KÄHLER-EINSTEIN 計量と K-安定性
2013 年 12 月

二木 昭人

1. Introduction

Kähler-Einstein 計量の存在問題と K 安定性と呼ばれる一種の GIT 安定性の同値性についての予想（Yau-Tian-Donaldson 予想）に関する歴史と，最近の Chen-Donaldson-Sun [3], [4], [5], [6], Tian [30], Székelyhidi [28] による解決について報告することが本稿の主目的である．あらましは以下の通りである．Kähler-Einstein 計量の存在問題は $c_1(M)$ が負，0，正の三つの場合分けがあり，負の場合は Aubin と Yau が，0 の場合は Yau が 1970 年代後半に無条件に解の存在を証明し，解決した．$c_1(M)$ が正，すなわち M が Fano 多様体の場合は，いくつかの障害が知られていた．上記の Yau-Tian-Donaldson 予想は K 安定性が一つの同値な条件を与えるであろうという予想である．この予想のあらましは次の通りである．

・Kähler-Einstein 計量の存在問題は Monge-Ampère 方程式と呼ばれる非線形偏微分方程式を解く問題に帰着される．この方程式の解は満渕 K-energy と呼ばれる汎関数の臨界点である．この汎関数は Kähler 計量全体の空間の凸関数である．この汎関数が計量の空間の無限遠で $+\infty$ に発散し，謂わば固有な関数であるための条件が得られればそのときには臨界点を持つと考えられる．

・K 安定性は Fano 多様体（または一般に偏極多様体）M が小平埋め込みの先の複素射影空間の $\mathbb{C}^*$-作用により退化するときに，退化した極限の Donaldson-Futaki 不変量と呼ばれるものの符号で安定性を定義する（数値的判定法）．すなわち全ての退化に対し，Donaldson-Futaki 不変量が非負であること，Donaldson-Futaki 不変量が 0 になるのは M が $\mathbb{C}^*$-作用で保たれること，が K-安定性の定義である．

・退化した極限に複素射影空間の Fubini-Study 計量を制限すれば特異計量になり，Kähler 計量全体の空間の無限遠と見なすことができる．Dnaldson-Futaki 不変量の符号はこの無限遠での満渕 K-energy の振る舞いを表現している．すなわち，正であるということは満渕 K-energy が無限遠において $+\infty$ に発散していることを表している．

・Yau-Tian-Donaldson 予想は Fano 多様体の代数的退化としての Kähler 計量の無限遠のみを見れば，Kähler 計量全体の空間の無限遠での満渕 K-energy の振る舞いがわかり，固有性を判定できるということを主張している．

この予想へのアプローチとして Donaldson は divisor に沿って cone angle を持つ Kähler-Einstein 計量という道具を導入した．cone-angle をパラメーターとする Monge-Ampère 方程式の族を考え，小さい cone angle で解が存在し，この解を cone angle 2π まで延長できれば滑らかな Kähler-Einstein 計量が存在するという方針で，K 安定ならば Kähler-Einstein 計量がことを証明することができると考えた．2012 年秋に，Chen-Donaldson-Sun と Tian がほぼ同時にこの方法で Yau-Tian-Donaldson 予想を肯定的に解決したと発表した．この方法では partial C^0-estimate と呼ばれる Bergman 核の下からの評価が鍵となる．divisor に沿って cone angle を持

Date: 2013 年 1 月 30 日.

つ Kähler-Einstein 計量は divisor の外では Kähler-Einstein 計量であり，そのために Gromov-Hausdorff 収束が open dense set 上で C^∞ 収束となりその記述が可能になる．このことが有効に使われて partial C^0-estimate が可能となった．この時点では旧来の Aubin の continuity method では partial C^0-estimate は困難と考えられていた．しかし，2013 年 10 月に G.Székelyhidi が旧来の Aubin の continuity method でも partial C^0-estimate が可能であることを示した．これにより，Yau-Tian-Donaldson 予想のより単純な証明が可能になったと主張されている．次節以降は以上の概略を説明を試みる．

なお，Kähler-Einstein 計量の存在問題はいくつかの異なる形に問題が一般化される．また，K 安定性で用いられる不変量はいろいろな形に一般化され，一般化された問題のそれぞれで有用な役割を果たす．例えば，この問題は偏極多様体 (M,L) に対し，いつ $c_1(L)$ を代表する Kähler 形式で，スカラー曲率一定となるものが存在するかという定式化に一般化され，またこの一般化で考える方が GIT の観点からは見通しが良い．このスカラー曲率一定 Kähler 計量の存在問題，またその更なる一般化 extremal Kähler 計量の存在問題は未解決である．

2. Kähler-Einstein 計量の存在問題

M をコンパクト複素多様体，g を M の Kähler 計量とする．すなわち，$z_1,\cdots,z_m$ を局所正則座標とし

$$\omega = \sqrt{-1}\sum_{i,j=1}^{m} g_{i\bar{j}}\ dz_i \wedge d\overline{z}_j \tag{1}$$

とおくと ω は M の局所座標の取り方によらない大域的な 2 次微分形式であり，
(1) 行列 $(g_{i\bar{j}})$ は各点で正値エルミート行列；
(2) $g_{i\bar{j}}$ は局所 C^∞ 級関数；
(3) $d\omega = 0$ をみたすものとする．

このとき，ω_g を g の Kähler 形式，ドラーム類 $[\omega_g]$ を Kähler 類 という．また，Kähler 計量を持つ複素多様体を Kähler 多様体という．

Kähler 計量 g に対し，

$$\mathrm{Ric}(g)_{i\bar{j}} := -\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}\log\det(g_{k\bar{\ell}}) \tag{2}$$

により与えられる 2 階のテンソル $\mathrm{Ric}(g)_{i\bar{j}}$ を **Ricci 曲率**という．

特性類の理論（Chern-Weil 理論）によれば第 1 Chern 類 $c_1(M)$ は

$$\rho_g := \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\sum_{i,j=1}^{m}\mathrm{Ric}(g)_{i\bar{j}}\ dz_i \wedge d\overline{z}_j = -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log\det(g_{k\bar{\ell}}) \tag{3}$$

により代表される．その意味で ρ_g は Ricci 形式とも，第 1 Chern 形式とも呼ばれる．

一般に，ある実定数 λ に対し

$$\mathrm{Ric}(g)_{i\bar{j}} = \lambda\ g_{i\bar{j}} \tag{4}$$

つまり

$$2\pi\rho_g = \lambda\omega_g \tag{5}$$

となるとき，g は Kähler-Einstein 計量と呼ばれる．これは物理的には重力場の方程式にあたる．

Ricci 曲率は正の相似拡大により不変であるから $\lambda = 1,\ 0,\ -1$ と正規化して良い．まず，$\lambda = 1$ としよう．このとき

$$c_1(M) = [\rho_g] = 1/2\pi[\omega_g] \tag{6}$$

は正の $(1,1)$ 類である．つまり K_M^{-1} は ample，または M は Fano 多様体である．

以上をまとめると，次の通りである．
$\lambda = 1$ の Kähler-Einstein 計量を持つ $\Longrightarrow$ M は Fano 多様体である．ただし M が Fano とは $c_1(K_M^{-1}) = c_1(M) > 0$ が成り立つ時を言う．

問題　$\Longleftarrow$ はいつ成り立つか？

$\lambda = -1$ のときと $\lambda = 0$ のときは解決済みである．すなわち，

$\lambda = -1$　の Kähler-Einstein 計量を持つ $\Longleftrightarrow$ $c_1(M) < 0$.
$\lambda = 0$　の Kähler-Einstein 計量（Calabi-Yau 計量）を持つ $\Longleftrightarrow$ $c_1(M) = 0$.

が既に証明されている．上述の通り $\Longrightarrow$ はどちらも自明である．$\Longleftarrow$ は $\lambda = -1$ の場合は Aubin [1] と Yau [33]，[34] が独立に，$\lambda = 0$ の場合は Yau [33]，[34] がそれぞれ 1970 年代後半に証明を与えた．いずれも多様体については $c_1(M) < 0$ と $c_1(M) = 0$ 以外には付加的条件は何もついていないことに注意しよう．

$\lambda = 1$ の場合は，いくつかの障害が知られており，従って $c_1(M) > 0$ 以外に何らかの付加的条件を付けないと，Kähler-Einstein 計量の存在は示す事はできないことが知られている．その典型例は Kähler-Einstein 計量（もっと一般にスカラー曲率一定 Kähler 計量）を持つ Kähler 多様体においては正則ベクトル場全体のなす複素 Lie 環 $\mathfrak{h}(M)$ が reductive であるという事実（松島の定理 [19]）である．

もう一つの例は $\mathfrak{h}(M)$ の指標 $f : \mathfrak{h}(M) \to \mathbb{C}$ が存在し，もし M が Kähler-Einstein 計量を持つならば $f = 0$ となるという筆者の結果（[14]）である．この $f : \mathfrak{h}(M) \to \mathbb{C}$ は次のようにして定義される．今，M は Fano 多様体と仮定し，$c_1(M) > 0$ であるので，Kähler 形式 ω を $\omega \in 2\pi c_1(M)$ となるように取る．Kähler-Einstein 計量がもし存在し，ω がその Kähler 形式であるなら $\omega \in 2\pi c_1(M)$ をみたすから，この取り方は必然である．またその Ricci 形式 $\rho(\omega)$ も $c_1(M)$ を代表する．従って，ある滑らかな実関数 $F \in C^\infty(M)$ が存在し，

$$2\pi\rho(\omega) = \omega + i\partial\overline{\partial}F \tag{7}$$

となるものが存在する．F が定数になることと ω が Kähler-Einstein 計量の Kähler 形式であることとは同値であるが，任意に選んだ Kähler 計量は Kähler-Einstein 計量でとは限らないので一般には F は定数ではない．このとき，$X \in \mathfrak{h}(M)$ に対し

$$f(X) = \int_M XF\,\omega^m \tag{8}$$

により f を定義する．ここに $m = \dim_{\mathbb{C}} M$ である．この f は $\omega \in 2\pi c_1(M)$ を選んで定義されているが，実は $\omega \in 2\pi c_1(M)$ の取り方によらない（[14]）．したがって複素多様体 M の自己同型群の作用で不変である．自己同型群の Lie 環が $\mathfrak{h}(M)$ であるから f は Lie 環の指標になる．

3. MONGE-AMPÈRE 方程式

Kähler-Einstein 計量が存在することを証明することは次の Monge-Ampère 方程式の解の存在を証明する事に帰着される．F 与えられた Kähler 計量 $(g_{i\bar{j}})$ と $F \in C^\infty(M)$ に対し

$$\frac{\det(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j})}{\det(g_{i\bar{j}})} = e^{-\lambda\varphi+F} \tag{9}$$

$$(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}) > 0$$

をみたす $\varphi \in C^\infty(M)$ の解の存在を証明せよ．この F は $\lambda = 1$ の場合，式 (7) により定まったものである．

この方程式の感触を得るために $\dim_{\mathbb{C}} M = 1$ のときを考察してみよう．この場合，方程式は

$$1 + \Delta\varphi = e^{-\lambda\varphi+F} \tag{10}$$

となる．簡単のため $F = 0$ とすると

$$1 + \Delta\varphi = e^{-\lambda\varphi} \tag{11}$$

となる．

更に $\lambda = 0$ とすると

$$1 + \Delta\varphi = 1 \tag{12}$$

となるので，$\varphi = \mathrm{const}$ が一意的解となる．

$\lambda = -1$ とすると最大値原理を用いるとやはり $\varphi = 0$ が一意的解となることがわかる．

しかし，$\lambda = 1$ とすると最大値原理は使えず，何も言えない．実際，方程式 (10) で $\lambda = 1$ とした場合，2 次元球面上の滑らかな関数 F のうち，どのような F に対して解を持つか，は難しい問題である．

前節で述べたように，実際障害があるので方程式 (9) は一般には解けない．解ける為の十分条件が Siu, Nadel, Tian 等によって知られているが，十分条件であって必要十分条件ではない．

Yau-Tian-Donaldson 予想は必要十分条件が K-安定性であるという主張である．以下，英語で K-安定性について書く．

4. DONALDSON-FUTAKI INVARIANT AND K-STABLITY

The obstructions by Matsushima and Futaki vanish when $\mathfrak{h}(M) = 0$. For this reason it was expected that a Kähler-Einstein metric would exist if $\mathfrak{h}(M) = 0$. But this expectation was disproved by Tian [29] by the following method. Tian introduced the notion of K-stability and showed that if a Fano manifold M admits a Kähler-Einstein metric then M is K-stable. He also showed a deformation of the Mukai-Umemura manifold is not K-stable and have no non-zero holomorphic vector field. Note that the Mukai-Umemura manifold itself has a Kähler-Einstein metric, and some deformations also have Kähler-Einstein metrics (see [11], and also [31]).

Simply stated, K-stability is a stability in the sense of geometric invariant theory (GIT) defined by the numerical criterion using the invariant f as the GIT weight. Here we use f to be the one generalized for singular varieties. Precisely, Tian [29] used the generalized Futaki invariant defined by Ding and Tian [7] for normal Fano varieties, and Donaldson [9] used the one generalized for general schemes which is defined as follows.

Let $L_0 \to M_0$ be an ample line bundle over a projective scheme M_0 with an equivariant $\mathbb{C}^*$-action. Put

$$d_k = \dim H^0(M_0, L_0^k)$$

and let w_k be the weight of the $\mathbb{C}^*$-action on $H^0(M_0, L_0^k)$. Then d_k and w_k are polynomials in k of degree n and $n+1$ respectively. We expand

$$\frac{w_k}{kd_k} = F_0 + F_1 k^{-1} + F_2 k^{-2} + \cdots \tag{13}$$

with respect to k^{-1}. Note that $\frac{w_k}{kd_k} - \frac{a_0}{b_0}$ is the Chow weight where a_0 and b_0 are the leading terms of d_k and w_k in k.

Proposition 4.1 ([9]). *If M_0 is smooth Fano manifold and $L = K_{M_0}^{-r}$ for some $r > 0$, then*

$$F_1 = -C\, f(X) \tag{14}$$

where C is a positive constant depending only on L and X is the infinitesimal generator of the $\mathbb{C}^*$-action.

Definition 4.2. *A test configuration of a Fano manifold M is a $\mathbb{C}^*$-equavariant flat family $\pi : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ of schemes embedded in $\mathbb{CP}^N \times \mathbb{C}$ for some large N such that*

- *$\mathcal{M}$ is invariant under a $\mathbb{C}^*$-action on $\mathbb{CP}^N \times \mathbb{C}$;*
- *$\pi^{-1}(1) = M$, and thus $\pi^{-1}(t)$ is isomorphic to M for any $t \neq 0$ because of the $\mathbb{C}^*$-equivariance;*
- *$\pi^{-1}(1) = M$ is embedded in $\mathbb{CP}^N \times \{1\}$ by K_M^{-r} for some r;*
- *the central fiber $\pi^{-1}(0)$ is a normal variety with log terminal singularities.*

In this definition $\mathbb{C}^*$ acts on $\mathbb{C}$ as the ordinary multiplication, and therefore the origin 0 is a fixed point. It follows that M_0 is invariant under the $\mathbb{C}^*$-action, and that we can consider the invariant F_1 above. In the terminology of Tian [29] a test configuration is called a special degeneration.

Definition 4.3. *For a test configuration $\mathcal{M}$ we put $DF(\mathcal{M})$ to be the invariant $-F_1$ of the central fiber $M_0 = \pi^{-1}(0)$. We say a Fano manifold M is K-stable if $DF(\mathcal{M}) \geq 0$ for any test configuration and the equality holds if and only if $\mathcal{M} = M \times \mathbb{C}$.*

$DF(\mathcal{M})$ is called the Donaldson-Futaki invariant. We could use the generalized Futaki invariant of Ding-Tian in the place of $DF(\mathcal{M})$ because we assume M_0 is normal. The Yau-Tian-Donaldson conjecture is stated as follows.

Yau-Tian-Donaldson conjecture ([35], [29], [9])
A Fano manifolds M admits a Kähler-Einstein metric if and only if M is K stable. (Note that there is a convention in which K-stability is referred to K-polystability.)

It was Tian [29] who first studied this conjecture systematically. The Fubini-Study metric restricted to M_t degenerates as $t \to 0$ and the limit is considered to be an infinity of the space of Kähler forms on M. The asymptotic behavior of the K-energy is given by $DF(\mathcal{M})$. The Yau-Tian-Donaldson conjecture says the properness of the K-energy (or Ding's functional) is equivalent to K-stability.

As mentioned above Tian used the generalized Futaki invariant of Ding-Tian assuming the central fiber is normal. But in general degeneration the central fiber can be non-normal. In [9] Donaldson re-formulated the Futaki invariant in the form of the Donaldson-Futaki invariant $DF(\mathcal{M})$, and defined the test configurations without assuming the central fiber being normal. However Li and Xu [18] proved, using the minimal model program with scaling, that the test configuration can be modified so that the central fiber is a normal variety with log terminal singularities and that the Donaldson-Futaki invariant does not increase. Thus we may define K-stability only using the test configurations with normal central fiber with log terminal singularities.

5. Kähler-Einstein metrics with cone angle along a divisor

Let M be compact Kähler manifold and D be a smooth divisor. Suppose D is written as the zero set $\{z^1 = 0\}$ for local coordinates $z^1, \cdots, z^m$. The local model of a Kähler metric with cone angle $2\pi\beta$ along D with $0 \le \beta \le 1$ is expressed as follows. We consider the region $B \subset \mathbb{C}$ of radius ϵ with the argument $0 \le \arg z \le 2\pi$ onto the region $C \subset \mathbb{C}$ of redius ϵ with the argument $0 \le \arg w \le 2\pi\beta$. We take a neighborhood U of the origin in $\mathbb{C}^{m-1}$. Let f be the map of $B \times U$ onto $C \times U$ given by

$$(w, z^2, \cdots, z^m) = f(z) = ((z^1)^\beta, z^2, \cdots, z^m).$$

The local model of the Kähler metric with cone angle $2\pi\beta$ is given by the pull-back by f of the flat metric on $C \times U$. Thus the Kähler form is expressed as

$$f^*(idw \wedge d\overline{w} + \sum_{j=1}^m idz^j \wedge d\overline{z}^j = \beta^2 |z^1|^{2(\beta-1)} idz^1 \wedge d\overline{z}^1 + \sum_{j=2}^m idz^j \wedge d\overline{z}^j.$$

Definition 5.1. *A Kähler form with cone angle $2\pi\beta$ along D with $0 \le \beta \le 1$ is by definition a Kähler form ω defined on $M\backslash D$ which is uniformly equivalent to the local model*

$$\omega_{\text{cone}} = |z^1|^{2(\beta-1)} idz^1 \wedge d\overline{z}^1 + \sum_{j=2}^m idz^j \wedge d\overline{z}^j$$

on a neighborhood V where D is expressed as $D \cap V = \{z^1 = 0\}$, that is, there exist positive constants C_1 and C_2 such that

$$C_1 \omega_{\text{cone}} \le \omega \le C_2 \omega_{\text{cone}}.$$

Note that if the cone angle is 2π then the Kähler metric is smooth.

Definition 5.2. *For a Kähler form ω with a cone angle along a divisor D we define the Ricci current $\mathcal{R}ic(\omega)$ is defined by*

$$\mathcal{R}ic(\omega) = -i\partial\overline{\partial} \log \omega^m \tag{15}$$

where $\partial\overline{\partial}$ is taken as a distribution derivative.

Lemma 5.3. *Let* $\mathrm{Ric}(\omega)$ *denote the Ricci form of ω on $M - D$. Then we have*

$$\mathcal{R}ic(\omega) = \mathrm{Ric}(\omega) + 2\pi(1-\beta)[D]$$

as currents.

Proof. This follows from the Poincarè-Lelong equation $i/2\pi\,\partial\overline{\partial}\log|z^1|^2 = [D]$. $\square$

Next we assume that M is Fano and that the divisor D is smooth with $[D] = \lambda c_1(M)$ for some positive integer λ. Note that it is not clear if we can take $\lambda = 1$.

Definition 5.4. *A Kähler form ω with cone angle $2\pi\beta$ along a divisor D such that $[\omega] = 2\pi c_1(M)$ is said to be a Kähler-Einstein metric if and only if*

$$\mathcal{R}ic(\omega) = \mu\omega + 2\pi(1-\beta)[D]. \tag{16}$$

Remark 5.5. *We have $\mu = 1-(1-\beta)\lambda$.*

Proof. The right hand side of (16) represents $2\pi(\mu+(1-\beta)\lambda)c_1(M)$. Since the left side of (16) represents $c_1(M)$ we obtain $\mu = 1-(1-\beta)\lambda$. $\square$

Put

$$E = \{\beta \in (0,1] \mid (16) \text{ has a solution}\}.$$

We employ the continuity method with respect to the parameter β. Thus if we can show

(i) E is not empty.
(ii) E is open.
(iii) E is closed if M is K-stable.

we obtain the proof of the Yau-Tian-Donaldson conjecture since $\beta = 1$ gives the desired smooth Kähler-Einstein metric on M. The step (i) was obtained by Brendle [2], Jeffres-Mazzeo-Rubinstein [16] and Chen-Donaldson-Sun [6]. The step (ii) was shown by Donaldson [12] and Song-Wang [24]. The step (iii) was obtained by Chen-Donaldson-Sun [3], [4], [5], [6]. and Tian [30].

6. Proof of the closeness.

In this section we outline the proof of the closeness of the set E in the previous section. Let ω_0 be a smooth Kähler form with $[\omega_0] = 2\pi c_1(M)$. Put

$$\mathcal{H} = \{\varphi \in C^\infty(M) \mid \omega_0 + i\partial\overline{\partial}\varphi > 0 \text{ in } M\}.$$

For $\beta \in (0,1]$ we also put

$$\widehat{\mathcal{H}}_\beta = \{\varphi \in C^\infty(M\backslash D) \mid \omega_0 + i\partial\overline{\partial}\varphi \text{ is a Kähler form of cone angle } 2\pi\beta \text{ along } D\}.$$

An element of $\widehat{\mathcal{H}}_\beta$ is typically of the form $\varphi + \epsilon|s|_h^{2\beta}$ where $\varphi \in \mathcal{H}$, $s \in H^0(M,[D])$ with $(s) = D$, h is a smooth metric of D and $\epsilon > 0$.

Lemma 6.1. *For $\varphi_\beta \in \widehat{\mathcal{H}}_\beta$ we put $\omega_\beta = \omega_0 + i\partial\overline{\partial}\varphi_\beta$. If we define h_β by*

$$\mathcal{R}ic(\omega_\beta) = \mu\omega_\beta + (1-\beta)2\pi[D] + i\partial\overline{\partial}h_\beta$$

then we have

$$h_\beta = h_{\omega_0} - (1-\beta)\log||s||^2_{h_0} - \log\frac{\omega_\beta^m}{\omega^m} - \mu\varphi_\beta$$

where the first Chern form $c_1(h_0)$ is equal to ω_0 and $\mathrm{Ric}(\omega_0) - \omega_0 = i\partial\overline{\partial}h_{\omega_0}$.

Corollary 6.2. *The solution $\varphi_\beta \in \widehat{\mathcal{H}}_\beta$ of (16) satisfies the equation*

$$\omega^m_{\varphi_\beta} = e^{-\mu\varphi_\beta + h_{\omega_0}}\frac{\omega_0^m}{||s||^{2(1-\beta)}_{h_0}}. \tag{17}$$

We consider the log test configuration $\pi : (\mathcal{M}, \mathcal{D}) \to \mathbb{C}$ of the pair (M, D), and wish to define the log Donaldson-Futaki invariant $DF(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ with cone angle $2\pi\beta$. For this purpose we first define an obstruction to the existence of a Kähler-Eisntein metric of cone angle $2\pi\beta$ along D, which is given in the following lemma.

Lemma 6.3 ([17]). *Let X be a holomorphic vector field on (M_0, D_0) such that its flow leaves D_0 invariant. Choose a smooth function u_X on $M_0 \backslash D_0$ so that $i(X)\omega_\beta = -\overline{\partial} u_X$. We define $f_\beta(X)$ by*

$$\begin{aligned} f_\beta(X) &= \int_{M_0} u_X(\mathcal{R}ic(\omega_\beta) - \omega_\beta) \wedge \omega_\beta^{m-1} - (1-\beta)\left(\lambda \int_{M_0} u_X \omega_\beta^m - 2\pi \int_{D_0} u_x \omega_\beta^{m-1}\right) \\ &= \int_{M_0} u_X(\mathcal{R}ic(\omega_\beta) - \mu\omega_\beta + (1-\beta)2\pi[D]) \wedge \omega_\beta^{m-1}. \end{aligned}$$

Then

(1) *f_β is independent of $\varphi_\beta \in \widehat{\mathcal{H}}_\beta$.*
(2) *If there is a weak Kähler-Einstein metric of cone angle β in the sense of* [?] *(meaning the metric ω_β satisfies the equation (??) on the regular part) then $f_\beta = 0$.*

We define the log Donaldson-Futaki invariant $DF_\beta(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ of the test configuration $\mathcal{M}, \mathcal{D}$ to be the log Futaki invariant $f_\beta(X)$ of the central fiber (M_0, D_0). If we denote by $F_j(M_0)$ and $F_j(D_0)$ the expansion of (13) for the central fiber M_0 and D_0, then it is easy to show

$$DF_\beta(\mathcal{M}, \mathcal{D}) = -F_1(M_0) - (1-\beta)\frac{m\lambda}{2}(F_0(M_0) - F_0(D_0)) \tag{18}$$

up to a multiple positive constant.

Now the proof of the closeness of E is divided into the following three steps.
Step 1. ([27]) For any test configuration of pair $(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ the log $DF_\beta(\mathcal{M}, \mathcal{D}) \geq 0$ for the cone angle $\beta = 0$. In other words, any test configuration of pair $(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ is log K-semistable for cone angle $\beta = 0$.
Step 2. This step is the hardest part, and most of the efforts in [?], [?], [?] and [30] are devoted to this part. Take a sequence $\beta_i \in E$ converging to β_∞, and suppose that $\beta_\infty \notin E$. Then one can show the followng.

(a) The Gromov-Hausdorff limit $(M_\infty, d_\infty, D_\infty)$ of the sequence (M, ω_{β_i}, D) is in fact a limit of algebraic varieties, and $M_\infty \neq M$.
(b) There is a test configuration $(\mathcal{M}, \mathcal{D}) \to \mathbb{C}$ with the central fiber $(M_0, D_0) = (M_\infty, D_\infty)$.
(c) The Gromov-Hausdorff limit (M_∞, D_∞), which is the central fiber $(M_0, \mathcal{D}_0)$ of $(\mathcal{M}, \mathcal{D})$, has a weak conical Kähler-Einstein metric with cone angle $\beta = \beta_\infty$, and thus

$$DF_{\beta_\infty}(\mathcal{M}, \mathcal{D}) = f_{\beta_\infty}(M_0, \mathcal{D}_0) = 0.$$

Step 3. Recall that the log DF $DF_\beta(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ is an affine function in β. Since $DF_\beta(\mathcal{M}, \mathcal{D}) \geq 0$ for $\beta = 0$ by Step 1 and $DF_\beta(\mathcal{M}, \mathcal{D}) = 0$ for $\beta = \beta_\infty$ by Step 2 we obtain $DF_\beta(\mathcal{M}, \mathcal{D}) \leq 0$ for $\beta = 1$. But since $DF_\beta(\mathcal{M}, \mathcal{D}) = DF(\mathcal{M})$ for $\beta = 1$ and we assume K-stablity we must have $DF_\beta(\mathcal{M}, \mathcal{D}) \geq 0$ for $\beta = 1$. Thus we obtain $DF_\beta(\mathcal{M}, \mathcal{D}) = 0$ for $\beta = 1$. But by the assumption that M is K-stable $DF_\beta(\mathcal{M}, \mathcal{D}) = 0$ for $\beta = 1$ occurs only if $\mathcal{M} = M \times \mathbb{C}$. But $M_\infty \neq M$ and this does not occur. This is a contradiction and completes the closed ness of E.

References

[1] T. Aubin : Equations du type de Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes, C. R. Acad. Sci. Paris, **283**, 119-121 (1976)

[2] S. Brendle : Ricci flat Kähler metrics with edge singularities, arXiv:1103.5454.

[3] X.-X. Chen, S.K. Donaldson and S. Sun: Kähler-einstein metrics and stability, arXiv: 1210.7494

[4] X.-X. Chen, S.K. Donaldson and S. Sun: Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds, I: approximation of metrics with cone singularities. arXiv:1211.4566.

[5] X.-X. Chen, S.K. Donaldson and S. Sun: Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds, II: limits with cone angle less than 2π. arXiv:1212.4714.

[6] X.-X. Chen, S.K. Donaldson and S. Sun: Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds, III: limits as cone angle approaches 2π and completion of the main proof. arXiv:1302.0282.

[7] W. Ding and G.Tian : Käler-Einstein metrics and the generalized Futaki invariant, Invent. Math., **110**, 315-335 (1992).

[8] S.K. Donaldson : Remarks on gauge theory, complex geometry and four-manifold topology, in 'Fields Medallists Lectures' (Atiyah, Iagolnitzer eds.), World Scientific, 1997, 384-403.

[9] S.K. Donaldson : Scalar curvature and stability of toric varieties, J. Differential Geometry, 62(2002), 289-349.

[10] S.K. Donaldson : Lower bounds on the Calabi functional, J. Differential Geometry, 70(2005), 453-472.

[11] S.K. Donaldson : Kähler geometry on toric manifolds, and some other manifolds with large symmetry. Handbook of geometric analysis. No. 1, 29–75, Adv. Lect. Math. (ALM), 7, Int. Press, Somerville, MA, 2008.

[12] S.K. Donaldson : Kähler metrics with cone singularities along a divisor. Essays in mathematics and its applications, 49–79, Springer, Heidelberg, 2012.

[13] S.K. Donaldson and S. Sun: Gromov-Hausdorff limits of Kahler manifolds and algebraic geometry. arXiv:1206.2609.

[14] A. Futaki : An obstruction to the existence of Einstein Kähler metrics, Invent. Math. **73**, 437-443 (1983).

[15] A. Futaki : Kähler-Einstein metrics and integral invariants, Lecture Notes in Math., vol.1314, Springer-Verlag, Berline-Heidelberg-New York,(1988)

[16] T. Jeffres, R. Mazzeo and Y. Rubinstein : Kähler-Einstein metrics with edge singularities. arXiv:1105.5216.

[17] C. Li : Remarks on logarithmic K-stability, preprint. arXiv:1104.0428v1.

[18] C. Li and C.Y. Xu : Special test configurations and K-stability of Fano varieties, preprint. arXiv:1111.5398.

[19] Y. Matsushima : Sur la structure du groupe d'homéomorphismes d'une certaine variété kaehlérienne, Nagoya Math. J., **11**, 145-150 (1957)

[20] S. Mukai : Fano 3-folds. In "Complex projective geometry", 255-263 London math. Soc. Lecture Notes 179 Cambridge UP (1992).

[21] S. Mukai and H. Umemura : Minimal rational threefolds. In: Algebraic Geometry (Tokyo/Kyoto 1982) 490-518 Lecture Notes in Math. 1016 Springer 1983.

[22] S.T. Paul and G. Tian : CM Stability and the Generalized Futaki Invariant I., preprint. math.AG/0605278, 2006.

[23] S.T. Paul and G. Tian : CM stability and the generalized Futaki invariant II. Astérisque No. **328** (2009), 339–354.

[24] J. Song and X. Wang : The greatest Ricci lower bound, conical Einstein metrics and the Chern number inequality. arXiv:1207.483.

[25] J. Stoppa : K-stability of constant scalar curvature Kähler manifolds, Adv. Math., 221 (2009), 1397–1408. arXiv:0803.4095

[26] J. Stoppa : A note on the definition of K-stability, preprint. arXiv : 1111.5826.

[27] S. Sun : Note on K-stability of pairs. Math. Ann. 355 (2013), no. 1, 259–272.

[28] G. Székelyhidi: The partial C^0-estimate along the continuity method. arXiv:1310.8471.

[29] G. Tian : Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature, Invent. Math., **130**, 1-37 (1997).

[30] G. Tian : K-stability and Kähler-Einstein metrics, arXiv: 1211.4669.

[31] Y. Wang : On the Kähler-Ricci flows near the Mukai-Umemura 3-fold. arXiv:1312.0043

[32] Y. Wang and S. Sun : On the Kähler-Ricci flow near a Kähler-Einstein metric. To appear in Journal fur die reine und angewandte Mathematik.
[33] S.-T. Yau : On Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **74**, 1798-1799 (1977).
[34] S.-T.Yau : On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation I, Comm. Pure Appl. Math. 31(1978), 339-441.
[35] S.-T. Yau, Open problems in Geometry, Proc. Symp. Pure Math. 54 (1993) 1-28.

東京都目黒区駒場 3-8-1, 東京大学大学院数理科学研究科, 〒 153-8914
E-mail address: `afutaki@ms.u-tokyo.ac.jp`