partial\zeta_\alpha\partial\overline{\zeta}_\beta}d\zeta_\alpha\otimes d\overline{\zeta}_\beta.$$

後者の ds^2_Λ を D の <u>$\Lambda-$ 計量</u> と呼ぶ．

3. $\mathbb{C}^n$ の領域の変動に関する 2 階変分公式
(N. Levenberg 氏との共同研究 (cf. [LY-1]))

変動 $\mathcal{D}$: $t\in B\to D(t)\Subset\mathbb{C}^n$ が <u>滑らかな変動</u> とは

$$\mathcal{D}:=\bigcup_{t\in B}(t,D(t))\subset B\times\mathbb{C}^n,\qquad \partial\mathcal{D}:=\bigcup_{t\in B}(t,\partial D(t))\subset B\times\mathbb{C}^n$$

と置くとき $\partial\mathcal{D}$ は $B\times\mathcal{D}$ で C^∞ 級滑らかであり 且つ 各 $\partial D(t), t\in B$ は $\mathbb{C}^n$ で C^∞ 級滑らかであるときを言う．$\varphi(t,z)$ を $\partial\mathcal{D}$ の定義関数とし 次の C^∞ 級実関数を導入する．

$$k_2(t,z):=\mathcal{L}\varphi(t,z)/\|\nabla_z\varphi(t,z)\|^3 \quad \text{on } \partial\mathcal{D}$$

但し，$\mathcal{L}\varphi(t,z)$ は対角 Levi form on $\partial\mathcal{D}$ である．

$k_2(t,z)$ は定義関数の $\varphi(t,z)$ の取り方に依らない．即ち (実 $2n-1$ 次元) 境界曲面 ∂D の曲がり具合を示す値である．$\mathcal{D}\supset B\times\{0\}$ とすると 各 $t\in B$ に対して Green 関数 $g(t,z)$ 及び Robin 定数 $\lambda(t)$ for $(D(t),0)$ が定まる．

$$g(t,z)=\frac{1}{\|z\|^{2n-2}}+\lambda(t)+h(t,z) \ \text{ near } z=0, \ \text{ where } h(t,0)=0.$$

このとき 定理 2.1 の証明を改良して次を得る．

定理 3.1. (2 階変分公式)

$$\boxed{\frac{\partial^2\lambda(t)}{\partial t\partial\bar{t}} = -c_n\int_{\partial D(0)} k_2(t,z)\|\nabla_z g(t,z)\|^2 dS_z - 4\,c_n\iint_{D(t)}\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big|\frac{\partial^2 g}{\partial\bar{t}\partial z_i}\Big|^2\Big)\,dV_z}$$

$$\text{where } c_n = 1/(n-1)\omega_{2n},\quad \omega_{2n} \text{ は } \mathbb{R}^{2n} \text{ の単位球面面積.}$$

良く知られているのは Hadamard の一階変分公式

$$\frac{\partial\lambda(t)}{\partial t} = -c_n\int_{\partial D(t)} k_1(t,z)\|\nabla_z g(t,z)\|^2 dS_z$$

$$\text{where}\quad k_1(t,z) = \tfrac{\partial\varphi}{\partial t}/\|\nabla_z\varphi(t,z)\| \text{ on } \mathcal{D}.$$

これを使って 一変数の等角写像の観点から多くのリーマン面の研究がなされた (cf. [SS]).

2 階変分公式を 系 2.2 で述べた Robin 関数 $\Lambda(\zeta)$ on D に応用する. 定理 3.1 を次の平行移動の

$$\text{変動}\ \ \mathcal{D}:\ \ \zeta\in D\to D(\zeta)=\{w\in\mathbb{C}^n : w = z-\zeta, z\in D\}\Subset\mathbb{C}^n$$

に適用する. $\psi(z)$ は ∂D の定義関数であって $\mathbb{C}^n$ で有界な C^∞ 級関数とする. 点 $\zeta\in\mathbb{C}^n\setminus\overline{D}\,(=D')$ に対しても Green 関数 $G(\zeta,z)$ 及び Robin 定数 $\Lambda(\zeta)$ は定義される.

$$G(\zeta,z) = \frac{1}{\|z-\zeta\|^{2n-2}} + \Lambda(\zeta) + H(\zeta,z)\quad \text{in } D',\quad \text{where } H(\zeta,\zeta)=0.$$

$\mathbb{C}^n$ での次の実関数を考える.

$$\lambda(\zeta) := \begin{cases} \Lambda(\zeta)\,\psi(\zeta)^{2n-2} & \text{if }\ \zeta\in D\cup D', \\ -\|\nabla\psi(\zeta)\|^{2n-2} & \text{if }\ \zeta\in\partial D. \end{cases}$$

補題 3.1. $\lambda(\zeta)<0$ であり, $\mathbb{C}^n$ での C^2 級滑らかな関数である.

$\lambda(\zeta)$ は次の具体的意味を持つ. $\zeta\in D\cup D'$ に対して 拡大縮小変換

$$w = T_\zeta(z) = \frac{z-\zeta}{-\psi(\zeta)}$$

を行い, 領域の変動: $\zeta\in\mathbb{C}^n\to D(\zeta)\subset\mathbb{C}^n$ を考える.

$$D(\zeta) = \begin{cases} T_\zeta(D) & \text{if }\ \zeta\in D, \\ \{\ w\in\mathbb{C}^n_w : 2\Re\big\{\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial\psi}{\partial z_\alpha}(w_\alpha)\big\}\ -1<0\ \} & \text{if }\ \zeta\in\partial D, \\ T_\zeta(D') & \text{if }\ \zeta\in D'. \end{cases}$$

各 $D(\zeta)\ni 0$, $\zeta\in\mathbb{C}^n$ より Green 関数 $g(\zeta,w)$ 及び Robin 定数 $\lambda(\zeta)$ for $(D(\zeta),0)$ が定まるが この $\lambda(\zeta)$ が上に定義したものである.

$$g(\zeta,w) = G(\zeta,z)\psi(\zeta)^{2n-2},\qquad \lambda(\zeta)=\Lambda(\zeta)\psi(\zeta)^{2n-2}.$$

系 3.1. (Λ の境界挙動) $D \Subset D$ は ∂D が滑らかな領域とする．$\xi_0 \in \partial D,\ \xi \in D$ に対して

$$\lim_{\zeta\to\zeta_0} \Lambda(\zeta)\psi(\zeta)^{2n-2} = -\|\nabla\psi(\zeta_0)\|^{2n-2}$$

$$\lim_{\zeta\to\zeta_0} \frac{\partial\Lambda}{\partial\zeta_\alpha}(\zeta)\psi(\zeta)^{2n-1} = (2n-2)\frac{\partial\psi}{\partial\zeta_\alpha}(\zeta_0)\|\nabla\psi(\zeta_0)\|\|^{2n-2}$$

$$\lim_{\zeta\to\zeta_0} \frac{\partial^2\Lambda}{\partial\zeta_\alpha\partial\overline{\zeta}_\beta}(\zeta)\psi(\zeta)^{2n} = -(2n-1)(2n-2)\frac{\partial\psi}{\partial\zeta_\alpha}(\zeta_0)\frac{\partial\psi}{\partial\overline{\zeta}_\beta}(\zeta_0)\|\nabla\psi(\zeta_0)\|^{2n-2}$$

$$\lim_{\zeta\to\zeta_0} \frac{\partial^2\log(-\Lambda)}{\partial\zeta_\alpha\partial\overline{\zeta}_\beta}(\zeta)\psi(\zeta)^{2} = (2n-2)\frac{\partial\psi}{\partial\zeta_\alpha}(\zeta_0)\frac{\partial\psi}{\partial\overline{\zeta}_\beta}(\zeta_0)$$

系 3.2. $-\Lambda(\zeta)$ 及び $\log(-\Lambda(\zeta))$ から生じる計量は次で表される．$a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{C}^n$ に対して

$$\boxed{\begin{aligned}&\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\frac{\partial^2(-\Lambda(\zeta))}{\partial\zeta_\alpha\partial\overline{\zeta}_\beta}\,a_\alpha\overline{a}_\beta\\ &= c_n\int_{\partial D} K_2(a,z)\|\nabla_z G(\zeta,z)\|^2 dS_z + 4c_n\iint_D \sum_{\alpha=1}^{n}\Big|\sum_{\beta=1}^{n} a_\alpha\frac{\partial}{\partial\overline{z}_\alpha}G_\beta(\zeta,z)\Big|^2 dV_z\end{aligned}}$$

where

$$K_2(a,z) = \frac{1}{\|\nabla_z\psi\|^3}\Big(\Big|\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial\psi}{\partial z_\alpha}a_\alpha\Big|^2\Delta_z\psi - 2\Re\Big\{\Big(\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial\psi}{\partial z_\alpha}\Big)\Big(\sum_{i,\beta=1}^{n}\frac{\partial\psi}{\partial\overline{z}_i}\frac{\partial^2\psi}{\partial z_i\partial\overline{z}_\beta}\overline{a}_\beta\Big)\Big\}$$
$$+\Big(\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\frac{\partial^2\psi}{\partial z_\alpha\partial\overline{z}_\beta}a_\alpha\overline{a}_\beta\Big)\|\nabla_z\psi\|^2\Big),$$

$$G_\beta(\zeta,z) = \Big(\frac{\partial G}{\partial\zeta_\beta}+\frac{\partial G}{\partial z_\beta}\Big)(\zeta,z) \quad \text{in } D\times D, \quad \text{オイラー関数.}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\sum_{\alpha,\beta}^{n}\frac{\partial^2\log(-\Lambda(\zeta))}{\partial\zeta_\alpha\partial\overline{\zeta}_\beta}a_\alpha\overline{a}_\beta\\ &= \frac{1}{(n-1)\omega_{2n}(-\Lambda(\zeta))}\int_{\partial D}K_2(z,\theta)\|\nabla_z G(\zeta,z)\|^2 dS_z\\ &+\frac{4}{(n-1)\omega_{2n}(-\Lambda(\zeta))}\iint_D\Big(\sum_{\beta=1}^{n}\Big|\frac{\partial}{\partial\overline{z}_\beta}H(a,\zeta,z)\Big|^2\Big)dV_z\end{aligned}}$$

where

$$K_2(z,\theta)= \frac{1}{\|\nabla_z\psi\|^3}\ \Big(\ \big|\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial\psi}{\partial z_\alpha}\theta_\alpha\big|^2\Delta_z\psi-2\,\Re\big\{\sum_{\alpha,\beta,i=1}^{n}\frac{\partial\psi}{\partial z_\alpha}\frac{\partial^2\psi}{\partial\overline{z}_\beta\partial z_i}\frac{\partial\psi}{\partial\overline{z}_i}\theta_\alpha\overline{\theta}_\beta\big\}$$

$$+\Big(\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\frac{\partial^2\psi}{\partial z_\alpha\partial\overline{z}_\beta}\theta_\alpha\overline{\theta}_\beta\Big)\ \|\nabla_z\psi\|^2\Big)\ \in\mathbb{R},$$

$$H(a,\zeta,z)=\frac{-c}{2}\Big(G+\frac{1}{n-1}\sum_{\beta=1}^{n}(z_\beta-\zeta_\beta)\frac{\partial G}{\partial z_\beta}\Big)\ +\ \sum_{\beta=1}^{n}a_\beta\Big(\frac{\partial G}{\partial\zeta_\beta}+\frac{\partial G}{\partial z_\beta}\Big)\in\mathbb{C},$$

$$\theta=\theta(a,\zeta,z)=\frac{-c}{2n-2}(z-\zeta)+a\in\mathbb{C}^n,$$

$$c=\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial\log(-\Lambda(\zeta))}{\partial\zeta_\alpha}\ a_\alpha\in\mathbb{C}.$$

上の等式より次が導かれる

系 3.3. $D\Subset\mathbb{C}^n$ は ∂D が滑らかな擬凸状域とする．このとき

(1) $K(\zeta,\zeta)$ を D の Bergman 核とすれば，$\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial^2(-\Lambda(\zeta))}{\partial\zeta_\alpha\partial\overline{\zeta}_\alpha}\geq\frac{n}{c_n}\ K(\zeta,\zeta)$ on D.

(2) $\zeta_0\in\partial D$, γ は D 内の曲線で ζ_0 に収束し 且つ ユークリッドの長さは有限ならば D での Λ-計量 ds^2_Λ に対して $\int_\gamma ds=+\infty$.

(3) 点 $\zeta_0\in\partial D$ に対して T_{ζ_0} を ∂D の複素接平面とする．簡単のために $\zeta_0=0$ 且つ T_{ζ_0}： $z_n=0$ とする．

- 点 ζ_0 が ∂D の強擬凸状点とは $\varphi(z)$ を ∂D の定義関数とするとき $\big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_i\partial\overline{z}_j}(\zeta_0)\big)_{i,j=1,\ldots,n-1}>0$ のときを言う．
- 点 ζ_0 が ∂D の non-degenerate 点とは $\big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_i\partial z_j}(\zeta_0)\big)_{i,j=1,\ldots,n-1}\neq 0$ のときを言う．

∂D の各点が 強擬凸状点 か non-degenerate 点ならば D 上の 計量 ds^2_Λ は完備である．

擬凸状域 D 上の Λ-計量 ds^2_Λ は実調和関数から作られたものだから D の正則変換に対して不変ではない．一般に研究されている重要な計量 Bergman 計量，小林計量，Caratheodory 計量などは全て変換に不変な計量である．従って Λ-計量はこれらの計量とは関係ないだろうと思っていた．最近 インドの数学者 K. Verma 氏と D. Borah 氏は Λ-計量 ds^2 の 正則切断曲率を計算して, 例えば 次の結果を示している (cf. [BV], [Bo]).

1. (comparable property) $D\Subset\mathbb{C}^n$ は滑らかな境界 ∂D の強擬凸状域とする．このとき 定数 $C\geq 1$ が存在して

$$\frac{1}{C}\ d_B(p,q)\leq d_\Lambda(p,q)\leq C\ d_B(p,q),\quad \forall\ p,q\in D.$$

但し，$d_B(p,q)$ 及び $d_\Lambda(p,q)$ は 2 点 p,q の Bergman 距離 及び ds^2_Λ の距離である．

2. $H^{p,q}_2(D)$ を Λ-計量 ds^2_Λ に関する L^2-harmonic forms の作る空間とすれば

$$\dim H^{(p,q)}_2(D)=\begin{cases}0 & \text{if } p+q\neq n,\\ \infty & \text{if } p+q=n.\end{cases}$$

2. は Bergman 計量で知られている大沢の定理の Λ-計量版である (cf: [O]).

$\mathbb{C}^n$ の領域の変動 $\mathcal{D}: t\in B\to D(t)\subset\mathbb{C}^n$ に関する 2 階変分公式の証明は 一節で述べたリーマン面の変動 $\mathcal{R}: t\in B\to R(t)$ に適用できる (米谷氏との共同研究 (cf. [M-Y])).

定理 3.2. (リーマン面の変動に関する 2 階変分公式)

$$\boxed{\frac{\partial^2\lambda(t)}{\partial t\partial\bar t} = -\frac{1}{\pi}\int_{\partial R(t)} k_2(t,z)\Big|\frac{\partial g(t,z)}{\partial z}\Big|^2 ds_z - \frac{4}{\pi}\iint_{R(t)}\Big|\frac{\partial^2 g(t,z)}{\partial\bar t\partial z}\Big|^2 dxdy}$$

但し, $k_2(t,z)=\mathcal{L}\varphi(t,z)/\left|\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|^3$ on $\partial\mathcal{R}$, φ は $\partial\mathcal{R}$ の定義関数である

リーマン面 R の Bergman 計量 $K(\zeta)|d\zeta|^2$ と Robin 関数 $\lambda(\zeta)$ とは吹田氏 による次の関係: $K(\zeta)=\frac{\partial^2(-\lambda(\zeta))}{\partial\zeta\partial\bar\zeta}$ がある (cf. [Su]). これと上の 2 階変分公式から次を得る.

系 3.4. リーマン面 $R(t)$ の Bergman 計量を $K(t,\zeta)|d\zeta|^2$ と書く. $\mathcal{R}=\cup_{t\in B}(t,R(t))$ が 2 次元の擬凸状域ならば $\log K(t,\zeta)$ は $\mathcal{R}$ 上で多重劣調和である.

4. 複素多様体の領域の変動に関する 2 階変分公式

(K-T. Kim, N. Levenberg 氏との共同研究 ((cf.[KLY])))

M は $n\,(\geq 2)$ 次元複素多様体 (compact or non-compact) とする. M 上のエルミート 計量 $ds^2=\sum_{a,b=1}^n g_{a\bar b}dz_a\otimes d\bar z_b$ を一つ定め 次の記号を使う.

実 $(1,1)$ 形式 $\omega := i\sum_{a,b=1}^n g_{a\bar b}dz_a\wedge d\bar z_b$,

逆行列 $(g^{\bar a b})=(g_{a\bar b})^{-1}$, 行列式 $G:=\det(g_{a\bar b})$,

体積要素 $\omega^n = 2^n n! G dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{2n}$ where $z_k=x_{2k-1}+ix_{2k}$,

M の領域 D の関数 u に対する 実ラプラス微分作用素

$$\Delta = -\frac{1}{2}\,(\delta\bar\partial+\bar\partial\delta+\bar\delta\partial+\partial\bar\delta),$$

$$\Delta u = \sum_{a,b=1}^n g^{\bar b a}\frac{\partial^2 u}{\partial\bar z_b\partial z_a} + \frac{1}{2}\sum_{a,b=1}^n\Big(\frac{1}{G}\frac{\partial(Gg^{\bar b a})}{\partial z_a}\frac{\partial u}{\partial\bar z_b}+\frac{1}{G}\frac{\partial(Gg^{\bar a b})}{\partial\bar z_a}\frac{\partial u}{\partial z_b}\Big).$$

M 上の C^∞ 級実関数 $c(z)\geq 0$ を固定する. 領域 $D\subset M$ での C^2 級の関数 $u(z)$ が

$$\Delta u - cu = 0 \quad \text{on } D$$

を満たすとき $u(z)$ は D での $c-$ 調和関数 と呼ぶ. 定点 $p_0\in M$ に対して p_0 の小近傍 V には 次の実関数 $Q_0(z)$ が存在する. $Q_0(z)$ は $V\setminus\{p_0\}$ で $c-$ 調和であって

$$\lim_{p\to p_0} Q_0(p)d(p,p_0)^{2n-1}=1$$

但し, $d(p,p_0)$ は 2 点 p, p_0 の ds^2 距離である. この $Q_0(p)$ を作用素 $\Delta - c$ の点 p_0 における 基本解 と呼ぶ.

領域 $D\Subset M$ の境界は滑らかで $D\ni p_0$ とする. 極 $Q_0(z)$ を持つ D 上の関数 $g(z)$ が一意的に存在する:

(i) $g(z)$ は $D\setminus\{p_0\}$ で $c-$ 調和である.

(ii) $g(p)=Q_0(z)+\lambda+h(p)$ near p_0, where $h(p_0)=0$.

(iii) $g(p)=0$ on ∂D.

$g(z)$ を $\underline{c\text{−Green 関数}}$, 定数項 λ を $\underline{c\text{−Robin 定数}}$ for (D, p_0) ($Q_0(p)$ に関する) と呼ぶ.

$B = \{|t| < r\} \subset \mathbb{C}_t$ とし 領域 $D(t)$ の滑らかな

$$変動\ \mathcal{D} : t \in B \to D(t) \Subset M$$

を考える. 定理 3.1 と同じ計算によって次の複素多様体の領域の変動に関する 2 階変分公式を得る.

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{\partial^2 \lambda}{\partial t \partial \bar{t}}(t)\\ &\quad = -c_n \int_{\partial D(t)} k_2(t,z) \|\nabla_z g(t,z)\|^2 d\sigma_z - \frac{c_n}{2^{n-2}} \Big\{ \|\bar{\partial} \frac{\partial g}{\partial t}\|^2_{D(t)} + \frac{1}{2} \|\sqrt{c}\ \frac{\partial g}{\partial t}\|^2_{D(t)} \Big\}\\ &\qquad + \frac{1}{2^{2n-1}} \Re \int_{D(0)} \frac{\partial g}{\partial t} \Big(\frac{1}{i} \partial * \omega \wedge \bar{\partial} \frac{\partial g}{\partial \bar{t}} + \frac{1}{i} \bar{\partial} * \omega \wedge \partial \frac{\partial g}{\partial \bar{t}} \Big)\end{aligned}}$$

where

$$k_2(t,z) := \Big(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial \bar{t}} \|\nabla_z \psi\|^2 - 2\Re \Big\{ \frac{\partial \psi}{\partial t} \Big(\sum\nolimits_{a,b=1}^{n} g^{\bar{a}b} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}_a} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{t} \partial z_b} \Big) \Big\} + \Big|\frac{\partial \psi}{\partial t}\Big|^2 \Delta_z \psi \Big) / \|\nabla_z \psi\|^3$$

$$\|\nabla_z \psi(z)\|^2 := \sum\nolimits_{a,b=1}^{n} g^{\bar{a}b}(z) \frac{\partial \psi(z)}{\partial \bar{z}_a} \frac{\partial \psi(z)}{\partial z_b}$$

$\psi(t,z)$ は $\partial \mathcal{D}$ の定義関数である.

今後, エルミート計量 ds^2 は次の条件を満たすと仮定する.

$$\partial * \omega \ (= \frac{1}{2} d\omega \wedge \omega^{2n-2}) = 0 \quad \text{on } M.$$

定理 4.1. (2 階変分公式)

$$\boxed{\frac{\partial^2 \lambda(t)}{\partial t \partial \bar{t}} = -c_n \int_{\partial D(t)} k_2(t,z) \|\nabla_z g(t,z)\|^2 d\sigma_z - \frac{c_n}{2^{n-2}} \Big\{ \|\bar{\partial} \frac{\partial g}{\partial t}\|^2_{D(t)} + \frac{1}{2} \|\sqrt{c}\ \frac{\partial g}{\partial t}\|^2_{D(t)} \Big\}}$$

系 4.1. $\mathcal{D} \subset B \times M$ は $(n+1)$ 次元の擬凸状域とすれば

(1) $-\lambda(t)$ は B 上の劣調和関数である.

(2) $-\lambda(t)$ がある点 $t_0 \in B$ で $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial t \partial \bar{t}}(t_0) = 0$ ならば,

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t_0, z) \equiv 0 \quad \text{on } D(t_0) \cup \partial D(t_0).$$

故に c−Green 関数 $g(t,z)$ の性質から 変動 $\mathcal{D} : t \in B \to D(t) \subset M$ は瞬間的に 時刻 t_0 で止まっている. この待遇を取ると

(2') $\partial \mathcal{D}$ の定義関数 $\psi(t,z)$ が $\frac{\partial \psi}{\partial t}(t_0, z) \not\equiv 0$ on $\partial D(t_0)$ ならば, $\frac{\partial^2(-\lambda)}{\partial t \partial \bar{t}}(t_0) > 0$.

(3) $-\lambda(t)$ が B 上で 調和関数ならば, $B \times M$ の集合として $\mathcal{D} = B \times D(0)$.

$\mathcal{A}(M)$ を M の自己同形変換の全体, $\mathcal{V}(M)$ を M の正則ベクトル場の全体 及び $B = \{|t| < r\} \subset \mathbb{C}$ とする. 自己同形変換の

$$変動\ \mathcal{F} : t \in B \to F(t, \cdot) \in \mathcal{A}(M)$$

を考える．但し，$F(t,\cdot)$ は $t \in B$ についても正則である．各 $t \in B$ に対して $w = F(t,z)$ の逆変換 $z = \Phi(t,w) = (\phi_1(t,z), \ldots, \phi_n(t,w))$ を用いると

$$\Theta(t,z) := \sum\nolimits_{k=1}^{n} \frac{\partial \phi_k}{\partial t}(t, F(t,z)) \frac{\partial}{\partial z_k} \in \mathcal{V}(M)$$

である．従って ベクトル場の

$$\text{変動 } \Theta : t \in B \to \Theta(t,z) \in \mathcal{V}(M)$$

を得る．滑らかな ∂D の領域 $D \subset M$ を固定し, 領域の

$$\text{変動 } \mathcal{D} : t \in B \to D(t) = F(t,D) \subset M$$

を得る．今，$\exists\, p_0 \in D(t)$, $\forall t \in B$ と仮定し，点 p_0 における $\Delta - c$ の基本解 $Q_{p_0}(z)$ を固定する．各 $t \in B$ に対して, c−Green 関数 $g(t,z)$ 及び c−Robin 定数 $\lambda(t)$ for $(D(t), p_0)$ が定まるが, 系 4.1 から 次を得る．

補題 4.1. $D \Subset M$ が擬凸状域ならば

(1) $-\lambda(t)$ は B 上の劣調和関数である．

(2) $-\lambda(t)$ が或る点 $t_0 \in B$ で $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial t \partial \bar{t}}(t_0) = 0$ であるための必要十分条件は M のベクトル場 $\Theta(t_0, z)$ が "tangential along ∂D" 即ち 任意の点 $\zeta \in \partial D$ に対して ζ を通る $\Theta(t_0,z)$ の解曲線 γ_ζ は $\gamma_\zeta \subset \partial D$ である．故に

$$\bigcup\nolimits_{\zeta \in D} \gamma_\zeta = D,\ \ \bigcup\nolimits_{\zeta \in \partial D} \gamma_\zeta = \partial D,\ \ \bigcup\nolimits_{\zeta \in \overline{D}^c} \gamma_\zeta = \overline{D}^{\,c}.$$

但し, $\zeta \in D$ に対して $\gamma_\zeta \Subset D$ とは限らない．

複素リー群 M 及び 複素等質空間 M について, "滑らかな境界 ∂D の領域 $D \Subset M$ が擬凸状域であるが Stein 領域ではない，i.e., D には strictly psh exh fn は存在しない" そのような擬凸状域の分類を D 上の c−Robin 関数 $\Lambda(\zeta)$ を作って示す．

Case 1. M は $n\,(\geq 2)$ 次元複素リー群，その単位元 e とし，次の記号を用いる．

ds^2 : M 上のケーラー計量,

Δ : 計量 ds^2 による M 上の実ラプラス微分作用素,

$c(z)$: M 上の $c(z) > 0$ なる C^∞ 級関数,

$Q_e(z)$: $\Delta - c$ に関する 単位元 e の近傍での基本解,

$\mathfrak{X}$: M 上の左不変正則ベクトル場の全体,

$\mathfrak{g}$: $\mathfrak{X}$ に対応する複素リー環,

$\zeta \exp tX$: 初期値 $\zeta \in M$ の $X \in \mathfrak{X}$ の解曲線.

$D \Subset M$ は境界が滑らかな擬凸状域とする．点 $\zeta_0 \in D$ 及び ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}$ を固定する．小円板 $B = \{|t| < r\}$ を取れば $\zeta_0 \exp tX \subset D$, $t \in B$ である．各 $t \in B$ に対して M の自己同型変換 $z \in M \to w = F(t,z)\zeta = z(\zeta_0 \exp tX)^{-1} \in M$ から, M の領域の

$$\text{変動 } \mathcal{D} :\ t \in B \to F(t,D) = D(\zeta_0 \exp, tX)^{-1} \subset M$$

を得る．$F(t,D) \ni e$, $\forall t \in B$ より 補題 4.1 の情勢である．各 $t \in B$ に対して $w = F(t,z)$ の逆変換 $z = \Phi(t,w) = w(\zeta \exp tX)$ から M のベクトル場 $\Theta(t,z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi_i}{\partial t}(t, F(t,z)) \frac{\partial}{\partial z_i}$ が定まったが，今の場合

$$\Theta(t,z) = X(z)$$

となり $t \in B$ に依らない．c−Robin 定数 $\lambda(t)$ for $(D(t), e)$ は補題 4.1 から

系 **4.2.**

(1) $\frac{\partial^2(-\lambda(t))}{\partial t\partial\bar{t}} \geq 0$ on B.

(2) もし或る点 $t_0 \in B$ で $\frac{\partial^2\lambda}{\partial t\partial\bar{t}}(t_0) = 0$ ならば，X は tangential along ∂D. 故に $D \cdot \exp tX = D$, $\forall t \in \mathbb{C}$.

3 節で述べた $\mathbb{C}^n$ の領域 D の平行移動の変動で作成した Robin 関数 $\Lambda(\zeta)$ と同じ方法で次のように, M の領域 D 上に Robin 関数 $\Lambda(\zeta)$ を作れる．領域 $D \Subset M$ は境界が滑らかな擬凸状域とする．

$$\text{変動 } \mathcal{D}:\ \zeta \in D \to D(\zeta) = D\zeta^{-1} \Subset M$$

を考えると

- $\mathcal{D} = \bigcup_{\zeta\in D}(\zeta, D(\zeta)) \subset D \times M$ は $2n$ 次元の擬凸状域である．
- $e \in D(\zeta)$, $\forall \zeta \in D$.
- $\zeta \in D \to \partial D$ ならば $\mathrm{dist}(\partial D, e) \to 0$.

各 $\zeta \in D$ に対して c−Green 関数 $G(\zeta, z)$ 及び c−Robin 定数 $\Lambda(\zeta)$ for (D, ζ) が定まる:

$$G(\zeta, z) = Q_0(z) + \Lambda(\zeta) + h(\zeta, z) \quad \text{near } \zeta, \text{ where } h(\zeta, \zeta) = 0.$$

定理 4.1 から，$-\Lambda(\zeta)$ は D 上の psh exh fn である．$\Lambda(\zeta)$ を D の Robin 関数と呼ぶ．

仮定 $-\Lambda(\zeta)$ は D 上の strictly psh exh fn ではない．

即ち 或る点 $\zeta_0 \in D$ において 一次独立な $q (1 \leq q \leq n-1)$ 個のベクトル場 $X_i \in \mathfrak{X}$ が存在して

$$\frac{\partial^2\Lambda(\zeta_0 \exp\, tX_i)}{\partial t\partial\bar{t}}\Big|_{t=0} = 0 \quad (i = 1, \ldots, q).$$

故に 補題 4.1 (2) から

$$D \exp tX_i = D, \quad \forall t \in \mathbb{C}, \quad (i = 1, \ldots, q).$$

帰納的に

$$\begin{cases} D \cdot \left(\prod_{k=1}^{m} \exp t_k X_{j_k}\right) = D, & \forall m \in \mathbb{Z}^+,\ \forall t_k \in \mathbb{C},\ 1 \leq \forall j_k \leq q, \\ \Lambda\left((\zeta_0 \prod_{k=1}^{m} \exp t_k X_{j_k})\right) = \Lambda(\zeta_0), & \forall m \in \mathbb{Z}^+,\ \forall t_k \in \mathbb{C},\ 1 \leq \forall j_k \leq q. \end{cases}$$

これより Robin 関数 $\Lambda(\zeta)$ の次の基本的性質を得る．

$$「\ \mathfrak{X}_{\zeta_0} := \left\{X \in \mathfrak{X} : \frac{\partial^2\Lambda(\zeta_0 \exp\, tX)}{\partial t\partial\bar{t}}\Big|_{t=0} = 0\right\} \text{ は } \mathfrak{X} \text{ の部分リー環である}\ 」$$

$\mathfrak{X}_{\zeta_0}$ の対応する M のリー部分群を H 書くと

定理 4.2. $D \Subset M$ は滑らかな境界の non-Stein 擬凸状域とすれば

I. 次を満たす M のリー部分群 H が一意的に存在する．

1) $1 \leq \dim H \leq n-1$.
2) $D = \bigcup_{z\in D} zH$ with $zH \Subset D$.
3) (H の最大性) 任意の generarized 正則曲線 $\ell := \{z = z(t) : t \in \mathbb{C}\} \Subset D$ に対して $\exists z_0 \in D$ such that $\ell \subset z_0 H$.

II. 更に H が closed in M ならば (一般論から H はトーラス) であり, 射影 $\pi:\ M \to M/H$ に対して $D_0 := D/H$ 書くと

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[d, "\pi"'] & \Supset & D \arrow[d, "\pi"] & \text{non-Stein with smooth } \partial D \\
M/H & \Supset & D_0 & \text{Stein with smooth } \partial D_0
\end{tikzcd}
$$

Case 2. M は n 次元複素等質空間とし 次の記号を用いる.

G: M に推移的リー変換群, 単位元 e, $\dim G = m$,
ds^2 : G 上のケーラー計量,
Δ : 計量 ds^2 による G 上の実ラプラス微分作用素,
$c(z)$: G 上の $c(z) > 0$ なる C^∞ 級関数,
$Q_e(z)$: $\Delta - c$ に関する 単位元 e の近傍での基本解,
$\mathfrak{X}$: G 上の左不変正則ベクトル場の全体,
$\mathfrak{g}$: $\mathfrak{X}$ に対応する複素リー環,
H_z : 点 $z \in M$ の isotropy 群 $\{g \in G : g(z) = z\}$, $\dim H_z = m - n\,(\geq 0)$,
$\mathfrak{h}_z$: H_zに対応する $\mathfrak{g}$ の部分リー環.

$$
\begin{tikzcd}
& G \ni g \arrow[dl, "\pi_z"'] \arrow[dr, "\psi_z"] & \\
gH_z \in G/H_z \arrow[rr, shift left, "\alpha_z"] & & M \ni g(z) \arrow[ll, shift left]
\end{tikzcd}
\qquad \alpha_z \circ \pi_z = \psi_z
$$

領域 $D \subset M$ は 境界が滑らかな擬凸状域とする. 各 $z \in D$ に

$$D(z) := \psi_z^{-1}(D) = \{g \in G : g(z) \in D\} \subset G$$

を対応させると 次の性質を持つ リー群 G の領域変動を得る.

変動 $\mathcal{D}$: $z \in D \to D(z) \subset G$

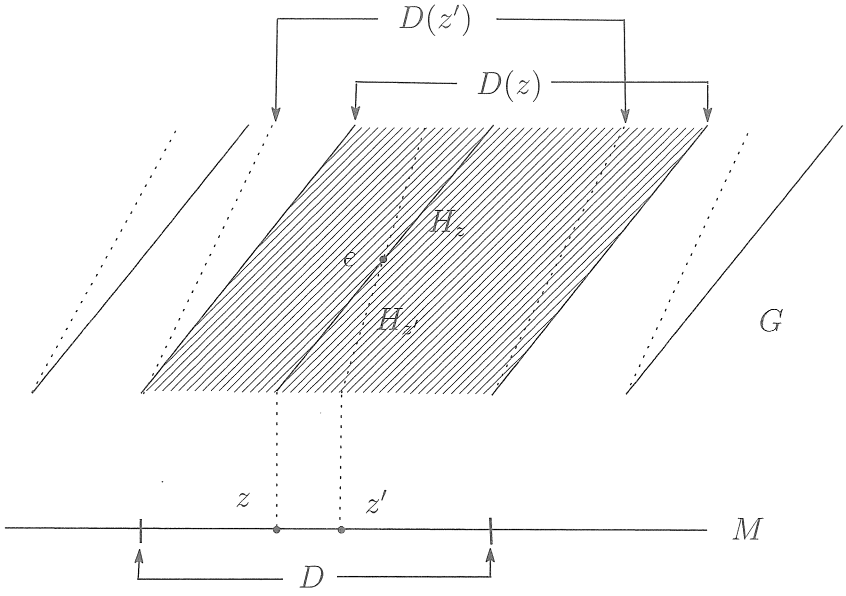
(i) $\mathcal{D} = \bigcup_{z \in D}(z, D(z)) \subset D \times G$ は $(n+m)$ 次元の擬凸状域である.
(ii) $D(z) \supset H_z \ni e$.
(iii) $z \in D \to \partial D$ in M ならば $\mathrm{dist}\,(\partial D(z), e) \to 0$ in G.
(iv) $D(h(z)) = D(z)h^{-1}$ in G, $\forall\, z \in D$, $\forall\, h \in D(z)$.

各 $z \in D$ に対して c–Green 関数 $G(,\zeta)$ 及び c–Robin 定数 $\Lambda(z)$ for $(D(z), e)$ が定まる.

$$G(z,\zeta) = Q_e(\zeta) + \Lambda(z) + h(z,\zeta) \quad \text{near } e, \text{ where } h(z,e) = 0.$$

定理 4.1 から $-\Lambda(z)$ は D 上の psh exh fn [1] である. $\Lambda(\zeta)$ を D の c–Robin 関数と呼ぶ.

[1]定理 4.1 では 条件: $D(t) \Subset M$ を用いたが ここの $D(z) \not\Subset G$ であり, 直接には応用出来ない. しかしリー群 G には psh exh fn が存在する (cf. [K]) ことを使って, 通常の近似の方法で証明できる.



<u>仮定</u> Robin 関数 $-\Lambda(z)$ は D 上の strictly psh exh fn ではない.

即ち $\exists z_0 \in D$ such that 独立な q $(1 \le q \le n-1)$ 個の $X_i \in \mathfrak{X}$ modulo $\mathfrak{h}_{z_0}$ が存在して

$$\frac{\partial^2(-\Lambda)(\exp tX_i(z_0))}{\partial t \partial \bar{t}}\Big|_{t=0} = 0, \quad (i = 1, \ldots, q).$$

補題 4.1 (2) から

$$D(\exp tX_i(z_0)) = D(z_0) \quad \text{in } G, \ \forall t \in \mathbb{C}.$$

帰納的に

$$\begin{cases} D\big((\prod_{k=1}^m \exp t_k X_{j_k})(z_0)\big) = D(z_0), & \forall m \in \mathbb{Z}^+, \ \forall t_k \in \mathbb{C}, \ 1 \le j_k \le q, \\ \Lambda\big((\prod_{k=1}^m \exp t_k X_{j_k})(z_0)\big) = \Lambda(z_0), & \forall m \in \mathbb{Z}^+, \ \forall t_k \in \mathbb{C}, \ \forall t_k \in \mathbb{C}, \ 1 \le j_k \le q. \end{cases}$$

これより Robin 関数 $\Lambda(z)$ の次の基本的性質を得る.

「$\mathfrak{X}_{z_0} := \{X \in \mathfrak{X} : \ \dfrac{\partial^2(-\Lambda)(\exp tX(z_0))}{\partial t \partial \bar{t}}\Big|_{t=0} = 0\}$ は $\mathfrak{X}$ の部分リー環である」

$\mathfrak{X}_{z_0}$ に対応する単位元 e を通る integral manifold を Σ_{z_0} in G とし

$$\sigma_{z_0} := \Sigma_{z_0}(z_0) = \{g(z_0) \in M : g \in \Sigma_{z_0}\} \ \subset M$$

と書くと $-\Lambda(\sigma_{z_0}) = -\Lambda(z_0) < \infty$. 故に $\sigma_{z_0} \Subset D$ となり 次を得る.

定理 4.3. $D \Subset M$ は境界が滑らかな non-Stein 擬凸状域とする. 任意に 一点 $z_0 \in D$ を固定すると

I. 次の性質を持つ $\mathfrak{X}$ の部分リー環 $\mathfrak{X}_{z_0}$ が一意的に存在する. $\mathfrak{X}_{z_0}$ に対応する G の部分リー群を Σ_{z_0} 及び $\sigma_{z_0} = \Sigma_{z_0}(z_0)$ と書くと

1) $\mathfrak{h}_{z_0} \subsetneqq \mathfrak{X}_{z_0} \subsetneqq \mathfrak{X}$.

2) M 及び D は cosets σ_{z_0} で foliate されている. 即ち

$$M = \bigcup_{g \in G} g\sigma_{z_0}, \qquad D = \bigcup_{g \in D(z_0)} g\sigma_{z_0} \ \text{ with } \ g\sigma_{z_0} \Subset D \text{ for } \forall g \in D(z_0).$$

3) (σ_{z_0} の最大性) 任意の generarized 正則曲線 $\ell := \{z = z(t) : t \in \mathbb{C}\} \Subset D$ に対して $\exists g \in D(z_0)$ with $\ell \subset g\sigma_{z_0}$.

II. 更に σ_{z_0} が closed in M ならば

1) σ_{z_0} は既約な non-singular コンパクト解析曲面 in D.

2) 射影 $\pi_{z_0}: M = G/H_{z_0} \to M_0 = G/\Sigma_{z_0}$ に対して $\pi_{z_0}^{-1}(z) \approx \sigma_{z_0}$, $\forall z \in M_0$ であり

$$\begin{array}{ccccl} M = G/H_{z_0} & \Supset & D & & \text{non-Stein with smooth } \partial D \\ \pi_0 \big\downarrow & & \big\downarrow \pi_0 & & \\ M_0 = G/\Sigma_{z_0} & \Supset & D_0 & & \text{Stein with smooth } \partial D_0 \end{array}$$

例：複素旗空間 $\mathcal{F}_n$ の non-Stein 擬凸状域の分類. [2]

複素旗空間 $\mathcal{F}_n$ in $\mathbb{C}^n$ with $n \geq 3$ は

$$z \in \mathcal{F}_n : \{0\} \subset S_1 \subset \ldots \subset S_{n-1} \subset \mathbb{C}^n,$$
但し, S_i は i-次元線形空間である

よりなる複素 $n(n-1)/2$ 次元のコンパクト多様体である. $G = GL(n, \mathbb{C})$ は $\mathcal{F}_n$ の推移的変換群である. その左ベクトル場からなるリー環を $\mathfrak{X}$ と書く. $M_n(C)$ は n 次正方行列の全体とするとき $X = (\lambda_{i,j}) \in M_n(\mathbb{C})$ に 左不変ベクトル場 $v_X \in \mathfrak{X}$ は次のように一対一に対応する. $g := (x_{ij}) \in GL(n, \mathbb{C})$ に対して

$$v_X(g) = \sum\nolimits_{i,j=1}^{n} \lambda_{i,j} X_{i,j}(g) \quad \text{where} \quad X_{i,j} = \sum\nolimits_{k=1}^{n} x_{ki} \frac{\partial}{\partial x_{kj}}.$$

$\mathcal{F}_n$ の基点として

$$O: \ \{0\} \subset S_1^0 \subset \ldots \subset S_{n-1}^0 \subset \mathbb{C}^n,$$
$$\text{但し}, \ S_i^0 = \{x_{i+1} = \ldots = x_n = 0\}, \quad (i = 1, \ldots, n-1)$$

と置く. 基点 O の isotropy 群 $H_O \subset GL(n, \mathbb{C})$ 及び そのりー部分環 $\mathfrak{h}_O \subset \mathfrak{X} = M_n(\mathbb{C})$ は

$$H_O = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \in GL(n, \mathbb{C}) \right\}, \quad \mathfrak{h}_O = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}) \right\}.$$

故に $\mathcal{F}_n = GL(n, \mathbb{C})/H_O$.

$D \Subset \mathcal{F}_n$ は滑らかな境界の non-Stein 擬凸状域とする. 簡単のために, $D \ni O$ とする. 故に Case 2 で作った $c-$Robin 関数 $-\Lambda(z)$ on D は psh exh fn であるが strictly psh ではない. 定理 4.3 から

$$\mathfrak{X}_O := \ \left\{ X \in \mathfrak{X} : \frac{\partial \lambda(\exp tX(O))}{\partial t \partial \bar{t}} \Big|_{t=0} = \ 0 \right\}$$

は $\mathfrak{X}$ のりー部分環 with $\mathfrak{h}_O \subsetneqq \mathfrak{X}_O \subsetneqq \mathfrak{X}$ になり 次の形である：

$$\exists! \ \mathfrak{M} := (m_1, m_2, \ldots, m_\mu), \ \ 2 \leq \mu \leq n-1, \ 1 \leq m_j \leq n, \ \ m_1 + \ldots + m_\mu = n,$$

---

[2] 上田哲生氏は旗空間の Levi 問題を我々に示唆した. それを解く過程で一般的な定理 4.3 を得た.

$$\mathfrak{X}_O = \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} (*) & (*) & (*) \\ \hline 0 & (*) & (*) \\ \hline 0 & 0 & (*) \end{array} \right) \in M_n(\mathbb{C}) \right\}$$

これに対応する りー部分群 Σ_O 及び $\sigma_O = \Sigma_O(O) \Subset D$ は

$$\Sigma_O = \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} h_1 & (*) & (*) \\ \hline 0 & h_j & (*) \\ \hline 0 & 0 & h_\mu \end{array} \right) : h_j \in GL(m_j, \mathbb{C}) \right\},$$

$$\sigma_O = \Sigma_O(O) = \Sigma_O / H_O = \mathcal{F}_{m_1} \times \cdots \times \mathcal{F}_{m_\mu}$$

各 $\mathcal{F}_{m_k}$ は $m_k(m_k-1)/2$ 次元の複素旗空間である. $GL(n,\mathbb{C})/\Sigma_O$ は次の 一般化された旗空間 $\mathcal{F}_n^{\mathfrak{M}}$ に他ならない.

$$\forall\, z \in \mathcal{F}_n^{\mathfrak{M}} : \{0\} \subset S_{m_1} \subset \ldots \subset S_{m_1+\ldots+m_{\nu-1}} \subset \mathbb{C}^n$$

但し, $S_{m_1+\ldots+m_k}$ は $(m_1+\ldots+m_k)$ 次元線形空間である.

故に 次を得る:

$$\begin{array}{ccccl} \mathcal{F}_n & \Supset & D & & \text{non-Stein with smooth } \partial D \\ {\scriptstyle \pi_O}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi_O} & & \\ \mathcal{F}_n^{\mathcal{M}} & \Supset & D_O & & \text{Stein with smooth } \partial D_O \end{array}$$

$$\pi_O^{-1}(\zeta) \approx \mathcal{F}_{m_1} \times \cdots \times \mathcal{F}_{m_\mu}, \quad \forall \zeta \in D_0.$$

5. Hopf 曲面における Levi 問題について
(N. Levenberg 氏との共同研究 (cf. [LY-2]))[3]

与えられた $a, b \in \mathbb{C}^*$, $1 < |a| \le |b|$ に対して

$$\mathcal{H}_{(a,b)} = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} / \sim_{(a,b)} .$$

[3]上田哲生氏は この研究を示唆し 命題 5.1 への基本的コメントを示した.

但し, 同値関係 $(z,w) \sim_{(a,b)} (z',w')$ iff $\exists n \in \mathbb{Z}$ such that $(z',w') = (a^n z, b^n w)$ in $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ を言う. $\mathcal{H}_{(a,b)}$ は複素 2 次元のコンパクト多様体である. (a,b) に関する Hopf 曲面と呼ぶ. $a = b$ の場合 $\mathcal{H}_{(a,a)}$ は $GL(2,\mathbb{C})$ をりー変換群とする等質空間になり, 第 4 節から non-Stein 擬凸状域 $D \Subset \mathcal{H}_{(a,a)}$ は "$T_a \times D_0$ と解析的に同値である" ことがわかる. ここに, $T_a = \mathbb{C}^*/\sim_a$ (一次元トーラス), $D_0 =\ \mathbb{P}^{n-1}$ の或る Stein 領域である. 以後は $a \neq b$ と仮定する.

$(z,w) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ の属するクラスを $[z,w] \in \mathcal{H}_{(a,b)}$ と書き次の記号を用いる.

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^*_{(a,b)} &= \{[z,w] \in \mathcal{H}_{(a,b)} : (z,w) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*\},\\ \mathbf{T}_a :&= (\mathbb{C}^*_z/\sim_a) \times \{0\}, \quad \mathbf{T}_b := 0 \times (\mathbb{C}^*_w/\sim_b).\\ \therefore \quad \mathcal{H}_{(a,b)} &= \mathcal{H}^*_{(a,b)} \cup \mathbf{T}_a \cup \mathbf{T}_b \quad \text{(disjoint)}.\end{aligned}$$

Hopf 曲面 $\mathcal{H}_{(a,b)}$ は次の基本的性質を持つ: $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ に対して $[z,w] \in \mathcal{H}_{(a,b)} \to [\alpha z, \beta w] \in \mathcal{H}_{(a,b)}$ によって 積の群 $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ with 単位元 $e = (1,1)$ は $\mathcal{H}_{(a,b)}$ の (推移的でない) 正則変換群をなす; $\mathcal{H}_{(a,b)}$ の正則ベクトル場 は $\alpha z\frac{\partial}{\partial z} + \beta w\frac{\partial}{\partial w}$, $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ に限る[4]

$$\mathfrak{X} = \{\alpha z\frac{\partial}{\partial z} + \beta w\frac{\partial}{\partial w} :\ \alpha,\beta \in \mathbb{C}\};$$

特別のベクトル場

$$X_u := (\log|a|)z\frac{\partial}{\partial z} + (\log|b|)w\frac{\partial}{\partial w} \in \mathfrak{X}$$

の解曲線 $[z_0,w_0]\exp tX_u$ with $(z_0,w_0) \in \mathcal{H}^*_{(a,b)}$ の $\mathcal{H}_{(a,b)}$ における閉包は $\mathcal{H}^*_{(a,b)}$ に含まれ, 他のベクトル場 $X \in \mathfrak{X}$ に関しては $\mathbf{T}_a, \mathbf{T}_b$ の少なくとも一方を含む;

$$\psi_u[z,w] := -\frac{\log|z|}{\log|a|} + \frac{\log|w|}{\log|b|} \qquad \text{on} \ \ \mathcal{H}^*_{(a,b)}$$

は $\mathbf{T}_a$ で $+\infty$, $\mathbf{T}_b$ で $-\infty$ となる $\mathcal{H}^*_{(a,b)}$ での多重調和関数である; $\mathcal{H}^*_{(a,b)}$ は推移的りー変換群 $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ に関しての等質空間であり, そのリー環は $\mathfrak{X}$ である. 故に $\mathcal{H}_{(a,b)}$ は 等質空間 $\mathcal{H}^*_{(a,b)}$ のコンパクト化である.

$\mathcal{H}_{(a,b)}$ を分類するために, 次の記号を使う.

$$\begin{aligned}S &= \{(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* : |a| \leq |b|\} = S_1 \cup S_2 \quad \text{(disjoint)},\\ S_1 &:= \{(a,b) \in S :\ a^Q \neq b^P \quad \text{for } \forall\ P,Q \in \mathbb{Z}^+\},\\ S_2 &:= \{(a,b) \in S :\ a^Q = b^P \quad \text{for } \exists\ P,Q \in \mathbb{Z}^+\}.\end{aligned}$$

このとき

(1) $(a,b) \in S_1$ ならば $\mathcal{H}_{(a,b)}$ には定数でない有理関数は存在しない.

(2) $(a,b) \in S_2$ ならば $\mathcal{H}_{(a,b)}$ には有理関数 $f[z,w] = w^P/z^Q$ が存在する.

(2) の場合, 最小の $P, Q \in \mathbb{Z}^+$ を取れば 他の有理関数は $f[z,w]$ の一変数の有理関数である. そのような P, Q は 次で特徴付けられる.

$$\rho := \frac{\log|b|}{\log|a|}\ (\geq 0) \ \ \text{及び} \ \ \tau := \frac{1}{2\pi}(Q \arg a - P \arg b) \ \text{は有理数である.}$$

[4]この性質から Hopf 曲面は Hirschowitz 氏の定義した " infinitesimally homogeneous space" (cf. [Hi]) ではないことがわかる.

即ち

$$\rho=\frac{q}{p},\ q\ge p\ge 1,\ (p,q)=1\,;$$
$$\tau=\frac{m}{l},\ l\ge 1,\ (l,m)=\pm 1\quad\text{or}\quad \tau=0\text{ with }l=1$$

であって, $P=pl,\ Q=ql$. 故に $f[z,w]=w^{pl}/z^{ql}$ in $\mathcal{H}_{(a,b)}$.

ベクトル場 X_u の初期値 e の解曲線を $\widetilde{\sigma}_u$ と書く. 任意の点 $[z_0,w_0]\in\mathcal{H}^*_{(a,b)}$ に対して

(1) の場合, $c=|w_0|^{\log|a|}/|z_0|^{\log|b|}$ と置くと $[z_0,w_0]\,\widetilde{\sigma}_u$ の $\mathcal{H}_{(a,b)}$ での閉包は $\mathcal{H}^*_{(a,b)}$ での実3次元の閉 Levi 平坦曲面 Σ_c である. 但し, $\Sigma_c=\{|w|=c|z|^\rho\}/\sim_{(a,b)}$.

(2) の場合, $c=w_0^{pl}/z_0^{ql}$ と置くと $[z_0,w_0]\,\widetilde{\sigma}_u$ は $\mathcal{H}^*_{(a,b)}$ での一次元トーラス σ_c であり定数面 $f[z,w]=c$ に等しい.

命題 5.1.

Case 1. $(a,b)\in S_1$ のとき

$$\mathcal{H}_{(a,b)}=\Big(\bigcup\nolimits_{c\in(0,\infty)}\Sigma_c\Big)\ \cup\mathbf{T}_a\cup\mathbf{T}_b\quad\text{(disjoint)},$$
$$\Sigma_c\sim\Sigma_{c'},\quad c,\ c'\in(0,\infty).$$

Case 2. $(a,b)\in S_2$ のとき

$$\mathcal{H}_{(a,b)}=\Big(\bigcup\nolimits_{c\in\mathbb{C}^*}\sigma_c\Big)\ \cup\mathbf{T}_a\cup\mathbf{T}_b\quad\text{(disjoint)},$$
$$\sigma_c\sim\sigma_{c'},\quad c,\ c'\in\mathbb{C}^*,\ \sigma_c\not\sim\mathbf{T}_a,\ \mathbf{T}_b\,.$$

この命題を用いて 次を示す.

定理 5.1. $D\subset\mathcal{H}_{(a,b)}$ は境界が滑らかな non-Stein 擬凸状域とすれば,
Case 1. $(a,b)\in S_1$ のとき 次の3つの場合に分かれる.

$$D=\begin{cases}(1)\quad \bigcup_{c_1<c<c_2}\Sigma_c\,,\\ (2)\quad \big(\bigcup_{0<c<c_2}\Sigma_c\big)\cup\mathbf{T}_a\,,\\ (3)\quad \big(\bigcup_{c_1<c<\infty}\Sigma_c\big)\cup\mathbf{T}_b\,.\end{cases}$$

Case 2. $(a,b)\in S_2$ のとき

$$D=\bigcup\nolimits_{c\in\delta}\sigma_c,\quad \exists\,\delta\subset\mathbb{P}^1\text{ with smooth }\ \partial\delta,\ \text{where }\sigma_0=\mathbf{T}_a,\ \sigma_\infty=\mathbf{T}_b.$$

[証明の方針]　先ず, 擬凸状域 D に Robin 関数 $\Lambda[z,w]$ を作る. $\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$ with 単位元 $e=(1,1)$ は $\mathcal{H}$ のリー変換群より 各 $[z,w]\in D$ に対して $\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$ の領域

$$D[z,w]=\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*:\ (\alpha,\beta)\,[z,w]\in D\}$$

が定まる. このとき $\mathcal{D}=\bigcup_{[z,w]\in D}([z,w],D[z,w])$ は $D\times\{e\}$ を含む $D\times(C^*\times C^*)$ の擬凸状域である. これは関数論的平行移動の

$$\text{変動 }\mathcal{D}:\ [z,w]\in D\to D[z,w]\subset\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$$

を導く．$\mathbb{C}^2$ のユークリッド計量 ds^2, 滑らかな関数 $c(z) > 0$ on $\mathbb{C}^2$ をリー群 $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ に制限し，単位元 e の近傍に 作用素 $\Delta - c$ の基本解 $Q_e(z, w)$ を固定する．各 $[z, w] \in D$ に対して c–Green 関数 $G([z, w], (\xi, \eta))$ 及び c–Robin 定数 $\Lambda([z, w])$ for $(D[z, w], e)$ が定まる．

$$G([z, w], (\xi, \eta)) = Q_e(z, w) + \Lambda[z, w] + h([z, w], (\xi, \eta))$$
$$\text{near } e, \text{ where } h([z, w], e) = 0.$$

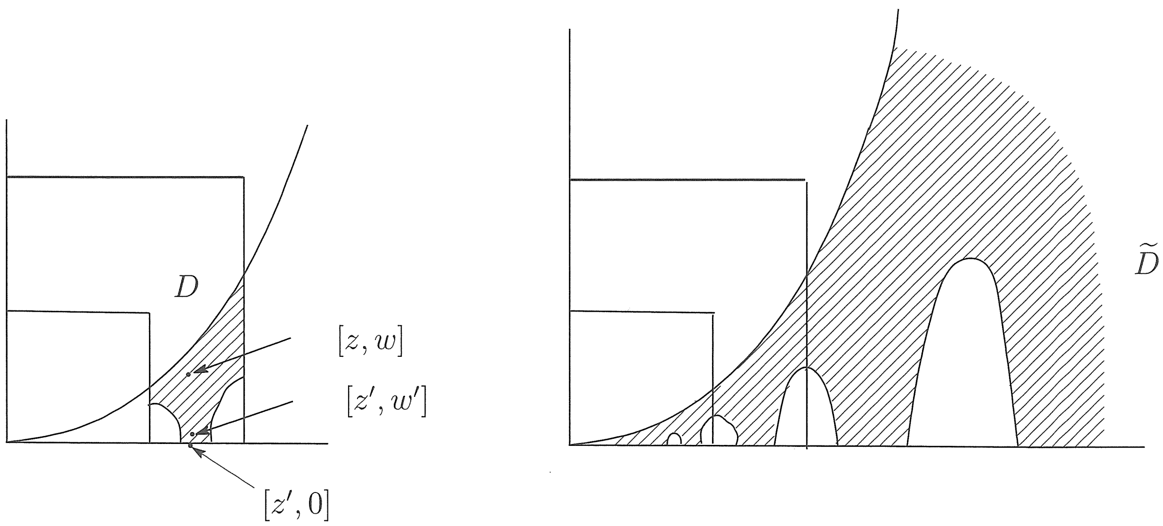
$\Lambda[z, w]$ を 領域 D の $\underline{\Lambda\text{–Robin 関数}}$ と呼ぶ．記号

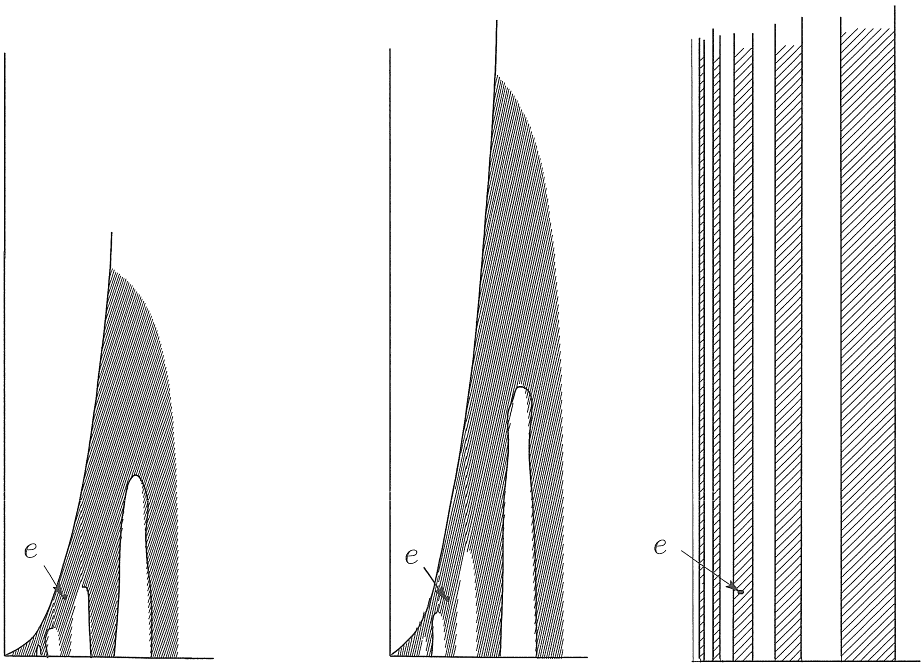
$$\mathcal{I} := \{(a^n, b^n) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* : n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*,$$
$$\widetilde{D} = D \times \mathcal{I} \subset \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}, \quad D^* = D \cap \mathcal{H}^*_{(a,b)}, \quad \widetilde{D^*} = D^* \times \mathcal{I} \subset \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*,$$
$$\widetilde{D_a} = \{a^n z : z \in D_a, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}^*_z, \quad \widetilde{D_b} = \{b^n z : w \in D_b, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}^*_w$$

を用いると具体的に

$$\begin{aligned}
D[z, w] &= (\frac{1}{z}, \frac{1}{w}) \cdot \widetilde{D^*} \quad && \text{if } [z, w] \in D^*,\\
D[z, 0] &= (\frac{1}{z}\, \widetilde{D_a}) \times \mathbb{C}^*_w \quad && \text{if } [z, 0] \in D \cap \mathbf{T}_a,\\
D[0, w] &= \mathbb{C}^*_z \times (\frac{1}{w}\, \widetilde{D_b}) \quad && \text{if } [0, w] \in D \cap \mathbf{T}_b
\end{aligned}$$

と表され 次のモデル図を得る．





$D[z, w]$ $D[z', w']$ $D[z', 0]$ in $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$

図から分かるように 変動 $\mathcal{D}$ は 点 $[z, 0], [0, y_0] \in D$ では滑らかな変動では無いが，実ポテンシャル的には滑らかで Robin 定数 $\Lambda[z, w]$ の 2 階変分公式が成立し，$-\Lambda[z, w]$ は D 上の psh fn である．D の境界点 $p_0 = [z_0, w_0] \notin \mathbf{T}_a \cup \mathbf{T}_b$ では今迄と同じく 実ポテンシャル論から

$$(\star) \quad \lim_{[z,w] \to p_0} (-\Lambda[z, w]) = +\infty.$$

しかし D の境界点 $p_0\in\partial D\cap\mathbf{T}_a\neq\mathbf{T}_a$ では 実ポテンシャル論だけでは反例がある．系 4.1 (2') と擬凸状域に関んする Hartogs タイプの次の補題 5.1 によって そのような境界点 p_0 についても $(\star)$ は示される．

補題 5.1. *2* 重円板 $\Delta=\Delta_1\times\Delta_2=\{|z|<r_1\}\times\{|w|<r_2\}\subset\mathbb{C}^2$ 内の領域 D が次の条件を満たすとする．$\partial D\cap D$ は C^ω 級であり各 $z\in\Delta_1$ に対して

$$D(z)=\{w\in\Delta_2:(z,w)\in D\}\subset\Delta_2,\quad S(z)=\{w\in D_2:(z,w)\in\partial D\}\subset\Delta_2$$

と書くとき

(*i*) $\partial D\ni(0,0)$,
(*ii*) 各 $S(z)$, $z\in\Delta_1$ は C^ω 級滑らかな一つの開曲線 in Δ_2 である,
(*iii*) 全ての $S(z)$, $z\in\Delta_1$ が原点 $w=0$ を通ることはない

とする．このとき D が擬凸状域ならば $\forall\delta_1=\{|z|<r_1\}$ に対して

$$\exists\,\delta_2=\{|w|<r_2\}\ \text{ such that }\ \bigcup_{z\in\delta_1}S(z)\supset D(0)\cap\delta_2\ .$$

故に $\partial D\not\supset\mathbf{T}_a$, $\mathbf{T}_b$ ならば $-\Lambda[z,w]$ は D での psh exh fn である．更に D が non-Stein ならば D は定理 5.1 Case 1. (1) または Case 2. $\delta\subset\mathbb{C}^*$ に限ることが導かれる．例外的な場合, 例えば $\partial D\supset\mathbf{T}_a$ 且つ $\emptyset\neq(\partial D)\cap\mathbf{T}_b\neq\mathbf{T}_b$ の場合

$$s[z,w]:=\mathrm{Max}\Big\{-\Lambda[z,w],\frac{\log|w|}{\log|b|}-\frac{\log|z|}{\log|a|}\Big\}$$

が psh exh fn on D より D は Stein 領域 または 定理 5.1 Case 2. δ with $\partial\delta\ni 0$ である．

6.　柴スパンの変動に関する 2 階変分公式 (濱野, 柴氏との共同研究)

種数 1 の bordered リーマン面 $R(t)$ の滑らかな変動

$$\mathcal{R}:t\in B\to R(t)\qquad\text{with } B\times\{0\},B\times\{1\}\subset\mathcal{R}$$

を考える．各 $R(t)$, $t\in B$ は 種数有限 $g\geq 0$ で，$\partial R(t)=\sum_{j=1}^{\nu}C_j(t)$, $C_j(t)$ は境界成分とする．各 $R(t), t\in B$ に対して $R(t)\setminus\{0,1\}$ での調和関数

$$p(t,z)=\begin{cases}\log\frac{1}{|z|} & +0 & +h_0(t,z) & \text{near } z=0,\text{ where } h_0(t,0)=0,\\ \log\frac{1}{|z-1|} & +\alpha(t) & +h_1(t,z) & \text{near } z=0,\text{ where } h_1(t,1)=0.\end{cases}$$

境界条件：$p(t,z)=\text{const.}\,c_j(t)$ on $C_j(t)$ 且つ $\int_{C_j(t)}*dp(t,z)=0,\ (j=1,\ldots,q)$

が一意的に存在する．$p(t,z)$ 及び $\alpha(t)$ を $\underline{L_1-\text{主関数}}$ 及び $\underline{L_1-\text{定数}}$ for $(R(t),\{0,1\})$ と呼ぶ．濱野氏 (cf. [Ha]) は最近 $\alpha(t)$ の次の 2 階変分公式を示した．

$$\boxed{\frac{\partial^2\alpha(t)}{\partial t\partial\bar t}=-\frac{1}{\pi}\int_{\partial R(t)}k_2(t,z)\Big|\frac{\partial p(t,x)}{\partial z}\Big|^2ds_z-\frac{4}{\pi}\iint_{R(t)}\Big|\frac{\partial^2 p(t,z)}{\partial\bar t\partial z}\Big|\,dxdy}$$

故に $\mathcal{R}$ が 2 次元の擬凸状域ならば $\alpha(t)$ は B 上の劣調和関数である．

式自体は定理 3.2 に述べた Robin 定数 $\lambda(t)$ のそれと同じだが，$\lambda(t)$ の場合には，“ Green 関数 $g(t,z)$ が $\partial\mathcal{R}$ の定義関数である ” 事実が証明において基本的であった．$\alpha(t)$ の場合には L_1- 主関数 $p(t,z)$ は $\partial\mathcal{R}$ の定義関数ではない．氏は次の formula によって 上の変分公式を得た．

$u(t,z)$ は $\mathcal{V}=\bigcup_j^\nu\big[\bigcup_{t\in B}(t,V_j(t))\big]$ (where $V_j(t)$ は $C_j(t)$ の近傍) に於いて (t,z) について C^2 級実関数であり 次の条件を満たすとする．各 $t\in B$ 及び $j=1,\dots,\nu$ に対して

$$u(t,z) \text{ は } V_j(t) \text{ で調和関数であり，} u(t,z)=\text{const. } c_j(t) \text{ on } C_j(t).$$

<u>Hamano's formula</u>

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial\bar t}\frac{\partial u}{\partial n_z}ds_z &= 2k_2(t,z)\Big|\frac{\partial u}{\partial z}\Big|^2 ds_z+4\,\mathrm{Im}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial\bar t\partial z}dz\right\}\\ &\quad+\frac{\partial^2 c_j}{\partial t\partial\bar t}\frac{\partial u}{\partial n_z}ds_z-4\,\mathrm{Im}\left\{\frac{\partial c_j}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial\bar t\partial z}dz\right\}\qquad \text{along } C_j(t).\end{aligned}$$

上記 2 階変分公式を使って 氏は「2 次元正則族 $(\mathcal{R},\pi,B)$ （但し 各 $R(t)=\pi^{-1}(t), t\in B$ は同一種数 ≥ 2 のコンパクト面である）に対して 各 $R(t), t\in B$ の Schottky 被覆リーマン面 $\widetilde{R}(t)$ (これは 平面領域地と同相) の作る正則族 $(\widetilde{\mathcal{R}},\widetilde{\pi},B)$ は 同時一意化可能で $B\times\mathbb{P}^1$ の単葉域に実現できる」ことを示した．

L_1- 主関数と同様に 各 $R(t), t\in B$ に対して $R(t)\setminus\{0,1\}$ での調和関数 $q(t,z)$

$$q(t,z)=\begin{cases}\log\frac{1}{|z|} & +0 \quad +\widetilde{h}_0(t,z) \quad \text{near } z=0, \text{ where } \widetilde{h}_0(t,0)=0,\\ \log\frac{1}{|z-1|} & +\beta(t) \quad +\widetilde{h}_1(t,z) \quad \text{near } z=0, \text{ where } \widetilde{h}_1(t,1)=0\end{cases}$$

境界条件： $q(t,z)=\text{const. } c_j(t)$ on $C_j(t)$ 且つ $\int_{C_j(t)}*dq(t,z)=0,\ (j=1,\dots,\nu)$

が一意的に存在する． $q(t,z)$ 及び $\beta(t)$ を <u>L_0- 主関数</u> 及び <u>L_0- 定数</u> for $(R(t),\{0,1\})$ と呼ぶ．

種数 $g\geq 1$ のとき $R(t)$ 上に 通常の A,B-曲線 $\{A_i(t),B_i(t)\}_{i=1,\dots,g}$ を, $t\in B$ について連続に動くように描く．このとき $\beta(t)$ の次の 2 階変分公式が成立する (cf. [HMY]).

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial^2\beta(t)}{\partial t\partial\bar t}&=-\frac{1}{\pi}\int_{\partial R(t)}k_2(t,z)\Big|\frac{\partial q(t,x)}{\partial z}\Big|^2 ds_z-\frac{4}{\pi}\iint_{R(t)}\Big|\frac{\partial^2 q(t,z)}{\partial\bar t\partial z}\Big|^2\,dxdy\\ &\quad-\frac{2}{\pi}\,\mathrm{Im}\,\Big\{\sum_{j=1}^{q}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\int_{A_j(t)}*dq(t,z)\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial\bar t}\int_{B_j(t)}*dq(t,z)\Big)\Big\}\end{aligned}}$$

故に $\mathcal{R}=\cup_{t\in B}(t,R(t))$ は擬凸状域であり $\beta(t)$ は B 上の劣調和でも優調和でもない例が作れる．私は $g\geq 1$ の場合の変動に関しての $\alpha(t)$ と $\beta(t)$ の本質的違いを把握していない．もし $\mathcal{R}$ が擬凸状域であって $g=0$ 即ち $R(t)$ が平面領域と同相ならば $-\beta(t)$ は B 上で劣調和となる．中井 $-$Sario が定義した <u>調和スパン</u> (cf. [NS]) について，先の 2 つの 2 階変分公式を合わせて次を得る．「調和スパン $\alpha(t)-\beta(t)$ は B 上の劣調和関数である」

種数 1 の bordered リーマン面 R の場合の 柴円板及びスパンの定義と定理を述べる． ∂R は ν 個の滑らかな閉曲線 $C_j, j=1,\dots,\nu$ よりなるとする． R に 通常の canonical 閉曲線 A,B with $A\cap B=\{$ 一点 $z_0\}$ を与え, <u>marked リーマン面</u> $(R,\{A,B\})$ と呼ぶ． $(T,\{A_T,B_T\},i)$ が $(R,\{A,B\})$ の <u>compact continuation</u> とは, T は (compact) トーラスであり， $i:R\to T$ は 中への 1:1 正則写像であって， $i(A)\sim A_T$, $i(B)\sim B_T$ であるときを言う．compact continuations の全ての集まりを $M(R,\{A,B\})$ と書く．各 $(T,\{A_T,B_T\},i)$

に対して T の正則微分 ω_T with $\int_{A_T}\omega = 1$ を A_T に関する基本微分と呼び

$$\tau_T := \int_{B_T}\omega$$

と置く． $\mathrm{Im}\,\tau_T > 0$ であり τ_T は T の一つの module を表す．柴氏は $M(R,\{A,B\})$ はどのようなものかを

$$S(R,\{A,B\}) := \{\tau_T : (T,\{A_T,B_T\}) \in M(R,\{A,B\})\} \subset \text{上半平面}$$

で調べた．結果を述べるために，$(R,\{A,B\})$ の 2 つの特別な compact continuations

$$(T_1,\{A_1,B_1\},i_1), \quad (T_0,\{A_0,B_0\},i_0)$$

を次のように作る．種数 1 の bordered リーマン面 R には次の条件を満たす正則微分 ω_1 が一意的に存在する．$\int_A \omega_1 = 1$ であり 各 $C_j,\, j=1,\ldots,\nu$ の円環近傍 V_j において Abel 積分 $u_1(z)+iu_1^*(z) = \int^z \omega_1$ (分枝) は単葉正則で, $u_1(z) = \text{const. on } C_j$. このとき Abel 積分 $w = \int_{z_0}^z \omega_1 = u_1(z)+iu_1^*(z)$ は 領域 $R\setminus(A\cup B)$ を 半平面 $\mathrm{Im}\, w > 0$ に単葉に移し，各 C_j は （2重）垂直線分に移される．従って $u_1(t)+iu_1^*(z)$ の描く閉曲線 $A^+B^+A^-B^-$ の像の定める 4 辺曲線の面は一意的に $(R,\{A,B\})$ の compact continuation $(T_1,\{A_T,B_T\},i_1)$ を定め，それに対する module τ_1 は $\int_B \omega_1$ である．

同様にして R の正則微分 ω_0 の Abel 積分 $u_0(z)+iu_0^*(z) = \int^z \omega_0$ は C_j の近傍で一価正則で $u_0^*(z) = \text{const. on } C_j$ となる ω_0 が一意的に存在する．上と同じ方法で compact continuation $(T_0,\{A_0,B_0\},i_0)$ が定まり それに対する module τ_0 は $\int_B \omega_0$ に等しい．次が成立する (cf. [Sh]).

柴の定理. 上記の記号の下で

$$\mathrm{Im}\,\tau_1 > \mathrm{Im}\,\tau_0, \qquad \Re\tau_1 = \Re\tau_0$$

である. 更に

$$\tau_R^* = \frac{\tau_1+\tau_0}{2}, \qquad \rho_R = \tau_1 - \tau_0 > 0$$

と書くと

$$S(R,\{A,B\}) = \{|\tau - \tau_R^*| \le \rho_R\} \quad \text{in} \quad \mathrm{Im}\,\tau > 0$$

閉円板 $S(R,\{A,B\}))$ 及び 直径 ρ_R を 柴円板 及び 柴スパン と呼ぶ.

種数 1 の滑らかな境界をもつ bordered リーマン面 $R(t)$ の滑らかな変動

$$\mathcal{R}:\ t \in B \to R(t)$$

を考える．各 $t \in B$ に対して marked リーマン面 $(R(t),\{A(t),B(t)\})$ の柴スパン $\rho(t) := \rho_{R(t)}$, $\tau^*(t) := \tau^*_{R(t)}$ 及び 柴円板 $S(t) := S(R(t),\{A(t),B(t)\})$ が定まる

$$S(t) = \{|\tau - \tau^*(t)| \le \rho(t)\}, \quad \forall t \in B.$$

$(R(t),\{A(t),B(t)\})$ の特別の compact continuations $(T_1(t),\{A_1(t),B_1(t)\},i_1(t))$ 及び $(T_0(t),\{A_0(t),B_0(t)\},i_0(t))$ の基本微分を それぞれ $\omega_1(t,z) = f_1(t,z)dz, \omega_0(t,z) = f_0(t,z)dz$ と書く．このとき 柴スパン $\rho(t)$ に対して 次の 2 階変分公式が成立する．

定理 6.1.

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial^2\rho(t)}{\partial t\partial\bar{t}} &= \frac{1}{2}\int_{\partial R(t)} k_2(t,z)\ \left(|f_1(t,z)|^2+|f_0(t,z)|^2\right)|dz| \\ &\quad + \|\frac{\partial^2\omega_1(t,z)}{\partial\bar{t}}\|^2 + \|\frac{\partial^2\omega_0(t,z)}{\partial\bar{t}}\|^2\end{aligned}}$$

系 6.1.

(1) $\mathcal{R}=\cup_{t\in B}(t,R(t))$ が 2 次元の擬凸状域ならば $(R(t),\{A(t),B(t)\})$ の柴スパン $\rho(t)$ は B 上の劣調和関数である.

(2) 更に $\rho(t)$ は B 上の調和関数ならば $\rho(t)=\text{const. on } B$ であり 柴円板の中心 $\tau^*(t)$ は B 上の正則関数である.

種数 $g\geq 2$ の bordered リーマン面 $R(t)$ の変動に関しても 定理6.1 に対応する 2 階変分公式を得たが最後の表現が完成していないのでここでは割愛する.

References

[Bo] D. Borah, Remarks on the metric induced by the Robin function, II, Michigan M. J., 62 (2013), 581–630.

[BV] D. Borah and K. Verma, Remarks on the metric induced by the Robin function, Indiana Univ. Math., 60 (2011), 751–802.

[G] H. Grauert, On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds, Ann. Math. 68 (1958), 460–472.

[GN] R. Gunning and R. Narashimhan, Immersion of open Riemann surfaces, Math. Ann. 174 (1967), 103–108.

[Ha] S. Hamano, Variation formulas for L_1-principal functions and the application to simultaneous uniformization problem, Michigan Math. J. 60 (2011), 271–288

[Hi] A. Hirschowitz, Le problm̀e de Levi pour espaces homogenèns, Bulletin de la S. M.,F. 103 (1975), 191–201.

[HMY] S. Hamano, F. Maitani and H. Yamaguchi, Variation formulas for principal functions, II: Applications to variation for harmonic spans, Nagoya Math. J. 204 (2011), 19-56.

[K] H. Kazama, On pseudoconvexity of complex Lie groups, Nagoya Math. J. 27 (1973), 241–57.

[KLY] K.-T. Kim, N. Levenberg and H. Yamaguchi Robin functions for complex manifolds and applications, Memoirs of the A.M.S. vol. 209 no 984 (2011).

[LY-1] N. Levenberg and H. Yamaguchi, The metrics induced by the Robin function, Memoirs of the A.M.S. vol.92 no 448 (1991).

[LY-2] N. Levenberg and H. Yamaguchi, Pseudoconvex domains in the Hopf surface, to appear in JSMJ in 2014.

[M-Y] F. Maitani and H. Yamaguchi, Variation of Bergman metrics on Riemann surfaces, Math. Ann. 330 (2004), 477–489.

[Nm] Y. Nishimura, Immersion analytique d'une famille de surfaces de Riemann ouverts, PRIMS, 14 (1978), 643–654.

[Nn] T. Nishino, Nouvelles recherches sur les fonctions entières de plusieurs variables complexes (V) Fonctions qui seréduisent aux polynômes, J. Math. Kyoto Univ. 15 (1975), 527–553.

[NS] M. Nakai and L. Sario, Classification theory of Riemann surfaces, Grundleren Math. Wiss. vol. 164, 1970.

[O] T. Ohsawa, A remark on the completeness of the Bergman metric, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 92 (1981) 238–240.

[Ok-1] K. Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, Iwanami Shoten, 1961.

[Ok-2] 奈良女子大学附属図書館ホームページ http://www.lib.nara-wu.ac.jp/oka/fram/ikos.html

[Sh] M. Shiba, The moduli of compact continuations of an open Riemann surface of geneus one, Trans. of the A.M.S. 301 (1987), 299–311.

[SS] M. Schiffer and C. Spencer, Functionals of finite Riemann surfaces, Priceton Math. Ser. 16, 1954.

[Su] N. Suita, Remarks on the metric induced by the Robin function, II, Arch. Rationl Mech.Anal. 46 (1972), 212–217.

[Y-1] H. Yamaguchi, Parabolicité d'une fonction entière, J. Math. Kyoto Univ., 16 (1976), 71–92.

[Y-2] H. Yamaguchi, Variations of pseudoconvex domains over $\mathbb{C}^n$, Michigan Math. J. 36 (1989), 415–457.