

K3, Enriques 曲面とルート系について

向井 茂 (Shigeru MUKAI) *

複素数体 \mathbb{C} 上で考える．小平次元 $\kappa = 0$ の代数多様体の世界はおおよそ次のようになっている．

{ 代数多様体 (3次元以上) }	⊃	Calabi-Yau 多様体 正則 symplectic 多様体 (偶数次元のみ) アーベル多様体 ...
{ 代数曲面 }	⊃	K3 曲面: $K_X \sim 0, q = 0$ Enriques 曲面: $2K_S \sim 0, K_S \not\sim 0, q = 0$ アーベル曲面: $K_A \sim 0, q = 2$... ¹
{ 代数曲線 }	⊃	楕円曲線 (種数 $g = 1$)

ここで扱うのは、この中の2種類の曲面、K3 と Enriques である．これらの対称性が Mathieu 群と呼ばれる有限単純群の族 M_{24}, \dots, M_{11} や Steiner 系と深く関係していることについて述べる．

§1 K3 と Mathieu

最も簡単に記述できる Fermat 型の4次曲面 $X_4 \subset \mathbb{P}^3$ から始めよう．

例 1 複素射影空間 \mathbb{P}^3 中の非特異4次曲面

$$X_{\text{Fermat}} : x^4 + y^4 + t^4 + z^4 = 0 \tag{1}$$

を考える． \mathbb{P}^3 上の有理3形式の residue (留数)

$$\omega = \text{Res}_X^{\mathbb{P}^3} \left(\frac{d(x/t) \wedge d(y/t) \wedge d(z/t)}{(x/t)^4 + (y/t)^4 + (z/t)^4 + 1} \right)$$

*JSPS 科学研究費 (S) 25220701 の補助を受けた．

¹ K_X は X の標準因子類 (標準直線束) を、 q は不正則数 $h^1(\mathcal{O})$ を表す．また、 \sim は線形同値を表す．

は何処でも消えない X_{Fermat} 上の正則 2 形式である ($K_X \sim 0$) . また、Lefschetz 定理により単連結 (特に、 $q = 0$) なので、 X_{Fermat} は $K3$ 曲面である . この曲面は多くの対称性をもっている . 射影空間の自己同型からくるのは

$$\text{Aut}(X_{\text{Fermat}} \subset \mathbb{P}^3) = (\mathbb{Z}/4)^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$$

だけある . ここで、群 $(\mathbb{Z}/4)^3$ は斉次座標 x, y, z, t を ± 1 倍、 $\pm\sqrt{-1}$ 倍するもので、対称群 \mathfrak{S}_4 はそれらの置換である . X_{Fermat} の自己同型は上の正則 2 形式 ω に定数倍で作用するので、準同型写像

$$\text{Aut}(X_{\text{Fermat}} \subset \mathbb{P}^3) \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{C}\omega) \simeq \mathbb{C}^*$$

を得る . この核 F_{384} は位数 $384 (= 4^2 \cdot 4!)$ の群で、 X_{Fermat} に symplectic form ω を保って作用している .

Mathieu 群 M_{24} は 24 次の特別な置換群である . その作用域 $\Omega = \{1, \dots, 24\}$ の $(1 + 1 + 2 + 4 + 16)$ 型の適当な 5 分割 $\Omega = \coprod_{i=1}^5 \Omega_i$ が存在して、上の群 F_{384} はこれを保つ置換の全体のなす群 $\{g \in M_{24} : g(\Omega_i) = \Omega_i \quad \forall i = 1, \dots, 5\}$ と同型になる .

非特異 4 次曲面

$$X_{\text{Schur}} : x^4 + y^4 + t^4 + z^4 - 12xyzt = 0 \quad (2)$$

も多くの対称性をもつことで有名である . これには $2^4 \cdot \mathfrak{A}_5$ (位数 960 の群) が symplectic に作用する . この群 $2^4 \cdot \mathfrak{A}_5$ は $(1 + 1 + 1 + 1 + 20)$ 型の 5 分割を保つ群、すなわち、 $M_{24} \curvearrowright \Omega$ の 4 点の固定化群 M_{20} と同型である . このような現象をまとめたものが次の定理である .

定理 2 (Mukai[12]) 有限群 G に対して次の 3 条件は同値である .

1. G はある $K3$ 曲面に (効果的かつ) symplectic に作用する .
2. G は次の 11 個の群のいずれかの部分群と同型である .

群	$L_2(7)$	\mathfrak{A}_6	\mathfrak{S}_5	M_{20}	F_{384}	$\mathfrak{A}_{4,4}$	T_{192}	H_{192}
構造	単純	単純	$\mathfrak{A}_5 \cdot 2$	$2^4 \cdot \mathfrak{A}_5$	$4^2 \cdot \mathfrak{S}_4, 2^4 \cdot \mathfrak{S}_4$	$2^4 \cdot \mathfrak{A}_{3,3} \subset \mathfrak{A}_8$	$2^3 \cdot \mathfrak{S}_4$	
位数	168	360	120	960	384	288	192	
	N_{72}	M_9	T_{48}					
	$3^2 \cdot D_8 \subset \mathfrak{S}_6$	$3^2 \cdot Q_8$	$Q_8 \cdot \mathfrak{S}_3$					
	72	72	48					

3. G は 23 次 Mathieu 群 M_{23} ($M_{24} \curvearrowright \Omega$ の安定化群) への埋め込みを持ち、付随した自然な 24 次置換表現は 5 つ以上の軌道をもつ .

ただし、 \mathfrak{A}_n と \mathfrak{S}_n は n 次交代群と n 次対称群を表す . D_8 と Q_8 は位数 8 の二面体群と四元数群を表し、単に n と書いたら位数 n の巡回群である . また、 $2^4 \cdot \mathfrak{A}_5$ は初等アーベル群 2^4 と 5 次交代群 \mathfrak{A}_5 の半直積を表す等々である .

§2 Enriques と Mathieu

完備非特異代数曲面² S は条件

$$H^1(S, \mathcal{O}_S) = H^2(S, \mathcal{O}_S) = 0, \quad 2K_S \sim 0$$

をみたすとき、Enriques 曲面という．この最後の条件より、標準束 K_S に伴う不分岐 2 重被覆 $X \rightarrow S$ が定義され、被覆曲面 X は $K3$ 曲面となる．よって、Enriques 曲面は $K3$ 曲面を自由（固定点のない）対合³で割って得られる．

Enriques 曲面 S の自己同型は大域 2 重 2 形式の空間 $H^0(S, \mathcal{O}_S(2K_S))$ に自明に作用するとき、semi-symplectic（半シンプレクティック）と呼ぶ．これは $K3$ 曲面の symplectic 自己同型のごく自然な類似物である．定理 2 の Enriques 版として次が得られている．

定理 3 (Mukai-Ohashi[19]) 有限群 G に対して次の条件は同値である．

1. G はある Enriques 曲面に M-semi-symplectic に作用する．
2. G は以下の 5 個の極大群どれかの部分群と同型である．

$$\mathfrak{A}_6, N_{72} = 3^2.D_8, \mathfrak{S}_5, 2 \times \mathfrak{A}_4, 2 \times 4.$$

3. G は 6 次対称群 \mathfrak{S}_6 への埋め込みを持ち、その 2-Sylow 群は \mathfrak{S}_6 のそれより真に小さい．

M-semi-symplectic 作用は semi-symplectic 作用の中でもより Mathieu 群との親和性の高いものである（付録 A 参照）．この定理の出発点となったのは、最初の 3 個の群が M-semi-symplectic に作用する Enriques 曲面が次のデータから構成できることの発見であった（付録 A や [15] 参照）．

	群	位数	$\Omega_+ \sqcup \Omega_-$ の分解型	ルート型
G_1	\mathfrak{A}_6	360	$(1 + 1 + 10) + (6 + 6)$	$(A_5 + A_5)^+$
G_2	N_{72}	72	$(1 + 2 + 9) + (6 + 6)$	$(A_5 + A_5)^+$
G_5	\mathfrak{S}_5	120	$(1 + 5 + 6) + (2 + 10)$	$(A_1 + A_9)^+$

図 1: Ω_{\pm} の分割とルート型

²コンパクト複素解析曲面としてもよい．

³involution: 位数 2 の自己同型．

ここで、 $\Omega_+ \sqcup \Omega_-$ は M_{24} の作用域 Ω を二つの special octads への分解を表す．この分解を保つ群 $\{g \in M_{24} : g(\Omega_+) = \Omega_+\}$ は M_{12} と記される有限単純群で、 Ω_+ にも Ω_- にも 5 重推移的に作用する． M_{12} の位数は $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$ に等しい．

§3 Steiner 系

Steiner 系 $\text{St}(a, b; c)$ とは、固定された集合 S の部分集合の集合 $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(S)$ で次をみたすものをいう．

- 1) 集合 S は c 個の点よりなる．
- 2) \mathcal{B} の元 (ブロックと呼ばれる) の要素の個数は b である．
- 3) S のどの a 点に対しても、それらを含むブロックが一意的に存在する．

前節末の 12 次置換作用 $M_{12} \curvearrowright \Omega_+$ は Steiner 系 $\text{St}(5, 6; 12)$ を保っていることが著しい．この Steiner 系は

$$\text{St}(2, 3; 9) \dashrightarrow \text{St}(3, 4; 10) \dashrightarrow \text{St}(4, 5; 11) \dashrightarrow \text{St}(5, 6; 12) \quad (3)$$

という系列の最後のものである．

1. 3 元体 \mathbb{F}_3 上の 2 次元アフィン平面 \mathbb{A}^2 において点と直線のなす関係を考える．この平面 \mathbb{A}^2 は 9 個の点よりなり、どの 2 点をとっても、それらを通る直線がただ一つ定まる．アフィン直線 \mathbb{A}^1 は 3 個の点よりなるので、直線の集合は Steiner 系 $\text{St}(2, 3; 9)$ をなす．直線の本数は $\binom{9}{2}/3 = 12$ である．
2. 9 元体 \mathbb{F}_9 上の射影直線 \mathbb{P}^1 (前項の \mathbb{A}^2 の 1 点コンパクト化) と調和点列のなす関係を考える．どんな 3 点 $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}^1$ に対しても、 p_1, p_2, p_3, p_4 が調和的となる 4 番目の点 p_4 が一意的に存在する．よって、これらは Steiner 系 $\text{St}(3, 4; 10)$ をなす．調和点列の個数は $\binom{10}{3}/4 = 30$ である．(射影直線上の 4 点は複比が $-1, 2, 1/2$ のいずれかに等しいとき調和的であるというが、標数 3 の体では、この 3 個の値が同一であることに注意．)
3. 前項の $\text{St}(3, 4; 10)$ を拡張する $\text{St}(4, 5; 11)$ が存在する、ブロックの個数は $\binom{11}{4}/5 = 66$ である．
4. さらに $\text{St}(5, 6; 12)$ に拡張する．ブロックの個数は $\binom{12}{5}/6 = 132$ である．

$M_{12} \curvearrowright \Omega_+$ とその安定化群 M_{11}, M_{10}, M_9 がそれぞれの Steiner 系を保つ． M_{10} は 6 次交代群 \mathfrak{A}_6 を指数 2 の部分群として含む群である．また、 M_9 は定理 2 に出現する群 $3^2.Q_8$ である．

§4 $(A_5 + A_5)^+$ 型の Enriques 曲面

6次交代群 \mathfrak{A}_6 の Enriques 曲面への作用は、最初、図1のデータを用いて構成された。この Enriques 曲面の $K3$ 被覆は Keum・小木曾・Zhang[9] で構成されているものと同型である。逆に、[9] を用いて \mathfrak{A}_6 の作用する Enriques 曲面を構成することもできる。ただし、これらはともに Torelli 型定理を用いるもので(付録A) 直接構成が望ましいのは言うまでもない(例えば正標数への還元)。 $(A_5 + A_5)^+$ 型の Enriques 曲面には10次の偏極を保って6次交代群 \mathfrak{A}_6 が作用すると同時に、18次の偏極を保って群 N_{72} も作用する(両作用の関係については付録Cの Theorem Cを見よ。) 両者を理解する出発点になるのは、次の記述である。

例 4 5次元射影空間 \mathbb{P}^5 の中の3個の2次超曲面の完全交叉

$$X \begin{cases} x^2 - (1 + \sqrt{3})yz = u^2 - (1 - \sqrt{3})vw \\ y^2 - (1 + \sqrt{3})xz = v^2 - (1 - \sqrt{3})uw \\ z^2 - (1 + \sqrt{3})xy = w^2 - (1 - \sqrt{3})uv \end{cases} \quad (4)$$

は(8次) $K3$ 曲面である。この $K3$ 曲面の自由対合

$$\varepsilon : (x : y : z : u : v : w) \mapsto (x : y : z : -u : -v : -w)$$

による商曲面 $S = X/\varepsilon$ は(4次) Enriques 曲面である。

この $K3$ や Enriques 曲面 X, S は平面3次曲線の Hesse pencil

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3\lambda xyz = 0, \quad \lambda \in \mathbb{P}^1 \quad (5)$$

と密接に関係している。この3次曲線(Hesseの標準形)が位数4の虚数乘法をもつのは、パラメータ λ が(4)に現れる係数 $1 \pm \sqrt{3}$ に等しいことと同値である。

Hesse pencil の9個の基点を爆発することによって有理楕円曲面 $R \rightarrow \mathbb{P}^1$ をえらるが、上の Enriques 曲面 $S = X/\varepsilon$ は、この R を $\lambda = 1 \pm \sqrt{3}$ 上の二つのファイバーで(位数2の)対数変換したものと同型である。 \mathbb{P}^2 への群 3^2 の Heisenberg 的作用⁴が、 \mathbb{P}^5 へのそれに拡張され、その作用でもって X や S は保たれる。また、 λ を $1 \pm \sqrt{3}$ ととったことにより、位数4の虚数乘法も作用し、 S には(4次偏極を保って)群 $3^{2.4}$ が作用する。この群は \mathfrak{A}_6 の指数10の部分群で、 $N_{72}(= 3^2.D_8)$ の指数2の部分群である。 S の上の非特異有理曲線 \mathbb{P}^1 の配置や楕円ファイバー構造を調べることによって、作用が \mathfrak{A}_6 にも N_{72} にも(semi-symplecticに)拡がること示せる。

有理楕円曲面 $R \rightarrow \mathbb{P}^1$ は、4点(1の3乗根と ∞)において、退化ファイバーをもつ。それらは3直線の和なので、全部で12本の直線が出現する。古典的事実

⁴座標 x, y, z の巡回置換と対角変換 $[1, \omega, \omega^2]$ で生成される作用。Hesse pencil については、例えば、[1]を見よ。

としてよく知られているように、(5) の 9 個の基点とこの 12 直線が前節の Steiner 系 $\text{St}(2, 3; 9)$ をなしている (標数 3 から複素数体 \mathbb{C} への持ち上げ) . Enriques 曲面 $S = X/\varepsilon$ に \mathfrak{A}_6 が作用するのは、対数変換でもって、有理楕円曲面 R の対称性に対応する $\text{St}(2, 3; 9)$ から、(3) の意味でより大きな Steiner 系 $\text{St}(3, 4; 10)$ に移ることに対応している . Hesse pencil 内の 12 本の直線が Enriques 曲面 $S = X/\varepsilon$ の 30 本の非特異有理曲線 \mathbb{P}^1 の配置に拡張されるが、これは二つの Steiner 系の間のプロックの拡張に対応する .

このことは標数 3 の還元で最も端的に現れる . 実際、Enriques 曲面 $S = X/\varepsilon$ の mod 3 還元は指数 2 の Coble 有理曲面 (付録 C) であり、直積 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ を、Frobenius 射のグラフ $\Gamma = \{t, t^3\}$ とその転置 $\Gamma^t = \{t^3, t\}$ (transpose) の交わり $\Gamma \cap \Gamma^t$ の 10 点で爆発した曲面である . より正確には、爆発 $\text{Bl}_{10}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ において Γ と Γ^t の強変換をつづして得られる特異有理曲面⁵が S の mod 3 還元である .

Enriques 曲面の格子不変量 (lattice invariant) やルート不変量 (root invariant) については付録 B.1、[15] や Nikulin[21] を見よ .

§5 $T_{2,3,7}$ と多面体

Enriques 曲面の第 2 コホモロジー群 $H^2(S, \mathbb{Z})$ は標準因子 K_S (第 1 Chern 類 $c_1(S)$ と言っても同じ) を捩れにもつが、それで割ってえられる自由加群を $H^2(S, \mathbb{Z})_f$ で表す . これは階数 10 で、カップ積 (交点形式) でもって (2 次整) 格子になる . 偶かつ unimodular であり、符号は $(1, 9)$ なので、格子としては $E_8 + U$ と同型になる . ただし、 U は $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を内積とする格子を、 E_8 は次を Dynkin 図形とする負定値なルート格子を表す .

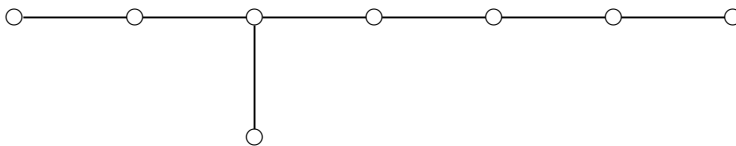


図 2: E_8 格子 $T_{2,3,5}$

格子としての $H^2(S, \mathbb{Z})_f$ は図 2 の長い足をさらに二つ延ばした図 3 からえられる . E_8 の基本ウェイトのような表現論的意味は不明であるが、この $H^2(S, \mathbb{Z})_f \simeq T_{2,3,7}$ (E_{10} と呼ばれる) の基本ウェイトを形式的に考えることができる . 下の図ではそ

⁵2 個の $(1, 1)/4$ 型商特異点をもつ .

のノルム（平方長）を下付添字で表した（交点行列の逆行列の対角成分）．これらは Enriques 曲面の偏極を考える際に重要になる ([2], [4]) ．



図 3: 格子 $T_{2,3,7}(= E_{10})$ と基本ウェイト

Enriques 曲面の射影モデルの中でもこれらの 10 個の基本ウェイトに対応するものは美しい構造をもっている．射影モデルの研究の副産物として、多面体との図 4 のような対応もえられる．

楕円 fibration に対応する w_0 と堀川モデルに対応する w_2 は、多面体が退化しているので、略した． w_4 に対応する Godeaux モデルとは、例 4 のようなものを言う． w_{10} に対応する Fano モデルとは、Enriques 曲面を 10 次曲面 $S_{10} \subset \mathbb{P}^5$ として表す方法を言う．一般のものは 2 次超曲面に含まれず、10 個の 3 次斉次式でもって定義される． w_6 に対応する Enriques sextic とは、Enriques 自身の最初の発見に現れるもので、 \mathbb{P}^3 内の非正規な 6 次曲面の正規化のことである．付録 B.2 や [18] を見よ．

基本ウェイト	w_4	w_{10}	w_6
射影モデル、偏極	Godeaux	Fano, $(\sum_1^{10} f_i)/3$	Enriques sextic, $f_1 + f_2 + f_3$
多面体	正 8 面体	正 20 面体	立方体

w_{12}	w_{20}	w_{30}	w_{42}	w_{18}
$f_1 + \dots + f_4$	$f_1 + \dots + f_5$	$f_1 + \dots + f_6$	$f_1 + \dots + f_7$	$(\sum_1^9 f_i)/2$
菱形 12 面体 ⁶	菱形 20 面体	菱形 30 面体	菱形 42 面体	?

図 4: Enriques 格子と多面体

対応する多面体の表面積は基本ウェイトのノルムと一致している．ただし、表面積は 3 角形は面積 $1/2$ 、4 角形は 1 で数える．

§6 付録について

3 つの付録は筆者が、Oberwolfach 数学研究所（独）において講演した際のアブストラクトである．それぞれ独立に読めるようになっているので、重複はそのままに

⁶英語では rhombic dodecahedron, rhombic icosahedron, rhombic triacontahedron,... という．図は入れられなかった．各自ウェブ上で観賞されたい．

した .

- A 「多くの semi-symplectic 自己同型をもつ Enriques 曲面」(2010 年 9 月)
定理 3 が弱い予想の形になっているが、そのままにしてある .
- B 「自己同型群が概アーベル⁷な Enriques 曲面」(2012 年 9 月)
 $(A_5 + A_5)^+$ 型の Enriques 曲面は付録 B.2 の最後で他の 3 種

$$A_9, E_7 + A_2, (D_6 + A_3 + A_1)_W^+$$

と共に概アーベルな自己同型群から除外されるが、かえってそれ故に面白いとも言える . 実際、最近の研究 [20] では、 $(E_7 + A_2)$ 型の Enriques 曲面の場合に自己同型群が決定されている . A_9 型は調和有理曲面 (付録 C) を Coble 極限にもつ 30 次 Enriques 曲面の 1 次元族である . また、 $(D_6 + A_3 + A_1)_W^+$ 型は、[18] において octahedral Enriques sextic と呼ばれている Enriques 曲面である .

- C 「有理曲面に隣合う曲面としての Enriques 曲面、また、その逆」(2013 年 5 月)
Enriques 曲面と Coble 有理曲面の密接な関係を自己同型群の観点から調べたものである .

3 種の曲面の関係についての Persson 氏の意見を記しておく .

Enriques surfaces straddle the land between $K3$ surfaces and rational surfaces. With rational surfaces, more precisely rational elliptic surfaces, they share the Hodge diamond . . . With $K3$ surfaces they share the potential of many competing elliptic fibrations. To borrow notions from paleontology, their similarities with rational surfaces are analogies⁸, with $K3$ surfaces homologies⁹. (MR986969)

Appendix

⁷virtually abelian: 有限群を法としてアーベル群 .

⁹相似 (analogy) とは発生起源を異にするが、同じ機能をもつために似た形態になること .

⁹相同 (homology) とは異種の生物の器官で、形状や機能が異なるが、発生的には同一起源であること .

A Enriques surfaces with many semi-symplectic automorphisms (Sep. 2010, Oberwolfach)

An automorphism of a K3 surface S is *symplectic* if it acts on $H^0(\mathcal{O}_S(K_S))$ trivially. All finite groups which have symplectic actions on K3 surfaces are classified in terms of the Mathieu group M_{24} by Mukai [12] and Kondo [11]. An automorphism of an Enriques surface S is *semi-symplectic* if it acts on $H^0(\mathcal{O}_S(2K_S))$ trivially. A smart classification similar to K3 surfaces is desirable for semi-symplectic actions of Enriques surfaces but still far from complete investigation. Here I propose a restricted class of semi-symplectic actions.

Definition An effective semi-symplectic action of a finite group G on an Enriques surface is *M -semi-symplectic* if the Lefschetz number of g equals 4 for every automorphism $g \in G$ of order 2 and 4.

Here the Lefschetz number of an automorphism σ is the Euler number of the fixed point locus $\text{Fix } \sigma$, and equal to the trace of the cohomology action of σ on $H^*(S, \mathbb{Q})$.

M -semi-symplectic actions are closely related to the symmetric group \mathfrak{S}_6 of degree 6 via the Mathieu group M_{12} though \mathfrak{S}_6 itself has no semi-symplectic actions. It is known that \mathfrak{S}_6 has six maximal subgroups upto conjugacy, and four modulo automorphisms. The four subgroups are

1. the alternating group \mathfrak{A}_6 ,
2. the symmetric group \mathfrak{S}_5 of degree 5,
3. $(C_3)^2.D_8$, the normalizer of a 3-Sylow subgroup, and
4. the direct product $\mathfrak{S}_4 \times C_2$,

where C_n and D_n denote a cyclic and a dihedral group of order n , respectively.

Theorem *The three maximal subgroups $\mathfrak{A}_6, \mathfrak{S}_5, (C_3)^2.D_8$ and the abelian group $(C_2)^3$ have M -semi-symplectic actions on Enriques surfaces.*

Remark By Kondo [10], there are two Enriques surfaces whose automorphism groups are isomorphic to \mathfrak{S}_5 . One is called type VII and the other is the quotient of the Hessian of a special cubic surface (type VI). The action of \mathfrak{S}_5 is M -semi-symplectic for the former and not for the latter.

The action of the three maximal subgroups are constructed refining the method of [13]. We use

1. embeddings of \mathfrak{S}_6 into the Mathieu group M_{12} ,

2. the action of $M_{12} \times C_2$ on the Leech lattice, and
3. Torelli type theorem for Enriques surfaces.

An Enriques surface $S = Km(E_1 \times E_2)/\varepsilon$ of Lieberman type has a semi-symplectic action of $(C_2)^4$ by translation by 2-torsion points. One involution $\sigma \in (C_2)^4$ is *numerically trivial* in the sense of [17], that is, its Lefschetz number is the maximal (= 12). Moreover, the action of $(C_2)^4$ is M -semi-symplectic except for σ . Hence S has an M -semi-symplectic action of $(C_2)^3$

Question Is a finite group isomorphic to a proper subgroup of the symmetric group \mathfrak{S}_6 , if it has an (effective) M -semi-symplectic action on an Enriques surface?

The definition of M -semi-symplectic action is modeled on the permutation group M_{12} of degree 12. The permutation type of $g \in M_{12}$ depends only on its order n if it has a fixed point (on the operator domain of cardinality 12). The type and the number of fixed points $\mu_+(n)$ are as follows.

n	1	2	3	4	5	6	8	11
permutation type	(1)	(2) ⁴	(3) ³	(4) ²	(5) ²	(6)(3)(2)	(8)(2)	(11)
$\mu_+(n)$	12	4	3	4	2	1	2	1

It is well known that a symplectic involution of a K3 surface have exactly 8 fixed points. But for an involution σ of an Enriques surface, the fixed point set $\text{Fix } \sigma$ is not necessarily finite and the Lefschetz number varies from -4 to 12 . (Note that every involution of an Enriques surface is semi-symplectic.) The required number 4 in our definition is one half of 8, the mean of -4 and 12 and equal to $\mu_+(2)$. A semi-symplectic action of G on an Enriques surface is M -semi-symplectic if and only if the Lefschetz number and μ_+ are the same on G since the order of semi-symplectic automorphism is either ≤ 6 or ∞ by H. Ohashi.

B Enriques surfaces whose automorphism groups are virtually abelian (Sep. 2012, Oberwolfach)

A (minimal) Enriques surface S is the quotient of a K3 surface X by a fixed-point-free involution $\varepsilon : X \rightarrow X$. We consider it over the complex number field. Its Picard group is isomorphic to the second cohomology group $H^2(S, \mathbb{Z})$. The torsion part of $H^2(S, \mathbb{Z})$ is generated by the first Chern class $c_1(S)$. The torsion free part is an even integral unimodular lattice of rank 10. An Enriques surface S is algebraic and the automorphism group $\text{Aut } S$ is discrete. Its number of moduli is 10.

If an Enriques surface S is (moduli theoretically) very general, then S does not contain a smooth rational curve on it. Every positive isotropic divisor class on such an S defines an elliptic fibration whose Mordell-Weil rank¹⁰ is 8. In particular, $\text{Aut } S$ is infinite if S is very general. The automorphism group $\text{Aut } S$ shrinks when S becomes special and has smooth rational curves on it. As the most extreme case, Nikulin[21] and Kondō[10] classified the Enriques surfaces with only finitely many automorphisms into seven types I, –, VII. In this talk we explain our recent result (and its proof) on the next case. Recall that a group is called *virtually abelian* if it contains a finitely generated abelian group as normal subgroup of finite index.

Theorem A. *The automorphism group $\text{Aut } S$ of an Enriques surface S is virtually abelian if and only if either $\text{Aut } S$ is finite or S is of (lattice) type E_8 , that is, the twisted Picard group $\text{Pic}^\omega S$ contains the (negative definite) root lattice of type E_8 as sublattice.*

The following lists the lattice type of Enriques surfaces with virtually abelian automorphism groups.

No.	I	II	III	IV	V
Lattice type	E_8	D_9	$(D_8 + A_1 + A_1)_W^+$	$(D_5 + D_5)_W$	$(E_7 + A_2 + A_1)_W$
			Lieberman type (see Example C)		Kondō-Mukai type (cf. [14])
	VI		VII		
	$E_6 + A_4$		$(A_9 + A_1)^+$		
	Hessian (cf. [6])		Fano[8]		

Here L^+ denotes an odd (integral) lattice which contains L as sublattice of index 2. See Definition B below for *lattice type* L or L_W , which is the key of our proof of the theorem. Our lattice type is a refinement of the root invariants of Nikulin[21] in terms of the twisted cohomology group.

B.1 Twisted cohomology

The kernel of the Gysin map $\pi_* : H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z})$ is a free \mathbb{Z} -module of rank 12, which we call the *twisted cohomology group* of an Enriques surface S and denote by $H^\omega(S, \mathbb{Z})$, where $\pi : X \rightarrow S$ is the canonical (or universal) covering. $H^\omega(S, \mathbb{Z})$ is isomorphic to the second cohomology group $H^2(S, \mathbb{Z}_S^\omega)$ of S with coefficients in the unique non-trivial local system \mathbb{Z}_S^ω . Hence, the natural non-degenerate pairing

¹⁰For an elliptic fibration $\Phi : S \rightarrow \mathbb{P}^1$, the rank of the Mordell-Weil group of its Jacobian fibration is called the *Mordell-Weil rank* of Φ for short.

$\mathbb{Z}_S^\omega \times \mathbb{Z}_S^\omega \rightarrow \mathbb{Z}_S$ induces a \mathbb{Z} -valued bilinear form on $H^\omega(S, \mathbb{Z})$, for which the following holds (cf. [5]):

- $H^\omega(S, \mathbb{Z})$ is an odd unimodular lattice $I_{2,10}$ of signature $(2, 10)$.
- $H^\omega(S, \mathbb{Z})$ carries a polarized Hodge structure $H^\omega(S)$ of weight 2 with Hodge number $(1, 10, 1)$.
- The $(1, 1)$ -part of $H^\omega(S)$ is the kernel of the pushforward map $\pi_* : \text{Pic } X \rightarrow \text{Pic } S$. We call it the *twisted Picard lattice* and denote by $\text{Pic}^\omega S$.
- The modulo 2 reduction $H^\omega(S, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/2$ is canonically isomorphic to the usual cohomology $H^2(S, \mathbb{Z}/2)$ with $\mathbb{Z}/2$ coefficient.

The twisted Picard lattice $\text{Pic}^\omega S$ is negative definite, and does not contain a (-1) -element by Riemann-Roch. Let L be such a lattice, that is, negative definite and $\not\cong (-1)$ -element.

Definition B. An Enriques surface S is of *lattice type* L (resp. L_W) if the twisted Picard lattice $\text{Pic}^\omega S$ contains L as primitive sublattice and if the orthogonal complement of $L \hookrightarrow H^\omega(S, \mathbb{Z})$ is odd (resp. even).

The orthogonal complement is even if and only if $L \otimes \mathbb{Z}/2$ contains Wu's class, that is, $c_1(S)$ modulo 2. The number of moduli of Enriques surfaces of (lattice) type L or L_W is equal to $10 - \text{rank } L$.

Example C. An Enriques surface is called *Lieberman type* if it is isomorphic to the quotient of a Kummer surface $\text{Km}(E_1 \times E_2)$ of product type by ε_+ , where E_i , $i = 1, 2$, is an elliptic curve and ε_+ is the composite of $(-1_E, 1_E)$ and the translation by a 2-torsion (a_1, a_2) with $0 \neq a_i \in (E_i)_{(2)}$. An Enriques surface S is of Lieberman type if and only if it is of type $D_{8,W}$, that is, $\text{Pic}^\omega S$ contains D_8 primitively and the orthogonal complement of $D_8 \hookrightarrow H^\omega(S, \mathbb{Z})$ is isomorphic to $U + U(2)$, where U (resp. $U(2)$) denotes the rank 2 lattice given by the symmetric matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(resp. $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$). (The orthogonal complement is isomorphic to $\langle 1 \rangle + \langle -1 \rangle + U(2)$ if S is of type D_8 .) The IIIrd Enriques surface in the above table is of Lieberman type with $E_1 = E_2 = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-1})$.

If C is a smooth rational curve on an Enriques surface, then its pullback splits into two disjoint rational curves C_0 and C_1 . Their difference $[C_0] - [C_1]$ defines a (-2) -element in $\text{Pic}^\omega S$ up to sign, which is called the *twisted fundamental class* of C . In particular, a tree of smooth rational curves on S of *ADE*-type defines a negative definite sublattice of the same type in $\text{Pic}^\omega S$.

B.2 Outline of proof of Theorem A

Assume that $\text{Aut } S$ is not finite but virtually abelian. Then S has an elliptic fibration $\Phi_0 : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ of positive Mordell-Weil rank, and all other elliptic fibrations $\Phi \neq \Phi_0$ have Mordell-Weil rank zero. In particular S has one and only one elliptic fibration of positive Mordell-Weil rank modulo $\text{Aut } S$. By an argument similar to [21], S is of type either $E_8, A_9, E_7 + A_2, (A_5 + A_5)^+$ or $(D_6 + A_3 + A_1)_W^+$. Except for E_8 , S has more than one elliptic fibrations of positive Mordell-Weil rank. For example, in the cases of type A_9 and $(A_5 + A_5)^+$, it is deduced from the action of the alternating group \mathfrak{A}_5 . In the last case, it is deduced from the fact that S is the normalization of the diagonal Enriques sextic

$$\bar{S} : (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \sqrt{-1} \left(\frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} \right) x_0 x_1 x_2 x_3 = 0$$

in \mathbb{P}^3 . (This equation was found in [18] as the octahedral Enriques sextic.) In the case of type E_8 , $\text{Aut } S$ is virtually abelian by Barth-Peters[3, §4].

C Enriques surfaces as neighbors of rational surfaces and vice versa (May 2013, Oberwolfach)

Enriques surfaces are similar to K3 surfaces. Both are of Kodaira dimension one and can be studied lattice theoretically by virtue of Torelli type theorem. But Enriques surfaces, with the same birational invariants $q = p_g = 0$, are similar to rational surfaces too. They mildly degenerate to rational surfaces with quotient singularities of type $(1,1)/4$, and change into rational elliptic surfaces by logarithmic transformation. This similarity and intimacy is very useful in studying Enriques and rational surfaces. In my talk I discussed Theorems A–C on automorphism groups from this view point.

Let R_5 be a *quintic del Pezzo surface*, the blow-up of the projective plane \mathbb{P}^2 at four points in general position, say, at $(x_0 : x_1 : x_2) = (1 : \pm 1 : \pm 1)$. It has ten *lines*, that is, smooth rational curves of anti-canonical degree one, and the dual graph of their configuration is the Petersen graph. There are 15 intersection points among the ten lines in total. Let R_{-10} be the blow-up of R_5 at the 15 intersection points. The Cremona transformation $(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (1/x_0 : 1/x_1 : 1/x_2)$ induces an involution of R_{-10} , which we denote by σ . Taking conjugate by the action of $\text{Aut } R_5 \simeq \mathfrak{S}_5$, we obtain five involutions $\sigma = \sigma_1, \dots, \sigma_5$.

Theorem A. *The automorphism group of R_{-10} is generated by $\text{Aut } R_5$ and σ . Moreover, it is isomorphic to the semi-direct product of the amalgam of five involutions $\langle \sigma_1 \rangle * \cdots * \langle \sigma_5 \rangle$ by \mathfrak{S}_5 .*

The double cover of R_5 with branch the union of ten lines is a K3 surface with 15 nodes. The minimal resolution X_4 is a double cover of R_{-10} . (The suffix “4” denotes the discriminant of rank 2 transcendental lattice of the K3 surface.) Hence R_{-10} , with the strict transform of ten lines, is a Coble-Enriques surface in the following sense.

Definition A smooth algebraic surface S with a boundary divisor $B = \sqcup_1^m B_i$ is a *Coble-Enriques surface* of index m if S is the a quotient of a smooth K3 surface X by an involution ε whose fixed point locus is the disjoint union of m smooth rational curves and if B is the branch divisor.

The boundary components B_i 's are all smooth rational curves with self intersection number $(B_i^2) = -4$. When index $m = 0$, S is nothing but an Enriques surface. Those with positive index are classified by Dolgachev-Zhang [7]. The maximum index is $m = 10$ and the rational surface R_{-10} above is the unique Coble-Enriques surface of maximum index.

Example (1) Let $\bar{B} \subset \mathbb{P}^2$ be an (irreducible) plane sextic with ten nodes and R_{-1} the blow-up of \mathbb{P}^2 at the ten nodes. Then R_{-1} with the strict transform B of \bar{B} is a Coble-Enriques surface of index one.

(2) Let \bar{B} be the union of six lines in \mathbb{P}^2 . Then the blow-up R_{-6} of \mathbb{P}^2 at the 15 intersection points, with the strict transform B of \bar{B} , is a Coble-Enriques surface of index six.

Returning to Theorem A, let $L \simeq \mathbb{Z}^{10}$ be the orthogonal complement of the boundary components B_1, \dots, B_{10} in the Picard lattice $\text{Pic } R_{-10} \simeq \mathbb{Z}^{20}$. The 15 exceptional curves of the blowing up $R_{-10} \rightarrow R_5$ define 15 roots, that is, divisor classes of self intersection number -2 , in L . The five involutions $\sigma_1, \dots, \sigma_5$ also define five roots in L . These 20 roots have the same graph as the Enriques surface S of type VII in Kondo [10]. Theorem A is proved in an analogous way to his proof of $\text{Aut } S \simeq \mathfrak{S}_5$.

Remark Since the Picard lattice of the covering K3 surface X_4 is 2-elementary, $\text{Aut } X_4$ is the central extension of $\text{Aut } R_{-10}$ by the covering involution. Hence the latter half of Theorem A also follows from Vinberg [22]. Our proof is the one which eliminates the K3 surface X_4 and Torelli type theorem from his.

Let S be an Enriques surface which has semi-symplectic action of both the alternating group \mathfrak{A}_6 of degree six and the group 3^2D_8 of order 72 and are found in [15]

and [19]. (An automorphism of an Enriques surface S is *semi-symplectic* if it acts trivially on $H^0(\mathcal{O}_S(2K_S)) \simeq \mathbb{C}$.) The covering K3 surface of S is the one found by Keum-Oguiso-Zhang [9] using the Leech lattice and Leech roots.

Theorem B. *S is isomorphic to the logarithmic transform of the Hesse elliptic surface*

$$R_0 := \text{Bl}_9 \mathbb{P}^2 \cdots \rightarrow \mathbb{P}^1, \quad (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 : 3x_0x_1x_2)$$

at the two fibers over $(1 \pm \sqrt{3} : 1)$ (with multiplicity two).

By a similar argument with the proof of Theorem A, we have

Theorem C. *The semi-symplectic automorphism group of S is isomorphic to the amalgam $(3^2D_8) * \mathfrak{A}_6$ over 3^2C_4 .*

The Enriques surface S has 40 roots of \mathbb{P}^1 's and involutions. It is interesting to observe that the graph of these 40 roots are the same as that of Example (2). When the six lines tangent to the same conic, the Coble-Enriques surface R_{-6} of index six is the projection of a Kummer quartic surface from one of 16 nodes, say n_0 . The boundary $B = \sum_1^6 B_i$ is the image of six tropes passing through n_0 . In this case, the 40 roots of R_{-6} consists of 15 \mathbb{P}^1 's over the remaining 15 nodes n_1, \dots, n_{15} , 15 involutions of Hutchinson-Göpel type ([16]) and the images of 10 tropes which does not pass through n_0 .

参考文献

- [1] Artebani, M. and Dolgachev, I.: The Hesse pencil of plane cubic curves, Enseign. Math. **55**(2009), 235–273.
- [2] Barth, W.: Lectures on K3- and Enriques surfaces, in “Algebraic Geometry”, Lect. Notes in Math. **1124**, Springer Verlag, 1985, pp. 21–57.
- [3] Barth, W. and Peters, C.: Automorphisms of Enriques surfaces, Invent. Math. **73** (1983), 383–411.
- [4] Cossec, F. and Dolgachev, I.: *Enriques surfaces. I*, Progress in Math., **76**, Birkhauser, Boston, MA, 1989.
- [5] Degtyarev, A., Itenberg, I. and Kharlamov, V.: *Real Enriques surfaces*, Lecture Notes in Math. **1746**(2000), Springer Verlag.

- [6] Dolgachev, I. and Keum, J.-H.: Birational automorphisms of quartic Hessian surfaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **354**(2002), 3031–3057.
- [7] Dolgachev, I. and Zhang, D.Q.: Coble rational surfaces, *Amer. J. Math.* **123**(2001), 79–114.
- [8] Fano, G.: Sferficie algebriche di genere zero e bigenere uno e loro casi particolari, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **29**(1910), 98–118.
- [9] Keum, J., Oguiso, K. and Zhang, D.Q.: The alternating group of degree 6 in the geometry of the Leech lattice and K3 surfaces, *Proc. London Math. Soc.* **90**(2005), 371–394.
- [10] Kondo, S.: Enriques surfaces with finite automorphism groups, *Japan. J. Math.*, **12**(1986), 191–282.
- [11] Kondo, S.: Niemeier lattices, Mathieu groups and finite groups of symplectic automorphisms of $K3$ surfaces, *Duke Math. J.* **92**(1998), 593–598.
- [12] Mukai, S.: Finite groups of automorphisms of K3 surfaces and the Mathieu group, *Invent. math.*, **94**(1988), 183–221.
- [13] Mukai, S.: Lattice theoretic construction of symplectic actions on $K3$ surfaces, Appendix to [11], *Duke Math. J.* **92**(1998), 599–603.
- [14] Mukai, S.: Numerically trivial involutions of Kummer type of an Enriques surface, *Kyoto Math. J.* **50**(2010), 889–902.
- [15] Mukai, S.: Lecture notes on $K3$ and Enriques surfaces (Notes by S. Rams), in “Contributions to Algebraic Geometry” (IMPANGA Lecture Notes), European Math. Soc. Publ. House, 2012, pp. 389–405.
- [16] Mukai, S.: Kummer’s quartics and numerically reflective involutions of Enriques surfaces, *J. Math. Soc. Japan* **64**(2012), 231–246.
- [17] Mukai, S. and Namikawa, Y.: Automorphisms of Enriques surfaces which act trivially on the cohomology groups, *Invent. math.*, **77**(1984), 383–397.
- [18] Mukai, S. and Ohashi, H.: Enriques surfaces of Hutchinson-Göpel type and Mathieu automorphisms, in “Arithmetic and Geometry of $K3$ surfaces and Calabi-Yau threefolds”, *Fields Institute Communications* **67**, 2013, pp. 429–454.

- [19] Mukai, S. and Ohashi, H.: Finite groups of automorphisms of Enriques surfaces and the Mathieu group M_{12} , in preparation.
- [20] Mukai, S. and Ohashi, H.: The automorphism groups of Enriques surfaces covered by symmetric quartic surfaces, to appear. RIMS-preprint # 1715(2014).
- [21] Nikulin, V.V.: On the description of the groups of automorphisms of Enriques surfaces, Dokl. Akad. Nauk SSSR **277**(1984), 1324–1327; English translation, Soviet Math. Dokl. **30**(1984), 282–285.
- [22] Vinberg, E.B.: The two most algebraic K3 surfaces, Math. Ann. **265** (1983), 1–21.

京都大学数理解析研究所
向井 茂