超幾何函数の楕円化とその周辺

野海 正俊 (神戸大学・大学院理学研究科)

本稿では, 超幾何函数 (級数) の楕円化を考察することにより, 超幾何函数の変換公式や和公式を系統的に捉えることができることを概観する. また, 楕円超幾何級数の多重化や楕円差分パンルヴェ方程式との関連など, 最近の話題についても紹介する. 超幾何級数の基本的な用語等については, 概ね Gasper-Rahman [1] に従った. 第 4 節と第 5 節の内容の詳細については, それぞれ [2], [5] を参照して欲しい. 議論を簡明にするために有限超幾何級数を議論の中心に据えて, 敢えて超幾何積分には触れなかった. 楕円超幾何積分の話題については, Spiridonov [12] 等を見て頂きたい.

目次

1　超幾何級数の和公式と変換公式

1.1　超幾何級数

α を初項とする階乗冪を

$$(\alpha)_k = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1) \qquad (k=0,1,2,\dots) \tag{1.1}$$

で定義する. ($(1)_k = k!$. また, $n \in \mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$, $k > n$ のときは $(-n)_k = 0$ に注意.) この階乗冪を用いて定義される x の形式冪級数

$$ {}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_r\\ \beta_1,\dots,\beta_r\end{matrix};x\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha_0)_k(\alpha_1)_k\cdots(\alpha_r)_k}{(1)_k(\beta_1)_k\cdots(\beta_r)_k}x^k \tag{1.2}$$

を ${}_{r+1}F_r$ **型超幾何級数** という. $r=1$ の場合の ${}_2F_1$ は **Gauss の超幾何級数**という. この級数は $|x|<1$ で絶対収束して正則函数を定義するが, $x=0,1$ のみに特異点をもつ常微分方程式

$$\big[\vartheta_x(\vartheta_x+\beta_1-1)\cdots(\vartheta_x+\beta_r-1) - x(\vartheta_x+\alpha_0)\cdots(\vartheta_x+\alpha_r)\big]u(x) = 0 \qquad (\vartheta_x = x\partial_x) \tag{1.3}$$

を満たすことから, $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ 上の多価正則函数に解析接続される.

$$\text{(A)}\ \ \exists i \in \{0,1,\dots,r\}:\ \alpha_i \in -\mathbb{N}; \qquad \text{(B)}\ \ \mathrm{Re}(\beta_1+\cdots+\beta_r-\alpha_0-\alpha_1-\cdots-\alpha_r) > 0 \tag{1.4}$$

のいずれかの条件が満たされれば, $x=1$ とおいた級数も意味をもつ:

$$ {}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_r\\ \beta_1,\dots,\beta_r\end{matrix}\right] = {}_{r+1}F_r\left[\begin{matrix}\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_r\\ \beta_1,\dots,\beta_r\end{matrix};1\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha_0)_k(\alpha_1)_k\cdots(\alpha_r)_k}{(1)_k(\beta_1)_k\cdots(\beta_r)_k}. \tag{1.5}$$

このような級数を ${}_{r+1}F_r(1)$ **型超幾何級数** と呼ぶこともある.

1.2　超幾何級数に注目する理由

理由はいろいろあるが, ここでは**和公式**と**変換公式**に焦点を当てる. 和公式の代表的な例として, **Gauss の和公式** (1813) を, 変換公式の例として **Euler の変換公式** (1748) を, ひとまず掲げておく.

$$\text{(Gauss)} \qquad {}_2F_1\left[\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{matrix};1\right] = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} \qquad (\mathrm{Re}(\gamma-\alpha-\beta)>0) \tag{1.6}$$

$$\text{(Euler)} \qquad {}_2F_1\left[\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{matrix};x\right] = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\gamma-\alpha,\gamma-\beta\\ \gamma\end{matrix};x\right] \qquad (|x|<1) \tag{1.7}$$

(1) **二項展開:** 二項展開の公式 $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$ 即ち $(1-x)^{-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k}{(1)_k}x^k$ は

$$ {}_1F_0\left[\begin{matrix}\alpha\\ \cdot\end{matrix};x\right] = (1-x)^{-\alpha} \qquad (|x|<1) \tag{1.8}$$

を意味する.

(2) **Chu-Vandermonde の公式**: 冪函数の指数法則 $(1+x)^\alpha(1+x)^\beta = (1+x)^{\alpha+\beta}$ の両辺を展開して, x^n の係数を比較すると次の Chu-Vandermonde の公式を得る.

$$\sum_{k+l=n} \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{l} = \binom{\alpha+\beta}{n}. \tag{1.9}$$

階乗冪の記号で書直すと, これは上記の Gauss の和公式の有限級数版に他ならない:

$$\frac{(\beta)_n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(\alpha)_k(-n)_k}{k!(1-n-\beta)_k} = \frac{(\alpha+\beta)_n}{n!} \quad 即ち \quad {}_2F_1\left[\begin{matrix}\alpha, -n\\ 1-n-\beta\end{matrix}; 1\right] = \frac{(\alpha+\beta)_n}{(\beta)_n}. \tag{1.10}$$

Saalschütz の和公式と Dixon の和公式

以下では, 簡単のため, 分子側のパラメータの何れかが $-n$ $(n \in \mathbb{N})$ であって超幾何級数が有限和となる場合を考える. ${}_3F_2$ のレベルの和公式の典型例として, 次の **Pfaff-Saalschütz の和公式** (1797, 1890) と **Dixon の和公式** (1903) がある:

$$\text{(Saalschütz)} \qquad {}_3F_2\left[\begin{matrix}\alpha, & \beta, & -n\\ \gamma, & 1-n+\alpha+\beta-\gamma\end{matrix}; 1\right] = \frac{(\gamma-\alpha)_n(\gamma-\beta)_n}{(\gamma)_n(\gamma-\alpha-\beta)_n}. \tag{1.11}$$

$$\text{(Dixon)} \qquad {}_3F_2\left[\begin{matrix}\alpha, & \beta, & -2n\\ 1-2n-\alpha, & 1-2n-\beta\end{matrix}; 1\right] = \frac{(\alpha)_n(\beta)_n(\alpha+\beta)_{2n}(2n)!}{(\alpha)_{2n}(\beta)_{2n}(\alpha+\beta)_n n!}. \tag{1.12}$$

一般の ${}_3F_2(1)$ 型の有限超幾何級数

$${}_3F_2\left[\begin{matrix}\alpha_0, \ \alpha_1, \ \alpha_2\\ \beta_1, \ \beta_2\end{matrix}; 1\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha_0)_k(\alpha_1)_k(\alpha_2)_k}{(1)_k(\beta_1)_k(\beta_2)_k} \tag{1.13}$$

を考えると, Saalschütz の和公式は, **平衡条件**

$$\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+1 = \beta_1+\beta_2, \qquad \alpha_0 = -n \tag{1.14}$$

を満たす (balanced) ${}_3F_2(1)$ 型超幾何級数が和公式をもつことを意味し, Dixon の和公式は, **釣合条件**

$$\alpha_0+1 = \alpha_1+\beta_1 = \alpha_2+\beta_2, \qquad \alpha_0 = -2n \tag{1.15}$$

を満たす (well-poised) ${}_3F_2(1)$ 型超幾何級数が, 和公式をもつことを意味する. 和公式や変換公式を考える上では, この種の平衡条件や対合条件が重要な役割を果たす.

Chu-Vandermonde の公式を冪函数の指数法則から導出したように, 前掲の Euler の変換公式の両辺を x の冪級数として展開し x^n の係数を取出すと, その関係式は Saalschütz の和公式を表す. Saalschütz の和公式には次のような意味もある. a をパラメータとして x の多項式 (偶数次で偶関数) の系列

$$(a+x)_k(a-x)_k = \prod_{i=0}^{k-1}(a+x+i)(a-x+i) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.16}$$

を考える．パラメータ a を b に取替えた函数 $(b+x)_n(b-x)_n$ を考えると，これを $(a+x)_k(a-x)_k$ $(k=0,1,\ldots,n)$ で展開することができる．その具体的な表示は

$$(b+x)_n(b-x)_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(b+a+k)_{n-k}(b-a)_{n-k}(a+x)_k(a-x)_k. \tag{1.17}$$

これを超幾何級数の記号で書直すと，丁度 Saalschütz の公式となる．

Dixon の和公式は，次の印象的な公式を含んでいる：a,b,c を非負整数として，a が最小であるとすると

$$\sum_{k=-a}^{a}(-1)^k\binom{a+b}{a+k}\binom{b+c}{b+k}\binom{c+a}{c+k} = \frac{(a+b+c)!}{a!\,b!\,c!}. \tag{1.18}$$

特に $a=b=c$ の場合には

$$\sum_{k=-a}^{a}(-1)^k\binom{2a}{a+k}^3 = \frac{(3a)!}{(a!)^3}. \tag{1.19}$$

1.3 Dougall の和公式

この種の和公式の証明のやり方はいろいろあるが，一つの考え方は，基準となる函数系を用意して，与えられた函数をそれらで展開する方法である．まず「原型」を示す．

今，基準函数の系列 $f_0(x), f_1(x), \ldots$ が与えられたとし，次を仮定する：

(A) 「次数」を降下させる作用素 $\mathcal{D}$ があって，$\mathcal{D}f_k(x) = f_{k-1}(x)$ $(k=0,1,2,\ldots)$.
(但し，$k<0$ に対しては $f_k(x)=0$ と約束する.)
(B) 点 $x=a$ における代入が意味をもち，$f_0(a)=1$, $f_k(a)=0$ $(k=1,2,\ldots,)$.

このような状況で，函数 $\varphi(x)$ が

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k f_k(x) \tag{1.20}$$

と展開できると仮定する．このとき，$\mathcal{D}$ を l 回施すと

$$\mathcal{D}^l\varphi(x) = \sum_{k=l}^{n} c_k f_{k-l}(x) = \sum_{k=0}^{n-l} c_{l+k} f_k(x). \tag{1.21}$$

そこで，$x=a$ とおくと $\mathcal{D}^l\varphi(x)\big|_{x=a} = c_l$ となり，展開係数 c_l が $\varphi(x)$ から決定される．即ち

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k f_k(x); \qquad c_k = \mathcal{D}^k\varphi(x)\big|_{x=a} \quad (k=0,1,\ldots,n). \tag{1.22}$$

例えば，

(1) $f_k(x) = \dfrac{x^k}{k!}$, $\quad \mathcal{D} = \partial_x \quad \Longrightarrow \quad$ Taylor の展開公式 (典型例：二項定理)

(2) $f_k(x) = \dbinom{x}{k} = \dfrac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$

$\mathcal{D} = T_x - 1$ (T_x は変数 x を 1 だけシフトする作用素: $T_x f(x) = f(x+1)$)
$\Longrightarrow$ Vandermonde の展開公式 (典型例: Chu-Vandermonde の公式)

(3) パラメータ a を含む基準函数の系列として

$$f_k(x;a) = \frac{1}{k!}(a+x)_k(a-x)_k = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(a+x+i)(a-x-i) \quad (k=0,1,2,\dots) \tag{1.23}$$

をとると, 次数を降下させる作用素として,

$$\mathcal{D}f_k(x;a) = f_{k-1}(x;a+\tfrac{1}{2}); \qquad \mathcal{D} = \frac{-1}{2x}(T_x^{\frac{1}{2}} - T_x^{-\frac{1}{2}}) \tag{1.24}$$

がとれる. (a を $-\frac{1}{2}$ だけずらす操作まで $\mathcal{D}$ に含めれば「原型」の通りになるが, 今はこの形で考える.) $\varphi(x)$ が $2n$ 次多項式で偶函数であれば,

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k f_k(x;a); \qquad c_k = \mathcal{D}^k\varphi(x)\Big|_{x=a+\frac{k}{2}} \quad (k=0,1,2\dots). \tag{1.25}$$

パラメータ a を b に取替えて $\varphi(x) = f_n(x;b)$ を考えると $\mathcal{D}^k f_n(x;b) = f_{n-k}(x;b+\frac{k}{2})$ から,

$$f_n(x;b) = \sum_{k=0}^{n} f_{n-k}(a+\tfrac{k}{2};b+\tfrac{k}{2})f_k(x;a). \tag{1.26}$$

これは超幾何級数で書くことができて

$$\begin{aligned}(b+x)_n(b-x)_n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(b+a+k)_{n-k}(b-a)_{n-k}(a+x)_k(a-x)_k \\ &= (b+a)_n(b-a)_n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(-n)_k}{k!}\frac{(a+x)_k(a-x)_k}{(b+a)_k(b-a+n-k)_k} \\ &= (b+a)_n(b-a)_n\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(a+x)_k(a-x)_k}{k!(b+a)_k(1-n+a-b)_k}\end{aligned} \tag{1.27}$$

従って

$${}_3F_2\left[\begin{matrix}a+x, & a-x, & -n \\ a+b, 1-n+a-b\end{matrix};1\right] = \frac{(b+x)_n(b-x)_n}{(b+a)_n(b-a)_n} \tag{1.28}$$

を得る. これが Saalschütz の和公式である.

この考え方をもう一歩進めると, ${}_7F_6(1)$ 型の有限超幾何級数の和公式である **Dougall の和公式** (1907) に到達する. Dougall の和公式は, 有限超幾何級数の和公式の中では最上位に位置する大変重要な公式で, 様々の和公式がこの公式の退化極限として得られる.
パラメータ a, b を含む基準函数の系列

$$f_k(x;a,b) = \frac{(a+x)_k(a-x)_k}{(b+x)_k(b-x)_k} \quad (k=0,1,2,\dots) \tag{1.29}$$

を考える．これに対して対称差分を計算する:

$$
\begin{aligned}
&(T_x^{\frac{1}{2}}-T_x^{-\frac{1}{2}})f_k(x;a,b)\\
&=\frac{(a+x+\frac{1}{2})_k(a-x-\frac{1}{2})_k}{(b+x+\frac{1}{2})_k(b-x-\frac{1}{2})_k}-\frac{(a+x-\frac{1}{2})_k(a-x+\frac{1}{2})_k}{(b+x-\frac{1}{2})_k(b-x+\frac{1}{2})_k}\\
&=\frac{(a+x+\frac{1}{2})_{k-1}(a-x+\frac{1}{2})_{k-1}}{(b+x+\frac{1}{2})_{k-1}(b-x+\frac{1}{2})_{k-1}}\left(\frac{(a+x+k-\frac{1}{2})(a-x-\frac{1}{2})}{(b+x+k-\frac{1}{2})(b-x-\frac{1}{2})}-\frac{(a+x-\frac{1}{2})(a-x+k-\frac{1}{2})}{(b+x-\frac{1}{2})(b-x+k-\frac{1}{2})}\right)\\
&=\frac{(a+x+\frac{1}{2})_{k-1}(a-x+\frac{1}{2})_{k-1}}{(b+x-\frac{1}{2})_{k+1}(b-x-\frac{1}{2})_{k+1}}2kx(a+b+k-1)(a-b) \qquad (1.30)
\end{aligned}
$$

(ここであまり当たり前でない因子化が起きることがポイント.) そこで,

$$
\mathcal{D}_b=\frac{(b+x-\frac{1}{2})_2(b-x-\frac{1}{2})_2}{2x}(T_x^{\frac{1}{2}}-T_x^{-\frac{1}{2}}) \qquad (1.31)
$$

とおくと

$$
\mathcal{D}_b f_k(x;a,b)=f_{k-1}(x;a+\tfrac{1}{2},b+\tfrac{3}{2})k(a+b+k-1)(a-b) \qquad (1.32)
$$

を得る．パラメータ b を $\frac{3}{2}$ ずつシフトしながらこの形の作用素を作用させることにして

$$
\mathcal{D}_b^{(l)}=\mathcal{D}_{b+3(l-1)/2}\cdots\mathcal{D}_{b+3/2}\mathcal{D}_b \qquad (1.33)
$$

を考えると

$$
\mathcal{D}_b^{(l)}f_k(x;a,b)=f_{k-l}(x;a+\tfrac{l}{2},b+\tfrac{3l}{2})(-k)_l(a+b+k-1)_l(b-a)_l. \qquad (1.34)
$$

今, 函数 $\varphi(x)$ が

$$
\varphi(x)=\sum_{k=0}^{n}c_kf_k(x;a,b);\qquad f_k(x;a,b)=\frac{(a+x)_k(a-x)_k}{(b+x)_k(b-x)_k}\quad(k=0,1,\ldots) \qquad (1.35)
$$

の形の展開を持つと仮定する．この条件は, $p(x)$ を高々 $2n$ 次の多項式で偶函数として, $\varphi(x)$ が $\varphi(x)=p(x)/(b+x)_n(b-x)_n$ と表されることと同値である．この両辺に $\mathcal{D}_b^{(l)}$ を施すと

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}_b^{(l)}\varphi(x)&=\sum_{k=l}^{n}c_kf_{k-l}(x;a+\tfrac{l}{2},b+\tfrac{3l}{2})(-k)_l(a+b+k-1)_l(b-a)_l\\
&=\sum_{k=0}^{n-l}c_{l+k}f_k(x;a+\tfrac{l}{2},b+\tfrac{3l}{2})(-k-l)_l(a+b+k+l-1)_l(b-a)_l \qquad (1.36)
\end{aligned}
$$

従って

$$
c_l=\frac{1}{(-l)_l(a+b+l-1)_l(b-a)_l}\mathcal{D}_b^{(l)}\varphi(x)\Big|_{x=a+\frac{l}{2}}. \qquad (1.37)
$$

ここで $\varphi(x)$ として, パラメータ a を c に取替えた

$$
\varphi(x)=f_n(x;c,b)=\frac{(c+x)_n(c-x)_n}{(b+x)_n(b-x)_n} \qquad (1.38)
$$

を考えよう．上の公式を使ってこの $\varphi(x)$ の展開を計算すると

$$f_n(x;c.b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(b+c+n-1)_k(b-c)_k}{(1)_k(-a-b)_k(b-a)_k}\ f_{n-k}(a+\tfrac{k}{2};c+\tfrac{k}{2},b+\tfrac{3k}{2})f_k(x;a,b). \tag{1.39}$$

これを整理すると

$$\begin{aligned}&\frac{(c+x)_n(c-x)_n}{(b+x)_n(b-x)_n}\frac{(b+a)_n(b-a)_n}{(c+a)_n(c-a)_n}\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{a+b+2k-1}{a+b-1}\frac{(a+b-1)_k(-n)_k(b-c)_k(b+c+n-1)_k}{(1)_k(a+b+n)_k(a+c)_k(a-c-n+1)_k}\frac{(a+x)_k(a-x)_k}{(b+x)_k(b-x)_k}\end{aligned} \tag{1.40}$$

なる展開公式を得る．(右辺の第 k 項に $(a+b+2k-1)/(a+b-1)$ という「余分な」因子があることに注目してほしい.) これを超幾何級数で書き表すと

$$\begin{aligned}&{}_7F_6\left[\begin{matrix}a+b-1,\ \frac{1}{2}(a+b+1),-n,\ b-c,\ b+c+n-1,\ a+x,\ a-x\\ \frac{1}{2}(a+b-1),\ a+b+n,\ a+c,\ a-c-n+1,\ b+x,\ b-x\end{matrix};1\right]\\&=\frac{(c+x)_n(c-x)_n}{(b+x)_n(b-x)_n}\frac{(b+a)_n(b-a)_n}{(c+a)_n(c-a)_n}\end{aligned} \tag{1.41}$$

という和公式が得られる．この ${}_7F_6(1)$ 型有限超幾何級数の和公式を **Dougall の和公式** (1907) という．

ここで, $x\to\infty$ なる極限をとると次の ${}_5F_4(1)$ 型の和公式を得る．

$${}_5F_4\left[\begin{matrix}a+b-1,\ \frac{1}{2}(a+b+1),-n,\ b-c,\ b+c+n-1\\ \frac{1}{2}(a+b-1),\ a+b+n,\ a+c,\ a-c-n+1\end{matrix};1\right]=\frac{(b+a)_n(b-a)_n}{(c+a)_n(c-a)_n}. \tag{1.42}$$

また $b\to\infty$ の極限をとると ${}_3F_2(1)$ の等式

$${}_3F_2\left[\begin{matrix}-n,,\ a+x,\ a-x\\ a+c,\ a-c-n+1\end{matrix};1\right]=\frac{(c+x)_n(c-x)_n}{(c+a)_n(c-a)_n} \tag{1.43}$$

となるが, これは Saalschütz の和公式に他ならない．

Dougall の和公式は, ${}_7F_6(1)$ 型有限超幾何級数の和公式であって, 次のように言換えても良い:

$$\begin{array}{ll}\text{平衡条件 (balanced):} & \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5=2\alpha_0+1,\\ \text{釣合条件 (well-poised):} & \alpha_0+1=\alpha_1+\beta_1=\cdots=\alpha_5+\beta_5,\\ \text{終端条件 (terminating):} & a_5=-n\quad(n\in\mathbb{N})\end{array} \tag{1.44}$$

の下で,

$$\begin{aligned}&{}_7F_6\left[\begin{matrix}\alpha_0,\ \frac{1}{2}\alpha_0+1,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5\\ \frac{1}{2}\alpha_0,\ \ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4,\ \beta_5\end{matrix};1\right]\\&=\frac{(1+\alpha_0)_n(1+\alpha_0-\alpha_1-\alpha_2)_n(1+\alpha_0-\alpha_1-\alpha_3)_n(1+\alpha_0-\alpha_2-\alpha_3)_n}{(1+\alpha_0-\alpha_1)_n(1+\alpha_0-\alpha_2)_n(1+\alpha_0-\alpha_3)_n(1+\alpha_0-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)_n}.\end{aligned} \tag{1.45}$$

(釣合条件に加えて, 上下に $\frac{1}{2}\alpha_0+1, \frac{1}{2}\alpha_0$ という組があって, この部分が因子 $(\alpha_0+2k)/\alpha_0$ を生じる. このような超幾何級数は "very" well-poised と形容される.) これを $\alpha_4=\frac{1}{2}\alpha_0$ と特殊化すると, 平衡条件 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-n=\frac{3}{2}\alpha_0+1$ の下で

$$
\begin{aligned}
&{}_5F_4\left[\begin{matrix}\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ -n\\ 1+\alpha_0-\alpha_1,\cdots,1+\alpha_0+n\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{(1+\alpha_0)_n(1+\frac{\alpha_0}{2}-\alpha_1)_n(1+\frac{\alpha_0}{2}-\alpha_2)_n(1+\alpha_0-\alpha_1-\alpha_2)_n}{(1+\frac{\alpha_0}{2})_n(1+\alpha_0-\alpha_1)_n(1+\alpha_0-\alpha_2)_n(1+\frac{\alpha_0}{2}-\alpha_1-\alpha_2)_n}.
\end{aligned}
\tag{1.46}
$$

$0\le 2m\le n$ の下で, 順に $\alpha_0\to -2m$, $n\to\infty$ なる極限をとると,

$$
{}_3F_2\left[\begin{matrix}-2m,\ \ \alpha_1,\ \ \alpha_2\\ 1-2m-\alpha_1,1-2m-\alpha_2\end{matrix};1\right]=\frac{(1+m)_m(\alpha_1+\alpha_2+m)_m}{(\alpha_1+m)_m(\alpha_2+m)_m}
\tag{1.47}
$$

を得る. これが Dixon の和公式である.

1.4 Bailey の変換公式

有限超幾何級数の変換公式の中では, 次の **Bailey の変換公式** (1929) が最も重要である.

$n\in\mathbb{N}$ とし, 複素パラメータ $\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_7$ が平衡条件 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_7=3\alpha_0+2$ と終端条件 $\alpha_7=-n$ を満たすとする. このとき, $\widetilde{\alpha}_0,\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2,\widetilde{\alpha}_3$ を

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\alpha}_0=1+2\alpha_0-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3\\
&\widetilde{\alpha}_1=1+\alpha_0-\alpha_2-\alpha_3,\quad \widetilde{\alpha}_2=1+\alpha_0-\alpha_1-\alpha_3,\quad \widetilde{\alpha}_3=1+\alpha_0-\alpha_1-\alpha_2.
\end{aligned}
\tag{1.48}
$$

で定義すると,

$$
\begin{aligned}
&{}_9F_8\left[\begin{matrix}\alpha_0,\frac{1}{2}\alpha_0+1,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7\\ \frac{1}{2}\alpha_0,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4,\ \beta_5,\ \beta_6,\ \beta_7\end{matrix};1\right]\\
&=\frac{(1+\alpha_0)_n(1+\alpha_0-\alpha_4-\alpha_5)_n(1+\alpha_0-\alpha_4-\alpha_6)_n(1+\alpha_0-\alpha_5-\alpha_6)_n}{(1+\alpha_0-\alpha_4)_n(1+\alpha_0-\alpha_5)_n(1+\alpha_0-\alpha_6)_n(1+\alpha_0-\alpha_4-\alpha_5-\alpha_6)_n}\\
&\quad\cdot{}_9F_8\left[\begin{matrix}\widetilde{\alpha}_0,\frac{1}{2}\widetilde{\alpha}_0+1,\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2,\widetilde{\alpha}_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7\\ \frac{1}{2}\widetilde{\alpha}_0,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \widetilde{\beta}_4,\ \widetilde{\beta}_5,\ \widetilde{\beta}_6,\ \widetilde{\beta}_7\end{matrix};1\right]
\end{aligned}
\tag{1.49}
$$

ここで, $\beta_i=1+\alpha_0-\alpha_i$ $(i=1,\dots,7)$, また, $\widetilde{\beta}_i=1+\widetilde{\alpha}_0-\alpha_i$ $(i=4,5,6,7)$ と記した.

Bailey の変換公式の特殊な場合として, $\alpha_1+\alpha_2=1+\alpha_0$ となる場合を考えると, $\widetilde{\alpha}_3=0$ なので右辺の ${}_9F_8(1)$ は定数 1 となる. 左辺では α_1 と β_2, α_2 と β_1 が打消し合って超幾何級数は, ${}_9F_8(1)$ 型から ${}_7F_6(1)$ 型に縮小する. この和公式は Dougall の和公式に他ならない.

Bailey の変換公式の退化として様々な変換公式が得られる. 証明については, Dougall の和公式を応用して Bailey の変換公式を証明することも出来るが, 後の第 4 節で, 全く別の方法で多重超幾何級数の場合を含めて一般の変換公式を導出するやり方を紹介する.

1.5 蛇足

今まで扱った有限超幾何級数は, α パラメータの一つが $-n$ $(n\in\mathbb{N})$ で「自然に」有限級数となる類のものであったが, α パラメータとは無関係に「無理矢理」打切った有限超幾何級数

$$ {}_{r+1}F_r^{(n)}\left[\begin{matrix}\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_r\\ \beta_1,\ldots,\beta_r\end{matrix};x\right]=\sum_{k=0}^{n}\frac{(\alpha_0)_k(\alpha_1)_k\cdots(\alpha_r)_k}{(1)_k(\beta_1)_k\cdots(\beta_r)_k}x^k \tag{1.50}$$

が意味を持つこともある.

Dougall の和公式 (1.45) の右辺には α_4 が露には出て来ないことに注意しよう. $\alpha_0+1=\alpha_4+\alpha_5$ 即ち $\beta_4=-n$ となるように特殊化すると $\alpha_4=\beta_5$, $\alpha_5=\beta_4=-n$ なので, パラメターが 2 組消滅して, 打切りの ${}_5F_4^{(n)}$ 型の和公式が得られる. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ を改めて a,b,c と書くと, **任意の** $n=0,1,2,\ldots$ に対して

$$ {}_5F_4^{(n)}\left[\begin{matrix}a+b+c,\ \frac{1}{2}(a+b+c)+1,\ a,\ b,\ c\\ \frac{1}{2}(a+b+c), a+b+1, a+c+1, b+c+1\end{matrix};1\right]=\frac{(a+b+c+1)_n(a+1)_n(b+1)_n(c+1)_n}{(1)_n(a+b+1)_n(a+c+1)_n(b+c+1)_n}. \tag{1.51}$$

つまり, 任意の $n=0,1,2,\ldots$ に対して

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}\frac{a+b+c+2k}{a+b+c}\frac{(a+b+c)_k(a)_k(b)_k(c)_k}{(1)_k(a+b+1)_k(a+c+1)_k(b+c+1)_k}\\ &\qquad=\frac{(a+b+c+1)_n(a+1)_n(b+1)_n(c+1)_n}{(1)_n(a+b+1)_n(a+c+1)_n(b+c+1)_n}\end{aligned} \tag{1.52}$$

という (金太郎飴のような!) 和公式が成立するという訳である.

2 q 超幾何級数

2.1 ${}_{r+1}\phi_r$ 型の q 超幾何級数

通常の ${}_{r+1}F_r$ 型の超幾何級数は「有理的」「加法的」な対象であるが, その「三角的」「乗法的」な対応物が q 超幾何級数である. q を 0 でない複素数で $|q|<1$ なるものとして固定し, a を初項とする **q 階乗冪** を

$$(a;q)_k=(1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{k-1})\qquad(k=0,1,2,\ldots) \tag{2.1}$$

で定義する. $a=q^\alpha$ と書いて $q\to 1$ の極限をとると, 形式上

$$\frac{1-aq^k}{1-q}=\frac{1-q^{\alpha+k}}{1-q}\to\alpha+k\quad(q\to 1) \tag{2.2}$$

なので,

$$\frac{(a;q)_k}{(1-q)^k}\quad\to\quad(\alpha)_k \tag{2.3}$$

で, 今までの階乗冪が復元される. また, q 無限積

$$(a;q)_\infty = \prod_{i=0}^{\infty}(1-aq^i) \tag{2.4}$$

を考えると

$$(a;q)_k = \frac{(a;q)_\infty}{(aq^k;q)_\infty} \qquad (k=0,1,2\ldots). \tag{2.5}$$

これは

$$(\alpha)_k = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)} \qquad (k=0,1,2,\ldots) \tag{2.6}$$

に対応する公式で, q の世界では $1/(a;q)_\infty$ がガンマ函数 $\Gamma(\alpha)$ の役割を演ずる. ${}_{r+1}F_r$ 型超幾何級数に対して, ${}_{r+1}\phi_r$ 型 q 超幾何級数を次のように定義する:

$${}_{r+1}\phi_r\left[\begin{matrix}a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_r\\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_r\end{matrix};q,x\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_0;q)_k(a_1;q)_k\cdots(a_r;q)_k}{(q;q)_k(b_1;q)_k\cdots(b_r;q)_k}x^k. \tag{2.7}$$

この無限級数は $|x|<1$ で絶対収束してそこで x の正則函数を定めるが, q 差分方程式

$$\big((1-T_{q,x})(1-bq^{-1}T_{q,x})\cdots(1-b_rq^{-1}T_{q,x}) - x(1-a_0T_{q,x})(1-a_1T_{q,x})\cdots(1-a_rT_{q,x})\big)u(x)=0 \tag{2.8}$$

を満たすことから, $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\backslash\{0\}$ 上の**一価有理型函数**に解析接続される. 上の式で $T_{q,x}$ は x を乗法的に q だけシフトする作用素である: $T_{q,x}f(x)=f(qx)$.

通常の超幾何級数と同様, q 超幾何級数の世界にも様々な和公式や変換公式がある. 最初に掲げるべきものはやはり **q 二項定理**であろう (Cauchy 1843, Heine 1847):

$${}_1\phi_0\left[\begin{matrix}a\\ .\end{matrix};q,x\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a;q)_k}{(q;q)_k}x^k = \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}. \tag{2.9}$$

この展開公式の特別な場合の

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(q;q)_k}x^k = \frac{1}{(x;q)_\infty}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kq^{\binom{k}{2}}}{(q;q)_k}x^k = (x;q)_\infty \tag{2.10}$$

等は既に Euler が知っていた公式である. Gauss の和公式の対応物にはいろいろな変種があるが, 素直なものは

$${}_2\phi_1\left[\begin{matrix}a,\ b\\ c\end{matrix};q,\frac{c}{ab}\right] = \frac{(c/a;q)_\infty(c/b;q)_\infty}{(c;q)_\infty(c/ab;q)_\infty}. \tag{2.11}$$

Euler 変換公式の q 版としては次の変換公式を掲げておく.

$${}_2\phi_1\left[\begin{matrix}a,\ b\\ c\end{matrix};q,x\right] = \frac{(abx/c;q)_\infty}{(x;q)_\infty}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}c/a,\ c/b\\ c\end{matrix};q,\frac{abx}{c}\right]. \tag{2.12}$$

2.2 Jackson の和公式とその仲間達

次は q Saalschütz 和公式:

$$
{}_3\phi_2\left[\begin{matrix} a,\ b,\ q^{-n} \\ c,\ q^{1-n}ab/c \end{matrix};q,q\right] = \frac{(c/a;q)_n(c/b;q)_n}{(c;q)_n(c/ab;q)_n}. \tag{2.13}
$$

${}_{r+1}\phi_r$ 型の q 超幾何級数は, 分子側のパラメータのいずれかが q^{-n} $(n \in \mathbb{N})$ であれば有限級数となる. この公式で $n \to \infty$ の極限をとれば, Gauss の和公式の q 版になる.

超幾何級数の場合に説明したような, 適当な基準函数系で展開して和公式を導く方法は q 超幾何級数の場合でも通用する. Dougall の和公式の q 版を作るには, 有理函数の系列

$$
\frac{(ax;q)_k(a/x;q)_k}{(bx;q)_k(b/x;q)_k} \qquad (k=0,1,2,\ldots) \tag{2.14}
$$

に対して, 対称差分 $T_{q,x}^{\frac{1}{2}} - T_{q,x}^{-\frac{1}{2}}$ を用いて下降演算子を構成し,

$$
\frac{(cx;q)_n(c/x;q)_n}{(bx;q)_n(b/x;q)_n} = \sum_{k=0}^{n} c_k \frac{(ax;q)_k(a/x;q)_k}{(bx;q)_k(b/x;q)_k} \tag{2.15}
$$

の形の展開を考えればよい. 詳細は略すが, 結果は

$$
\begin{aligned}
&\frac{(cx;q)_n(c/x;q)_n}{(bx;q)_n(b/x;q)_n}\frac{(ba;q)_n(b/a;q)_n}{(ca;q)_n(c/a;q)_n} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1-abq^{2k-1}}{1-abq^{-1}} \frac{(abq^{-1};q)_k(q^{-n};q)_k(b/c;q)_k(q^{n-1}bc;q)_k}{(q;q)_k(abq^n;q)_k(ac;q)_k(q^{1-n}a/c;q)_k} \frac{(ax;q)_k(a/x;q)_k}{(bx;q)_k(b/x;q)_k} q^k.
\end{aligned} \tag{2.16}
$$

これを書直せば, 次の **Jackson の和公式** (1921) になる: パラメータ $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ が平衡条件 $a_1a_2a_3a_4a_5 = qa_0^2$ と終端条件 $a_5 = q^{-n}$ $(n \in \mathbb{N})$ を満たすとき

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} \frac{1-a_0q^{2k}}{1-a_0} \frac{(a_0;q)_k(a_1;q)_k(a_2;q)_k\cdots(a_5;q)_k}{(q;q)_k(qa_0/a_1;q)_k\cdots(qa_0/a_5;q)_k} q^k \\
&= \frac{(qa_0;q)_n(qa_0/a_1a_2;q)_n(qa_0/a_1a_3;q)_n(qa_0/a_2a_3;q)_n}{(qa_0/a_1;q)_n(qa_0/a_2;q)_n(qa_0/a_3;q)_n(qa_0/a_1a_2a_3;q)_n}.
\end{aligned} \tag{2.17}
$$

この公式から極限操作によって様々な和公式が得られる. 例えば, $n \to \infty$ という極限で, 無限級数版の Jackson 和公式

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1-q^{2k}a_0}{1-a_0} \frac{(a_0,\, a_1,\, a_2,\, a_3;q)_k}{(q, qa_0/a_1, qa_0/a_2, qa_0/a_3;q)_k} \left(\frac{qa_0}{a_1a_2a_3}\right)^k \\
&= \frac{(qa_0,\, qa_0/a_1a_2,\, qa_0/a_1a_3,\, qa_0/a_2a_3;q)_\infty}{(qa_0/a_1, qa_0/a_2, qa_0/a_3, qa_0/a_1a_2a_3;q)_\infty} \qquad (|qa_0/a_1a_2a_3| < 1).
\end{aligned} \tag{2.18}
$$

が得られる. ここで $(a_1,\ldots,a_r;q)_k = (a_1;q)_k\cdots(a_r;q)_k$ という略記法を用いた.

これを徐々に退化させていくと

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1-q^{2k}a_0}{1-a_0}\frac{(a_0,\,a_1,\,a_2;q)_k}{(q,qa_0/a_1,qa_0/a_2;q)_k}q^{\binom{k}{2}}\,(qa_0/a_1a_2)^k=\frac{(qa_0,\,qa_0/a_1a_2,;q)_\infty}{(qa_0/a_1,qa_0/a_2;q)_\infty}, \tag{2.19}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-q^{2k}a_0}{1-a_0}\frac{(a_0,\,a_1;q)_k}{(q,qa_0/a_1;q)_k}q^{2\binom{k}{2}}\,(qa_0/a_1)^k=\frac{(qa_0;q)_\infty}{(qa_0/a_1;q)_\infty}, \tag{2.20}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1-q^{2k}a_0}{1-a_0}\frac{(a_0\,;q)_k}{(q;q)_k}q^{3\binom{k}{2}+k}\,a_0^k=(qa_0;q)_\infty. \tag{2.21}$$

この最後の恒等式は **Sylvester の和公式**

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(x\,;q)_k}{(q;q)_k}q^{3\binom{k}{2}+k}\,x^k(1-q^{2k}x)=(x;q)_\infty \tag{2.22}$$

である．ここで $a_0=x=q$ と特殊化すれば **Euler の 5 角数定理**

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,q^{3\binom{k}{2}+2k}\,(1-q^{2k+1})=(q;q)_\infty \tag{2.23}$$

となる．

2.3 ${}_{r+3}W_{r+2}$ 型の q 超幾何級数

既に注意したように，上位の超幾何級数で和公式や変換公式が成立するためには，適切な平衡条件や釣合条件が満たされることが必要である．q 超幾何級数の場合には，特別な形の釣合条件を満たす (very well-poised) q 超幾何級数を表す便利な記号が用意されている．

$${}_{r+3}W_{r+2}[a_0;a_1,a_2,\dots,a_r;q,x]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-a_0q^{2k}}{1-a_0}\frac{(a_0;q)_k(a_1;q)_k(a_2;q)_k\cdots(a_r;q)_k}{(q;q)_k(qa_0/a_1;q)_k\cdots(qa_0/a_r;q)_k}x^k \tag{2.24}$$

この級数には，分子側と分母側のパラメータが対になるという釣合条件に加えて，$(1-a_0q^{2k})/(1-a_0)$ という「余分な」因子があることが特徴である．この特別な (very な) 部分は

$$\frac{1-a_0q^{2k}}{1-a_0}=\frac{(q^2a_0;q^2)_k}{(a_0;q^2)_k}=\frac{(q\sqrt{a_0};q)_k(-q\sqrt{a_0};q)_k}{(\sqrt{a_0};q)_k(-\sqrt{a_0};q)_k}\qquad(k=0,1,2,\dots) \tag{2.25}$$

なので，分子・分母に 2 個の q 階乗冪を用意すれば通常の q 超幾何級数で表せる．

$${}_{r+3}W_{r+2}\left[a_0;a_1,\dots,a_r;q,x\right]={}_{r+3}\phi_{r+2}\left[\begin{matrix}a_0,\;q\sqrt{a_0},\;-q\sqrt{a_0},\;a_1,\;\dots,\;a_r\\ \sqrt{a_0},-\sqrt{a_0},qa_0/a_1,\dots,qa_0/a_r\end{matrix};q,x\right] \tag{2.26}$$

通常の超幾何級数の場合には，

$$\frac{\alpha_0+2k}{\alpha_0}=\frac{\frac{1}{2}\alpha_0+k}{\frac{1}{2}\alpha_0}=\frac{(\frac{1}{2}\alpha_0+1)_k}{(\frac{1}{2}\alpha_0)_k}\qquad(k=0,1,2,\dots) \tag{2.27}$$

なので，${}_{r+3}W_{r+2}$ は，

$${}_{r+2}F_{r+1}\left[\begin{matrix}\alpha_0,\;\frac{1}{2}\alpha_0+1,\;\alpha_1,\;\dots,\;\alpha_r\\ \frac{1}{2}\alpha_0,\;\;\beta_1,\;\;\dots,\;\;\beta_r\end{matrix};x\right];\qquad\beta_i=1+\alpha_0-\alpha_i\quad(i=1,\dots,r) \tag{2.28}$$

に相当する.

この記号 ${}_{r+3}W_{r+1}$ 型を用いると **Jackson の和公式**は: 平衡条件 $a_1a_2a_3a_4a_5 = qa_0^2$ と終端条件 $a_5 = q^{-n}$ $(n \in \mathbb{N})$ の下で

$$
{}_8W_7\big[\, a_0; a_1, a_2, a_3, a_4, q^{-n}; q, q\big] = \frac{(qa_0, qa_0/a_1a_2, qa_0/a_1a_3, qa_0/a_2a_3; q)_n}{(qa_0/a_1, qa_0/a_2, qa_0/a_3, qa_0/a_1a_2a_3; q)_n}. \tag{2.29}
$$

q 超幾何級数に対する **Bailey の変換公式**は次のようになる: 平衡条件 $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7 = q^2a_0^3$ と終端条件 $a_7 = q^{-n}$ の下で,

$$
\begin{aligned}
&{}_{10}W_9\big[\, a_0; a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, q^{-n}; q, q\big] \\
&= \frac{(qa_0, qa_0/a_4a_5, qa_0/a_4a_6, qa_0/a_5a_6; q)_n}{(qa_0/a_4, qa_0/a_5, qa_0/a_6, qa_0/a_4a_5a_6; q)_n}\, {}_{10}W_9\big[\, \widetilde{a}_0; \widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2, \widetilde{a}_3, a_4, a_5, a_6, q^{-n}; q, q\big].
\end{aligned} \tag{2.30}
$$

ここで,

$$
\widetilde{a}_0 = qa_0^2/a_1a_2a_3; \quad \widetilde{a}_1 = qa_0/a_2a_3, \quad \widetilde{a}_2 = qa_0/a_1a_3, \quad \widetilde{a}_3 = qa_0/a_1a_2. \tag{2.31}
$$

3 楕円超幾何級数

これまで, 超幾何級数と q 超幾何級数の和公式や変換公式を見てきた訳だが, これらはそれぞれ「有理的」「三角的」な超幾何級数である. さらに一歩進めて「楕円的」な超幾何級数まで含めて考えると, 超幾何級数の新しい側面が見えてくる. その基礎にあるのは **Riemann 関係式**と **Hermite の定理**である.

3.1 Riemann 関係式と Hermite の定理

$\mathbb{C}$ 上定義された 0 でない正則函数 $s(x)$ が次の **Riemann 関係式**を満たすとする: 任意の $x, a, b, c \in \mathbb{C}$ に対して

$$
\begin{aligned}
s(x+a)s(x-a)s(b+c)s(b-c) + s(x+b)s(x-b)s(c+a)s(c-a)& \\
+ s(x+c)s(x-c)s(a+b)s(a-b) = 0.&
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

今後 $s(x+a)s(x-a)$ の形の積が頻出するので, 複号で積を表す略記法 $s(x \pm a) = s(x+a)s(x-a)$ を採用することにする. 改めて書くと Riemann 関係式は

$$
s(x \pm a)s(b \pm c) + s(x \pm b)s(c \pm a) + s(x \pm c)s(a \pm b) = 0 \tag{3.2}
$$

と表される. この Riemann 関係式は次のように表現してもよい.

$$
s(x \pm u)s(y \pm v) - s(x \pm v)s(y \pm u) = s(x \pm y)s(u \pm v) \tag{3.3}
$$

$$
\frac{s(x \pm u)}{s(x \pm v)} - \frac{s(y \pm u)}{s(y \pm v)} = \frac{s(x \pm y)s(u \pm v)}{s(x \pm v)s(y \pm v)} \tag{3.4}
$$

0 でない整函数 $s(x)$ が Riemann 関係式を満たすとすると, 次のことが従う.

(1) $s(x)$ は奇函数であって, その零点集合 $\Omega = \{\omega \in \mathbb{C} \mid s(\omega) = 0\}$ は, $\mathbb{C}$ の加法群の部分加群. 更に Ω は自由 $\mathbb{Z}$ 加群で, その階数は $0, 1, 2$ の何れかである. Ω の階数が 2 ときには, $\mathbb{R}$ 上 1 次独立な $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ から生成される.

(2) Ω の各点において, $s(x)$ の零点の位数は 1. また, $s(x)$ は, Ω に関して次の意味で擬周期的:

$$s(x+\omega) = \epsilon_\omega e\big(\eta_\omega(x+\tfrac{\omega}{2})\big)s(x) \qquad (\omega \in \Omega). \tag{3.5}$$

ここで, 指数函数の記号 $e(x) = e^{2\pi\sqrt{-1}x}$ を用いた. $\eta_\omega \in \mathbb{C}$ は ω について加法的. また ϵ_ω は, ω の偶奇性, 即ち $\omega \in 2\Omega$ 或は $\omega \notin 2\Omega$ に従って $+1$, -1 の値をとる符号. また, $\eta_i = \eta_{\omega_i}$ $(i = 1, 2)$ と書けば $\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = 1$.

次の分類定理は Hermite による (Whittaker-Watson [13] の p.461; Chapter XX, Exercise 38).

定理 3.1 (Hermite) $\mathbb{C}$ 上の 0 でない正則函数 $s(x)$ が Riemann 関係式 (3.2) を満たすとする. このとき, $s(x)$ の零点集合のなす格子 Ω の階数に応じて, $s(x)$ は次のいずれかの形に表示される:

$$\begin{array}{lll} (0)\ \text{有理:} & s(x) = e(ax^2+b)\,x, & (\Omega = 0), \\ (1)\ \text{三角:} & s(x) = e(ax^2+b)\sin(\pi x/\omega_1), & (\Omega = \mathbb{Z}\,\omega_1), \\ (2)\ \text{楕円:} & s(x) = e(ax^2+b)\,\sigma(x|\Omega), & (\Omega = \mathbb{Z}\,\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\,\omega_2). \end{array} \tag{3.6}$$

ここで, $a, b \in \mathbb{C}$. $\sigma(x|\Omega)$ は Ω を周期格子とする Weierstrass のシグマ函数を表す.

上で $\sigma(x|\Omega)$ と記したのは, Ω に付随する **Weierstrass のシグマ函数**である.

$$\sigma(x) = \sigma(x|\Omega) = x \prod_{\omega\in\Omega,\omega\neq 0} \left(1 - \frac{x}{\omega}\right) e^{x^2/2\omega^2 + x/\omega} \tag{3.7}$$

対応する $\zeta(x)$, $\wp(x)$ は次のように表される:

$$\zeta(x) = \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} = \frac{1}{x} + \sum_{\omega\in\Omega,\omega\neq 0} \left(\frac{1}{x-\omega} + \frac{x}{\omega^2} + \frac{1}{\omega}\right), \tag{3.8}$$

$$\wp(x) = -\zeta'(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{\omega\in\Omega,\omega\neq 0} \left(\frac{1}{(x-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right). \tag{3.9}$$

この定義で $\sigma(x) = x + O(x^5)$ となっていて, シグマ函数は $x = 0$ での Taylor 展開に x^3 の項が現れないように規格化されている.

今, Ω の階数が 2 の楕円的な場合, 周期の比 $\tau = \omega_2/\omega_1$ について, $\operatorname{Im}\tau > 0$ として $p = e(\tau)$ とおけば, $|p| < 1$. Jacobi の楕円テータ函数の乗法的な記法

$$\theta(z;p) = (z;p)_\infty (p/z;p)_\infty (p;p)_\infty = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k p^{\binom{k}{2}} z^k \tag{3.10}$$

を用いると, 変数の対応 $z = e(x/\omega_1)$ の下で奇のテータ函数 $z^{-\frac{1}{2}}\theta(z;p)$ は Riemann 関係式を満たす. 一般の $s(x)$ は, テータ函数を用いれば次のように表される:

$$s(x) = \text{const.}\, e\big(\tfrac{\eta_1 x^2}{2\omega_1}\big)\, z^{-\frac{1}{2}}\theta(z;p), \qquad z = e(e/\omega_1). \tag{3.11}$$

3.2 楕円超幾何級数

以下では, 0 でない整函数 $s(u)$ で Riemann 関係式を満たすものを一つ選び, それを単に $[u]=s(u)$ で表す. また定数 $\delta\in\mathbb{C}$ で $\mathbb{Z}\delta\cap\Omega=\{0\}$ なるものを固定し, $[u]$ に関する **δ 階乗冪**を

$$[u]_k=[u]_{\delta,k}=[u][u+\delta]\cdots[u+(k-1)\delta]\qquad(k=0,1,2,\ldots)\tag{3.12}$$

で定義する. この δ 階乗冪の記号を使って $[u]$ に付随する超幾何級数を考えれば, 通常の超幾何級数, q 超幾何級数に加えて, **楕円超幾何級数**も含めて, 超幾何級数を統一的に取扱うことが出来る.

$[u]$ に付随する (楕円) 超幾何級数を, x の形式冪級数

$${}_{r+1}E_r\left[\begin{matrix}\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots,\alpha_r\\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_r\end{matrix};x\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[\alpha_0]_k[\alpha_1]_k\cdots[\alpha_r]_k}{[\delta]_k\ [\beta_1]_k\cdots[\beta_r]_k}x^k\tag{3.13}$$

と定義するのは自然であろう. 例によって, $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ の何れかが $-n\delta$ ($n\in\mathbb{N}$) の形であれば, 上記の級数は $k=n$ までの有限和となる. 楕円超幾何級数の場合は, 無限級数の収束は微妙なので, 形式上無限和で記す場合でも, 何れかの $i\in\{0,1\ldots,r\}$ について, $\alpha_i\equiv-n\delta$ ($n\in\mathbb{N}$) となることを仮定して, 有限超幾何級数で考えることにする.

和公式や変換公式を考察するときには, 平衡条件や釣合条件を満たす超幾何級数のクラスが重要である. 以下では主に, 次のような特別な釣合条件を満たす (very well-poised な) 超幾何級数のクラスを扱う:

$$V\big[\alpha_0;\alpha_1,\ldots,\alpha_r\big]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[\alpha_0+2k\delta]}{[\alpha_0]}\frac{[\alpha_0]_k}{[\delta]_k}\prod_{i=1}^{r}\frac{[\alpha_i]_k}{[\delta+\alpha_0-\alpha_i]_k}.\tag{3.14}$$

楕円的な場合にはこの V を ${}_{r+5}V_{r+4}$ と書く習慣である.

3.3 Frenkel-Turaev 和公式と楕円 Bailey 変換公式

Dougall/Jackson の和公式の楕円超幾何級数版は **Frenkel-Turaev の和公式** (1997) と呼ばれている. Frenkel-Turaev の和公式を導くには, 第 1 節で説明した Dougall 和公式の場合と同じやり方を, 楕円函数の系列

$$\frac{[a\pm x]_k}{[b\pm x]_k}=\frac{[a+x]_k[a-x]_k}{[b+x]_k[b-x]_k}\qquad(k=0,1,2,\ldots)\tag{3.15}$$

に適用し, パラメータ a を c に変更した $[c\pm x]_n/[b\pm x]_n$ の展開を考えればよい. (下降演算子の計算の過程で, 非自明な「因子化」が Riemann 関係式によって保証される). 結果は次のようになる: パラメータ $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_5$ が次の平衡条件と終端条件

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5=\delta+2\alpha_0;\quad \alpha_5=-n\delta\quad(n\in\mathbb{N}).\tag{3.16}$$

を満たすとすると,

$$V\big[\alpha_0;\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,-n\delta\big]=\frac{[\delta+\alpha_0]_n[\delta+\alpha_0-\alpha_1-\alpha_2]_n[\delta+\alpha_0-\alpha_1-\alpha_3]_n[\delta+\alpha_0-\alpha_2-\alpha_3]_n}{[\delta+\alpha_0-\alpha_1]_n[\delta+\alpha_0-\alpha_2]_n[\delta+\alpha_0-\alpha_3]_n[\delta+\alpha_0-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3]_n}.\tag{3.17}$$

楕円超幾何級数の **Bayley 変換公式**では, パラメータ $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_7$ に次の平衡条件と終端条件を課す:

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_7=2\delta+3\alpha_0;\quad \alpha_7=-n\delta\quad(n\in\mathbb{N}). \tag{3.18}$$

このとき

$$\begin{aligned}&V\big[\alpha_0;\,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,-n\delta\big]\\&=\frac{[\delta+\alpha_0]_n[\delta+\alpha_0-\alpha_4-\alpha_5]_n[\delta+\alpha_0-\alpha_4-\alpha_6]_n[\delta+\alpha_0-\alpha_5-\alpha_6]_n}{[\delta+\alpha_0-\alpha_4]_n[\delta+\alpha_0-\alpha_5]_n[\delta+\alpha_0-\alpha_6]_n[\delta+\alpha_0-\alpha_4-\alpha_5-\alpha_6]_n}\\&\quad\cdot V\big[\widetilde{\alpha}_0;\,\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2,\widetilde{\alpha}_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,-n\delta\big]\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}&\widetilde{\alpha}_0=\delta+2\alpha_0-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3;\\&\widetilde{\alpha}_1=\delta+\alpha_0-\alpha_2-\alpha_3,\quad \widetilde{\alpha}_2=\delta+\alpha_0-\alpha_1-\alpha_3,\quad \widetilde{\alpha}_3=\delta+\alpha_0-\alpha_1-\alpha_2.\end{aligned} \tag{3.20}$$

三角的な場合は, 加法的な変数 α と乗法的な変数 $a=e(\alpha)$ を対応させて, 基本函数

$$[\alpha]=e(\alpha/2)-e(-\alpha/2)=a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=-a^{-\frac{1}{2}}(1-a) \tag{3.21}$$

を用いる. $q=e(\delta)$ とおけば

$$[\alpha]_k=(-1)^kq^{-\frac{1}{2}\binom{k}{2}}a^{-\frac{k}{2}}(a;q)_k,\quad \frac{[\alpha]_k}{[\beta]_k}=\frac{(a;q)_k}{(b;q)_k}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{2}}\quad(k=0,1,2,\ldots) \tag{3.22}$$

なので

$$V[\alpha_0;\,\alpha_1,\ldots,\alpha_r]={}_{r+3}W_{r+2}\big[a_0;\,a_1,\ldots,a_r;q,(qa_0)^{\frac{r-1}{2}}/a_1\cdots a_r\big] \tag{3.23}$$

である. これで, Frenkel-Turaev の和公式が Jackson の和公式になる.

有理的な場合には, $[\alpha]=\alpha$, $\delta=1$ として読替えると, $\beta_i=1+\alpha_0-\alpha_i\quad(i=1,\ldots,r)$ に対して

$$V\big[\alpha_0;\,\alpha_1,\ldots,\alpha_r\big]={}_{r+2}F_{r+1}\begin{bmatrix}\alpha_0,\frac{1}{2}\alpha_0+1,\alpha_1,\ldots,\alpha_r\\ \frac{1}{2}\alpha_0,\beta_1,\ldots,\beta_r\end{bmatrix};1\Bigg]. \tag{3.24}$$

これで, Frenkel-Turaev 和公式は Dougall の和公式を意味する.

なお, 楕円的な場合には, 因子 $[\alpha_0+2k\delta]/[\alpha_0]$ は, シグマ函数の倍公式で, 4 個の δ 階乗の比で表されるので,

$${}_{r+5}V_{r+4}\big[\alpha_0;\,\alpha_1,\ldots,\alpha_r\big]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[\alpha_0+2k\delta]}{[a_0]}\frac{[\alpha_0]_k}{[\delta]_k}\prod_{i=1}^{r}\frac{[\alpha_i]_k}{[\delta+\alpha_0-\alpha_i]_k}. \tag{3.25}$$

という記法も用いられる.

この記法では, Dougall/Jackson/Frenkel-Turaev の和公式は, ${}_7F_6$, ${}_8W_7$, ${}_{10}V_9$ のレベル, Bailey の変換公式は ${}_9F_8$, ${}_{10}W_9$, ${}_{12}V_{11}$ のレベルである.

4 多重超幾何級数の変換公式と和公式

超幾何級数の和公式や変換公式を成立させているのは, 実は基本函数 $[u]$ (階乗冪の構成要素) の Riemann 関係式である. 実際 Riemann 関係式だけから, 多重 (多次元和の) 超幾何級数を含めた「普遍的」な変換公式・和公式を導出することができる (梶原・野海 [2], 2003).

例によって 0 でない整函数 $[u]$ で Riemann 関係式を満たすものを固定する. 以下では, これを出発点として (多重) 楕円超幾何級数の変換公式・和公式を組上げていく一つのやり方を説明する.

4.1 Cauchy-Frobenius の行列式

次の **Cauchy-Frobenius の行列式** (1882) は, Riemann 関係式から出発してより「高級な」函数等式を編上るための, 極めて強力な手段である: 2 組の変数 $z=(z_1,\ldots,z_M)$, $w=(w_1,\ldots,w_M)$ とパラメータ λ について

$$D(z;w)=\det\left(\frac{[\lambda+z_i+w_j]}{[\lambda][z_i+w_j]}\right)_{i,j=1}^{M}=\frac{[\lambda+\sum_{i=1}^{M}z_i+\sum_{j=1}^{M}w_j]\Delta(z)\Delta(w)}{[\lambda]\prod_{1\le i,j\le M}[z_i+w_j]} \tag{4.1}$$

ここで, $[u]$ に関する差積を $\Delta(z)=\prod_{1\le i<j\le M}[z_i-z_j]$ と記した. $M=2$ の場合の

$$\frac{[\lambda+z_1+w_1][\lambda+z_2+w_2]}{[z_1+w_1][z_2+w_2]}-\frac{[\lambda+z_1+w_2][\lambda+z_2+w_1]}{[z_1+w_2][z_2+w_1]}=\frac{[\lambda][\lambda+z_1+z_2+w_1+w_2][z_1-z_2][w_1-w_2]}{[z_1+w_1][z_1+w_2][z_2+w_1][z_2+w_2]} \tag{4.2}$$

は Riemann 関係式と同値. 一般の場合は, M に関する帰納法で示せる.

変数 z_i に関する δ シフトの作用素を T_{z_i} で表し, u をパラメータとして, 次の差分作用素を考えよう:

$$E(T_z;u)=(1+uT_{z_1})\cdots(1+uT_{z_M})=\sum_{I\subset\{1,\ldots,M\}}u^{|I|}T_z^I;\qquad T_z^I=\prod_{i\in I}T_{z_i} \tag{4.3}$$

行列式 $D(z;w)$ で z_i は第 i 行にしか現れないので

$$E(T_z;u)D(w;z)=\det\left((1+uT_{z_i})\frac{[\lambda+z_i+w_j]}{[\lambda][z_i+w_j]}\right)_{i,j=1}^{M}=\det\left(\frac{[\lambda+z_i+w_j]}{[\lambda][z_i+w_j]}+u\,\frac{[\lambda+z_i+w_j+\delta]}{[\lambda][z_i+w_j+\delta]}\right)_{i,j=1}^{M} \tag{4.4}$$

最後の表示は z 変数と w 変数について対称であることに注意しよう:

$$E(T_z;u)D(z;w)=E(T_w;u)D(z;w). \tag{4.5}$$

Cauchy-Frobenius の行列式を

$$D(z;w)=\frac{[\lambda+|z|+|w|]\,\Delta(z)\Delta(w)}{[\lambda]\prod_{i,j}[z_i+w_j]}\qquad(|z|=z_1+\cdots+z_M) \tag{4.6}$$

と書いて, $E(T_z;u)$ の作用を計算する. 重要なのは差積の因子で $\dfrac{T_z^I\Delta(z)}{\Delta(z)}=\prod_{i\in I;j\notin I}\dfrac{[z_i-z_j+\delta]}{[z_i-z_j]}$. 従って

$$\begin{aligned}\frac{E(T_z;u)D(z,w)}{D(z;w)}&=\sum_I u^{|I|}\frac{T_z^ID(z;w)}{D(z;w)}\\&=\sum_I u^{|I|}\frac{[\lambda+|z|+|w|+|I|\delta]}{[\lambda+|z|+|w|]}\prod_{i\in I;j\notin I}\frac{[z_i-z_j+\delta]}{[z_i-z_j]}\prod_{i\in I;1\le l\le M}\frac{[z_i+w_l]}{[z_i+w_l+\delta]}\end{aligned} \tag{4.7}$$

となる. この式は z 変数と w 変数について対称なので, 次の定理が従う.

定理 4.1 (部分集合型の双対変換公式) 2 組の変数 $z = (z_1, \dots, z_M)$, $w = (w_1, \dots, w_M)$ を考える. このとき $d = 0, 1, \dots, M$ に対して次の等式が成立する:

$$\sum_{|I|=d} \prod_{i\in I; j\notin I} \frac{[z_i - z_j + \delta]}{[z_i - z_j]} \prod_{i\in I; 1\le l\le M} \frac{[z_i + w_l]}{[z_i + w_l + \delta]}$$
$$= \sum_{|K|=d} \prod_{k\in K; l\notin K} \frac{[w_k - w_l + \delta]}{[w_k - w_l]} \prod_{k\in L; 1\le j\le M} \frac{[w_k + z_j]}{[w_k + z_j + \delta]}. \tag{4.8}$$

ここで両辺の和は, 添字集合 $\{1, \dots, M\}$ の d 元部分集合の全体にわたる.

重要なのは, 変数の個数 M が任意ということである. 実際 z 変数と w 変数をうまく特殊化することで, 上記の定理から多重超幾何級数の双対変換公式を導くことができる.

今 m 次元の多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \dots, a_m) \in \mathbb{N}^m$ で, 長さが M 即ち $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m = M$ なるものを任意にとる. そこで, M 個の z 変数を多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $|\alpha| = M$ で m 個のブロックに分割して, 各ブロックの中は公差 δ の等差数列となるように特殊化する;

$$(z_1, \dots, z_M) = (x_1, x_1 + \delta, \dots, x_1 + (\alpha_1 - 1)\delta; \cdots; x_m, x_m + \delta, \dots, x_m + (\alpha_m - 1)\delta) \tag{4.9}$$

この操作を**多重主特殊化** (plethysm) といい, 簡単に $z \to (x)_\alpha$, $x = (x_1, \dots, x_m)$ で表す. 上記の定理の z 変数と w 変数にこの特殊化を適用する.

4.2 多重主特殊化の方法

便宜上, 符号をかえて $z \to -(x)_\alpha$ なる多重主特殊化を考える:

$$(z_1, \dots, z_M) = (-x_1, -x_1 - \delta, \dots, -x_1 - (\alpha_1 - 1)\delta; \cdots; -x_m, -x_m - \delta, \dots, -x_m - (\alpha_m - 1)\delta) \tag{4.10}$$

この種の特殊化を行う際には, 添字集合 $\{1, \dots, M\}$ を $\{(k, a) \mid k \in \{1, \dots, m\},\ 0 \le a < \alpha_k\}$ に置換えて考えるのが便利である. この記号で $z_{(k,a)} = -x_k - a\delta$ $(0 \le a < \alpha_k)$ なる代入を考える. このとき

$$z_{k,a+1} = z_{k,a} - \delta, \quad \text{即ち} \quad z_{k,a+1} - z_{k,a} + \delta = 0 \tag{4.11}$$

差積由来の因子

$$\prod_{i\in I:\ j\notin I} \frac{[z_i - z_j + \delta]}{[z_i - z_j]} \tag{4.12}$$

に注目すると, 上式は, $i = (k, a+1) \in I$, $j = (k, a) \notin I$ の時にはこの因子が 0 となることを意味する: I の元を ● で I の補集合の元を ○ で表せば, 何れかのブロックに |···○●···| というパターンがあれば, この差積由来の因子は 0 となる. 0 でない項を生ずるには, ブロック内での○●パターンは禁止. 各ブロックで | ●●●●○○○ | のように●が左詰めになっているような I だけを考えればよい. 第 k ブロック内の● 即ち I の元の個数を μ_k と書けば, 多重指数 $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ $(0 \le \mu_k \le \alpha_k; k = 1, \dots, m)$ が決まり, 非自明な I は

$$I = \{(k; a) \mid k \in \{1, \dots, m\},\ 0 \le a < \mu_k\} \tag{4.13}$$

とパラメータ付けられる．このような仕組みで

$$\prod_{i\in I:\ j\notin I}\frac{[z_i-z_j+\delta]}{[z_i-z_j]}\Big|_{z\to-(x)_\alpha}=\prod_{1\le k,l\le m}\frac{[x_k-x_l-\alpha_l]_{\mu_k}}{[x_k-x_l-\mu_k]_{\mu_k}} \tag{4.14}$$

のように δ 階乗冪の因子が生じる．このとき $|I|=|\mu|$ である．この因子は, 差積を使って

$$\prod_{k<l}\frac{[x_k-x_l+(\mu_k-\mu_l)\delta]}{[x_k-x_l]}\prod_{k,l}\frac{[x_k-x_l-\alpha_l]_{\mu_k}}{[x_k-x_l+\delta]_{\mu_k}}=\frac{\Delta(x+\mu\delta)}{\Delta(x)}\prod_{k,l}\frac{[x_k-x_l-\alpha_l]_{\mu_k}}{[x_k-x_l+\delta]_{\mu_k}} \tag{4.15}$$

とも書き表せるので, 以下ではこちらを用いる．

z 変数に対し, m 次元の多重指数 $\alpha\in\mathbb{N}^m$ で, $|\mu|=M$ なるものを使って特殊化 $z\to-(x)_\alpha$ を行った．同様に w 変数に対しては, n 次元の多重指数 $\beta\in\mathbb{N}^n$ で, $|\nu|=M$ なるものを使って特殊化 $w\to-(y)_\alpha$, $y=(y_1,\dots,y_n)$ を 行うと, 前掲の定理は次のように姿を変える．

2 組の変数 $x=(x_1,\dots,x_m)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$ と, 多重指数 $\alpha\in\mathbb{N}^m$, $\beta\in\mathbb{N}^n$ で, $|\alpha|=|\beta|$ なるものをとる．このとき, 任意の $N\in\mathbb{N}$ に対して, 次の等式が成立する:

$$\begin{aligned}&\sum_{\mu\in\mathbb{N}^m:\ |\mu|=N}\frac{\Delta(x+\mu\delta)}{\Delta(x)}\prod_{1\le i,j\le m}\frac{[x_i-x_j-\alpha_j\delta]_{\mu_i}}{[x_i-x_j+\delta]_{\mu_i}}\prod_{1\le i\le m;1\le l\le n}\frac{[x_i+y_l+\beta_l\delta]_{\mu_i}}{[x_i+y_l]_{\mu_i}}\\ &=\sum_{\nu\in\mathbb{N}^n:\ |\nu|=N}\frac{\Delta(y+\nu\delta)}{\Delta(y)}\prod_{1\le k,l\le n}\frac{[y_k-y_l-\beta_l\delta]_{\nu_k}}{[y_k-y_l+\delta]_{\nu_k}}\prod_{1\le k\le n;1\le j\le m}\frac{[y_k+x_j+\alpha_j\delta]_{\nu_k}}{[y_k+x_j]_{\nu_k}}.\end{aligned} \tag{4.16}$$

ここで, 多重指数 α, β を含む部分を, パラメータ $a_j=-\alpha_j\delta$, $b_l=-\beta_l\delta$ に置換えて書くと, $a_1+\cdots+a_m=b_1+\cdots+b_n$ の下で

$$\begin{aligned}&\sum_{\mu\in\mathbb{N}^m:\ |\mu|=N}\frac{\Delta(x+\mu\delta)}{\Delta(x)}\prod_{1\le i,j\le m}\frac{[x_i-x_j+a_j]_{\mu_i}}{[x_i-x_j+\delta]_{\mu_i}}\prod_{1\le i\le m;1\le l\le n}\frac{[x_i+y_l-b_l]_{\mu_i}}{[x_i+y_l]_{\mu_i}}\\ &=\sum_{\nu\in\mathbb{N}^n:\ |\nu|=N}\frac{\Delta(y+\nu\delta)}{\Delta(y)}\prod_{1\le k,l\le n}\frac{[y_k-y_l+b_l]_{\nu_k}}{[y_k-y_l+\delta]_{\nu_k}}\prod_{1\le k\le n;1\le j\le m}\frac{[y_k+x_j-a_j]_{\nu_k}}{[y_k+x_j]_{\nu_k}}.\end{aligned} \tag{4.17}$$

となる．この式で, 両辺は a_j, b_l について擬周期性をもち, しかも無限個の $a_j=-\alpha_j\delta$, $b_l=-\beta_l\delta$ で等式が成立している．このことから a_j,b_l の正則函数として両辺が等しいことが分かる．

定理 4.2 (多重指数型の双対変換公式) 2 組の変数 $x=(x_1,\dots,x_m)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$ と, それに対応するパラメータ $a=(a_1,\dots,a_m)$, $b=(b_1,\dots,b_n)$ を考える．N を任意の自然数とする．このとき, 平衡条件 $a_1+\cdots+a_m=b_1+\cdots+b_n$ の下で

$$\begin{aligned}&\sum_{\mu\in\mathbb{N}^m:\ |\mu|=N}\frac{\Delta(x+\mu\delta)}{\Delta(x)}\prod_{1\le i,j\le m}\frac{[x_i-x_j+a_j]_{\mu_i}}{[x_i-x_j+\delta]_{\mu_i}}\prod_{1\le i\le m;1\le l\le n}\frac{[x_i+y_l-b_l]_{\mu_i}}{[x_i+y_l]_{\mu_i}}\\ &=\sum_{\nu\in\mathbb{N}^n:\ |\nu|=N}\frac{\Delta(y+\nu\delta)}{\Delta(y)}\prod_{1\le k,l\le n}\frac{[y_k-y_l+b_l]_{\nu_k}}{[y_k-y_l+\delta]_{\nu_k}}\prod_{1\le k\le n;1\le j\le m}\frac{[y_k+x_j-a_j]_{\nu_k}}{[y_k+x_j]_{\nu_k}}.\end{aligned} \tag{4.18}$$

左辺は, m 次元の多重指数 μ で長さ N のもの全体にわたる ($(m-1)$ 次元的な) 和, 右辺は, n 次元の多重指数 ν で長さ N のもの全体にわたる ($(n-1)$ 次元的な) 和である．これが多重楕円超幾何級数に関する**双対変換公式**である．(差積の因子があるので A 型と呼ばれる.)

4.3 多重超幾何級数の双対変換公式

前掲の等式の構造を見やすくするために「超幾何級数らしい」記号を導入する:

$$\Phi_N^{m,n}\left[\begin{matrix}a_1,\dots,a_m\\ x_1,\dots,x_m\end{matrix}\middle|\begin{matrix}b_1,\dots,b_n\\ c_1,\dots,c_n\end{matrix}\right]=\sum_{\mu\in\mathbb{N}^m;|\mu|=N}\frac{\Delta(x+\mu\delta)}{\Delta(x)}\prod_{i,j}\frac{[x_i-x_j+a_j]_{\mu_i}}{[x_i-x_j+\delta]_{\mu_i}}\prod_{i,l}\frac{[x_i+b_l]_{\mu_i}}{[x_i+c_l]_{\mu_i}}. \tag{4.19}$$

この記号で書けば, 上記の定理は, $a_1+\cdots+a_m=b_1+\cdots+b_n$ の下で

$$\Phi_N^{m,n}\left[\begin{matrix}a_1,\dots,a_m\\ x_1,\dots,x_m\end{matrix}\middle|\begin{matrix}y_1-b_1,\dots,y_n-b_n\\ y_1,\dots,y_n\end{matrix}\right]=\Phi_N^{n,m}\left[\begin{matrix}b_1,\dots,b_n\\ y_1,\dots,y_n\end{matrix}\middle|\begin{matrix}x_1-a_1,\dots,x_m-a_m\\ a_1,\dots,a_m\end{matrix}\right] \tag{4.20}$$

なる双対変換公式が成立することを意味する. これは一種の Euler 変換公式である. $n=1$ のときは右辺は 1 項だけなり, 変換公式が和公式に姿を変える: $a_1+\cdots+a_m=b$ のとき

$$\Phi_N^{m,1}\left[\begin{matrix}a_1,\dots,a_m\\ x_1,\dots,x_m\end{matrix}\middle|\begin{matrix}y-b\\ y\end{matrix}\right]=\frac{[b]_N}{[\delta]_N}\prod_{j=1}^{m}\frac{[y+x_j-a_j]_N}{[y+x_j]_N}. \tag{4.21}$$

これを明示的に書くと: 平衡条件 $a_1+\cdots+a_m=b$ の下で

$$\sum_{\mu\in\mathbb{N}^m:\ |\mu|=N}\frac{\Delta(x+\mu\delta)}{\Delta(x)}\prod_{1\le i,j\le m}\frac{[x_i-x_j+a_j]_{\mu_i}}{[x_i-x_j+\delta]_{\mu_i}}\prod_{i=1}^{m}\frac{[x_i+y-b]_{\mu_i}}{[x_i+y]_{\mu_i}}=\frac{[b]_N}{[\delta]_N}\prod_{j=1}^{m}\frac{[y+x_j-a_j]_N}{[y+x_j]_N}. \tag{4.22}$$

左辺は $(m-1)$ 次元的な和である. $m=2$ のときは, 左辺は 1 次元的な和であり, この等式が丁度 Frenkel-Turaev の和公式になっている.

通常の楕円超幾何級数との関係を見やすくするには, $\Phi_N^{1+m,n}$ を m 次元和に書直しておくのが便利である. 今, この場合の V 型の多重超幾何級数を次で定義する.

$$\begin{aligned}&V^{m,n}\left[\begin{matrix}a_1,\dots,a_m\\ x_1,\dots,x_m\end{matrix}\middle|s;\,u_1,\dots,u_n;\,v_1,\dots,v_n\right]\\ &=\sum_{\mu\in\mathbb{N}^m}\frac{\Delta(x+\mu\delta)}{\Delta(x)}\prod_{i=1}^{m}\frac{[x_i+s+(|\mu|+\mu_i)\delta]}{[x_i+s]}\\ &\cdot\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{[s+x_j]_{|\mu|}}{[\delta+s+x_j-a_j]_{|\mu|}}\prod_{i=1}^{m}\frac{[x_i-x_j+a_j]_{\mu_i}}{[x_i-x_j+\delta]_{\mu_i}}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{[v_k]_{|\mu|}}{[\delta+s-u_k]_{|\mu|}}\prod_{i=1}^{m}\frac{[x_i+u_k]_{\mu_i}}{[\delta+s+x_i-v_k]_{\mu_i}}\right)\end{aligned} \tag{4.23}$$

この V 型の多重超幾何級数は $m=1$ のときには, 通常の V 型の超幾何級数となる:

$$\begin{aligned}&V^{1,n}\left[\begin{matrix}a\\ x\end{matrix}\middle|s;\,u_1,\dots,u_n;\,v_1,\dots,v_n\right]\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[x+s+2k\delta]}{[x+s]}\frac{[s+x]_k}{[\delta+s+x-a]_k}\frac{[a]_k}{[\delta]_k}\prod_{l=1}^{n}\left(\frac{[v_l]_k}{[\delta+s-u_l]_k}\frac{[x+u_l]_k}{[\delta+s+x-v_l]_k}\right)\\ &={}_{2n+6}V_{2n+5}\left[x+s;\,a,x+u_1,\dots,x+u_n,v_1,\dots,u_n\right]\end{aligned} \tag{4.24}$$

この記号の下で, Φ 型の級数から V 型の級数への, 以下のような読替えが可能である.

$$
\begin{aligned}
&\Phi_N^{1+m,n}\left[\begin{matrix}a_0,a_1,\dots,a_m\\x_0,x_1,\dots,x_m\end{matrix}\middle|\begin{matrix}b_1,\dots,b_n\\c_1,\dots,c_n\end{matrix}\right]\\
&=\frac{[a_0]_N}{[\delta]_N}\prod_{i=1}^{m}\frac{[x_0-x_i+a_i]_N}{[x_0-x_i]_N}\prod_{k=1}^{n}\frac{[x_0+b_k]_N}{[x_0+c_k]_N}\\
&\quad\cdot V^{m,n+1}\left[\begin{matrix}a_1,\dots,a_m\\x_1,\dots,x_m\end{matrix}\middle|-x_0-N\delta;\ a_0-x_0,b_1,\dots,b_n;\ -N\delta,(1-N)\delta-x_0-c_1,\dots,(1-N)\delta-x_0-c_n\right]
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

この読替えによって, 前掲の定理の $\Phi_N^{m+1,n+1}$ と $\Phi_N^{n+1,m+1}$ の変換公式は, $V^{m,n+2}$ と $V^{n,m+2}$ の間の多重超幾何級数の双対変換公式となる.

定理 4.3 (V 型多重超幾何級数の双対変換公式) 2 組の変数 $x=(x_1,\dots,x_m)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$ を考える. パラメータについて, 次の平衡条件と終端条件を課す:

$$
\textstyle\sum_{i=1}^{m}a_i+\sum_{k=1}^{2}(c_k+d_k)+\sum_{k=1}^{n}(u_k+v_k)=(n+1)\delta+(n+2)s;\qquad d_2=-N\delta\quad(N\in\mathbb{N}).
\tag{4.26}
$$

このとき, 次の双対変換公式が成立する:

$$
\begin{aligned}
&\frac{[\delta+s-c_1]_N[\delta+s-c_2]_n}{[d_1]_N[d_2]_N}\prod_{i=1}^{m}\frac{[\delta+s+x_i-a_i]_N}{[\delta+s+x_i]_N}\prod_{k=1}^{n}\frac{[\delta+s-u_k]_N}{[v_k]_N}\\
&\cdot V^{m,n+2}\left[\begin{matrix}a_1,\dots,a_m\\x_1,\dots,x_m\end{matrix}\middle|s;\ c_1,c_2,u_1,\dots,u_n;\ d_1,d_2,v_1,\dots,v_n\right]\\
=&\frac{[\delta+t-c_1]_N[\delta+t-c_2]_n}{[d_1]_N[d_2]_N}\prod_{k=1}^{n}\frac{[\delta+t+y_k-b_k]_N}{[\delta+t+y_k]_N}\prod_{i=1}^{m}\frac{[\delta+t-z_i]_N}{[w_i]_N}\\
&\cdot V^{n,m+2}\left[\begin{matrix}b_1,\dots,b_n\\y_1,\dots,y_n\end{matrix}\middle|t;-c_1,-c_2,z_1,\dots,z_m;\ d_1,d_2,w_1,\dots,w_m\right]
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

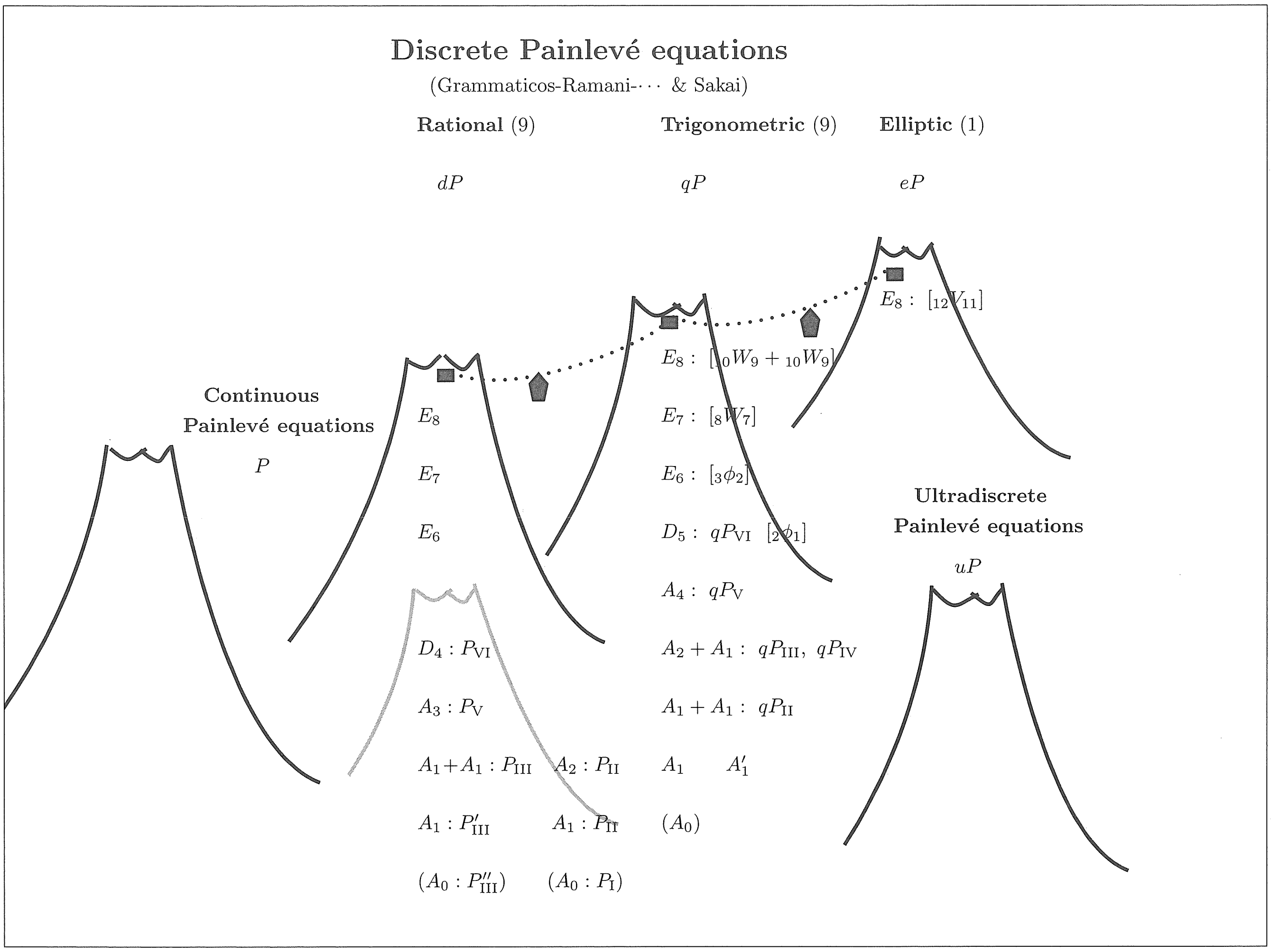
ここで, 右辺のパラメータは, 次の変換で定義されるものである:

$$
\begin{aligned}
&t=d_1+d_2-s-\delta;\\
&b_k=\delta+s-u_k-v_k,\quad y_k=\delta+s-v_k\quad(k=1,\dots,n)\\
&z_i=x_i-a_i,\qquad w_i=d_1+d_2-s-x_i\quad(i=1,\dots,m).
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

$(m,n)=(1,1)$ の場合, この変換公式は ${}_{12}V_{11}$ の Bailey 変換公式と同等の変換公式を表す. また, $(m,n)=(1,0)$ の場合, Frenkel-Turaev の和公式を表す.

5 楕円差分 Painlevé 方程式と楕円超幾何級数

超幾何函数は, 2 階の線型常微分方程式または線型常差分方程式を通じて「線型特殊函数」と思うのが常識的な理解であろう. しかし, 超幾何函数を「非線型特殊函数」として捉えるのは重要な視点である. 例えば, Painlevé VI 型方程式は 4 個のパラメータをもち, パラメータ空間は 4 次元のアフィン空



間であるが, パラメータが特別な超平面 (アフィン Weyl 群の鏡映面) 上にあるときには, Gauss の超幾何函数で表される特殊解や, Gauss の超幾何函数を成分とする行列式で表される特殊解をもつ.

今まで議論してきたような和公式・変換公式はパラメータの差分的な構造と関係している. 非線型特殊函数の観点からは, これらは離散可積分系や離散 Painlevé 系に関連するものである. 1990 年代の後半以降, 可積分系とアフィン Lie 環の関係と同様の意味で, 離散可積分系や離散 Painlevé 系をアフィン Wely 群の双有理表現と関連づけて系統的に構成することが出来るようになった (格子部分の双有理表現が離散力学系を表す). 特に, 2 階の離散 Painlevé 方程式の坂井のクラス (坂井 [11], 2001) は, 有理曲面の Cremona 変換に起源をもつ幾何学由来の差分方程式として重要な意味をもつ. 坂井のクラスにも, 有理・三角・楕円の 3 種類があり, 夫々が特殊解として様々な超幾何函数に関連していることが知られている.

以下で説明したいは, 坂井のクラスの最上位に位置する E_8 型アフィン Weyl 群対称性を持つ楕円差分 Painlevé 方程式である. この方程式は, ${}_{12}V_{11}$ レベルの楕円超幾何函数やその行列式で表されるような特殊解をもつことが知られている (2003, 梶原・増田・野海・太田・山田 [3], [5] 等). このような非線形特殊函数の観点から, 楕円超幾何級数 ${}_{12}V_{11}$ を E_7 型 Weyl 群対称性の下で理解出来るようになった.

5.1 楕円差分 Painlevé 方程式

有理曲面の幾何学に由来するアフィン Weyl 群の双有理表現を考える場合には,

(1) $\mathbb{P}^2$ の 9 点ブローアップ　　　(2) $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の 8 点ブローアップ

の何れを基礎とするかで少し描像が違ってくる. $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 描像の方が便利なこともあるが, 今回は $\mathbb{P}^2$ 描像で説明する. ($\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 描像であれば, 離散 Painlevé 方程式が QRT 写像の非自励化であることも直接見えるし, Padé 補間の問題等との関連も見やすい.)

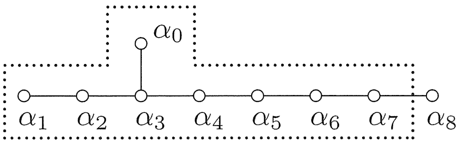
アフィン・ルート系: Lorentz 内積をもつ階数 10 の自由 $\mathbb{Z}$ 加群 L を考える:

$$\begin{aligned} &L = \mathbb{Z}e_0 \oplus \mathbb{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_9; \\ &(e_0|e_0) = -1, \quad (e_i|e_i) = 1 \ \ (i \in \{1, \dots, 9\}), \quad (e_i|e_j) = 0 \ \ (i, j \in \{0, 1, \dots, 9\};\ i \neq j). \end{aligned} \tag{5.1}$$

幾何学的には, L は, $\mathbb{P}^2$ の一般の位置にある 9 点によるブローアップの Picard 格子. e_0 は, $\mathbb{P}^2$ の超平面に, $e_1, \dots, e_9$ は 9 個の例外因子に対応する. 内積 $(\ |\ )$ は, 因子の交叉形式の -1 倍である. L の双対 $L^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{Z})$ の元 ε_j $(j = 0, 1, \dots, 9)$ を $\varepsilon_j = (e_j|\cdot)$ で定義する: $L^\vee = \mathbb{Z}\varepsilon_0 \oplus \mathbb{Z}\varepsilon_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\varepsilon_9$.

$$\alpha_0 = \varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \quad \alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \quad \alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \quad \dots, \quad \alpha_8 = \varepsilon_8 - \varepsilon_9 \tag{5.2}$$

とおくと, これらを**単純ルート**として, アフィン E_8 型のルート系が定まる:



$$\begin{aligned} \delta &= 3\varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \cdots - \varepsilon_9 \\ &= 3\alpha_0 + 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 + 5\alpha_4 + \cdots + \alpha_8 \end{aligned} \tag{5.3}$$

以下, 相異なる $i, j, k \in \{1, \dots, 9\}$ に対して $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_i - \varepsilon_j$, $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_0 - \varepsilon_i - \varepsilon_j - \varepsilon_k$ という略記法も用いる. この設定でルート格子を

$$Q(E_8) = \mathbb{Z}\alpha_0 \oplus \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\alpha_7 \subset Q(E_8^{(1)}) = \mathbb{Z}\alpha_0 \oplus \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\alpha_8 \subset L^\vee \tag{5.4}$$

で表す. 格子 L の複素化を $\mathfrak{h} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} L$ で表し, $L^\vee \subset \mathfrak{h}^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}, \mathbb{C})$ の元は, $\mathfrak{h}$ 上の 1 次函数と看做す.

アフィン Weyl 群: この場合の Weyl 群 $W = W(E_8^{(1)}) = \langle s_0, s_1, \dots, s_8 \rangle$ は**単純鏡映** $s_0, s_1, \dots, s_8$ についての次の基本関係

$$s_j^2 = 1 \qquad \begin{array}{ll} s_i s_j = s_j s_i & i \circ \quad \circ j \\ s_i s_j s_i = s_j s_i s_j & i \circ\!\!-\!\!-\!\!\circ j \end{array} \tag{5.5}$$

で定義される群であり, $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^*$ に標準的に作用する. s_0 の $\mathfrak{h}^*$ への作用は

$$\begin{aligned} &s_0(\varepsilon_0) = 2\varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \\ &s_0(\varepsilon_1) = \varepsilon_0 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \quad s_0(\varepsilon_2) = \varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3, \quad s_0(\varepsilon_3) = \varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ &s_0(\varepsilon_j) = \varepsilon_j \qquad (j = 4, 5, \dots, 9) \end{aligned} \tag{5.6}$$

残りの $\langle s_1, \dots, s_8 \rangle \simeq \mathfrak{S}_9$ は, ε_j $(j = 1, \dots, 9)$ の添字の置換として働く.

ルート格子の元 $\alpha \in Q(E_8^{(1)})$ による **Kac の平行移動**を

$$T_\alpha(\lambda) = \lambda + (\delta|\lambda)\alpha - \left(\tfrac{1}{2}(\alpha|\alpha)(\delta|\lambda) + (\alpha|\lambda)\right)\delta \qquad (\lambda \in \mathfrak{h}^*) \tag{5.7}$$

で定義するとこれらは互いに可換. $T_Q = \{T_\alpha \mid \alpha \in Q(E_8^{(1)})\} \subset W(E_8^{(1)})$ は階数 8 の自由アーベル群であって, アフィン Weyl 群は T_Q とそれに作用する有限 Weyl 群 $W(E_8) = \langle s_0, s_1, \ldots, s_7 \rangle$ の半直積に分解する: $W(E_8^{(1)}) = T_Q \rtimes W(E_8)$.

$W(E_8^{(1)})$ の双有理表現: $\mathbb{P}^2$ の一般の位置にある 9 点 $p_1, \ldots, p_9$ に対し, $\mathbb{P}^2$ の同次座標 $(x_1 : x_2 : x_3)$ を

$$\begin{aligned} &p_1 = (1:0:0), \quad p_2 = (0:1:0), \quad p_3 = (0:0:1), \quad p_4 = (1:1:1), \\ &p_j = (a_j : b_j : 1), \qquad (j = 5, \ldots, 9) \end{aligned} \tag{5.8}$$

となるように選び, $\mathbb{P}^2$ の一般の点を $q = (x:y:1)$ で表す. このとき, アフィン Weyl 群 $W(E_8^{(1)})$ は, 有理函数体

$$\mathcal{K} = \mathbb{C}(a_5, \ldots, a_9, b_5, \ldots, b_9; x, y) \tag{5.9}$$

に自己同型群として作用する. s_0 は**標準 Cremona 変換**

$$s_0(a_j) = \frac{1}{a_j}, \quad s_0(b_j) = \frac{1}{b_j} \quad (j = 5, \ldots, 9); \quad s_0(x) = \frac{1}{x}, \quad s_0(y) = \frac{1}{y} \tag{5.10}$$

として作用する. $\langle s_1, \ldots, s_8 \rangle$ は 9 個の点の置換と座標系の規格化で作用する. 座標系の規格化に従って, s_1 は a_j と b_j, x と y の交換として働き, s_2, s_3, s_4 の作用は簡単な有理変換になる. (具体形は省略する.)

一般の点 $q = (x:y:1)$ を考えると, 各 $w \in W(E_8^{(1)})$ に対して x, y の有理函数 $R_w(x,y), S_w(x,y)$ (a_j, b_j をパラメータとして含む) が定まり, w の座標 x, y への作用は

$$w(x) = R_w(x,y); \quad w(y) = S_w(x,y) \tag{5.11}$$

の形に表される. 特に, 平行移動 $w = T_\alpha$ ($\alpha \in Q(E_8^{(1)})$) の場合の双有理変換

$$T_\alpha(x) = R_\alpha(x,y); \quad T_\alpha(y) = S_\alpha(x,y) \tag{5.12}$$

を離散時間発展と看做したものが, $E_8^{(1)}$ 型の**離散 Painlevé 方程式**である.

例えばルートとして, $\alpha_6 = \varepsilon_6 - \varepsilon_7$ を選んで平行移動 T_{α_6} から

$$T_{\alpha_6}(x) = \frac{B_1(x,y)A_3(x,y)}{A_1(x,y)B_3(x,y)}, \quad T_{\alpha_6}(y) = \frac{B_2(x,y)A_3(x,y)}{A_2(x,y)B_3(x,y)} \tag{5.13}$$

の形の有理変換が得られる. $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$ と書くとき, $A_i(x,y)$, $B_i(x,y)$ は次の条件で特徴付けられる x, y の多項式である:

(A) $A_i(x,y)$ は x, y の 3 次式で, $p_j, p_k, p_4, p_5, p_8.p_9$ で重複度 1 の零点, p_6 で重複度 2 の零点を持つ.

(B) $B_i(x,y)$ は x,y の 4 次式で, $p_i,p_4,p_5,p_8.p_9$ で重複度 1 の零点, p_j,p_k,p_6 で重複度 2 の零点を持つ.

これらの多項式を具体的に書下すのは困難だが, 2 つの変換の合成として具体的に書く方法は知られている.

また, $p_1,\dots,p_9$ を通る 3 次曲線 (楕円曲線) C を, Weierstrass シグマ函数 (または Jacobi テータ函数) でパラメータ付けると, 上記の $A_i(x,y)$, $B_i(x,y)$ は点のパラメータに依存する楕円函数を係数とする多項式となる. このようにして得られる差分方程式が楕円差分 Painlevé 方程式である.

$\varepsilon_0,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_9\in\mathfrak{h}^*$ を並べて $\varepsilon=(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_9)$ と書き, これを Cartan 部分環 $\mathfrak{h}$ の座標系と看做す. Weierstrass シグマ函数 $[u]=\sigma(u|\Omega)$ $(u\in\mathbb{C})$ を用いて

$$\begin{aligned} x(u)&=\frac{[\alpha_0+\varepsilon_1-u][\varepsilon_3-u]}{[\varepsilon_1-u][\alpha_0+\varepsilon_3-u]}\frac{[\varepsilon_1-\varepsilon_4][\alpha_0+\varepsilon_3-\varepsilon_4]}{[\alpha_0+\varepsilon_1-\varepsilon_4][\varepsilon_3-\varepsilon_4]},\\ y(u)&=\frac{[\alpha_0+\varepsilon_2-u][\varepsilon_3-u]}{[\varepsilon_2-u][\alpha_0+\varepsilon_3-u]}\frac{[\varepsilon_2-\varepsilon_4][\alpha_0+\varepsilon_3-\varepsilon_4]}{[\alpha_0+\varepsilon_2-\varepsilon_4][\varepsilon_3-\varepsilon_4]}, \end{aligned}\tag{5.14}$$

とおくと, $(x(u):y(u):1)$ $(u\in\mathbb{C})$ なるパラメータ付けで $\mathbb{P}^2$ 内の楕円曲線 (3 次曲線) C が定まる. 一般の 9 点配置 $p_1,\dots,p_9$ に対して, その 9 点を通る 3 次曲線をこのようにパラメータ付け, $p_j=(x(\varepsilon_j):y(\varepsilon_j):1)$ $(j=1,\dots,9)$ で, p_j にパラメータ ε_j を対応させれば, 上記の (5.13) から, ルート α_6 方向の **楕円差分 Painevé** 方程式が得られる.

5.2 楕円超幾何函数解

今 $[\alpha_8]=0$ として, 点のパラメータを Weyl 群の鏡映面上にとる. $\alpha_8=\varepsilon_8-\varepsilon_9$ なので, 点配置としては, p_8 と p_9 が重なる極限に対応する. このような場合には, 楕円差分 Painlevé は, 2 階の線型差分方程式に帰着される解 (Riccati 型の解) をもち, その線型差分方程式を経由して, V 型の超幾何級数 ${}_{12}V_{11}$ で表される特殊解が得られる.

先ほど見た T_{α_6} の楕円差分方程式の場合, 線型化方程式は次のようになる. (x を従属変数とみて, 2 階の差分方程式を作り, あるゲージ変換を行ったもの Φ について)

$$\begin{aligned} &\frac{[\varepsilon_{79}][\varepsilon_{799}][\varepsilon_{799}+\delta]\prod_{i=1}^{5}[\varepsilon_{i69}]}{[\varepsilon_{76}][\varepsilon_{76}+\delta]}(T_{\alpha_6}\Phi-\Phi)\\ &\quad+\frac{[\varepsilon_{69}][\varepsilon_{699}][\varepsilon_{699}+\delta]\prod_{i=1}^{5}[\varepsilon_{i79}]}{[\varepsilon_{67}][\varepsilon_{67}+\delta]}(T_{\alpha_6}^{-1}\Phi-\Phi)=-[\varepsilon_{679}]\prod_{i=1}^{5}[\varepsilon_{i9}]\,\Phi \end{aligned}\tag{5.15}$$

$(\varepsilon_{ij}=\varepsilon_i-\varepsilon_j,\ \varepsilon_{ijk}=\varepsilon_0-\varepsilon_i-\varepsilon_j-\varepsilon_k.)$ ここで, 新しい変数

$$u_0=\varepsilon_0-3\varepsilon_9-\delta,\quad u_i=\varepsilon_i-\varepsilon_9\quad(i=1,2,\dots,7)\tag{5.16}$$

を導入すると, $u_1+\cdots+u_7=2\delta+3u_0$ であって, この変数 $u=(u_0;u_1,\dots,u_7)$ について $\Phi=\Phi(u)$

の方程式は次のようになる: パラメータの平衡条件 $u_1+\cdots+u_7=2\delta+3u_0$ の下で

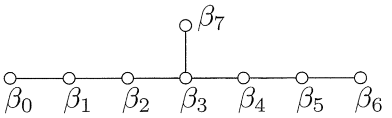
$$
\begin{aligned}
&\frac{[u_7][u_0-u_7][\delta+u_0-u_7]\prod_{i=1}^{5}[\delta+u_0-u_i-u_6]}{[u_7-u_6][u_7-u_6+\delta]}(T_{u_6}^{-1}T_{u_7}-1)\Phi(u)\\
&+\frac{[u_6][u_0-u_6][\delta+u_0-u_6]\prod_{i=1}^{5}[\delta+u_0-u_i-u_7]}{[u_6-u_7][u_6-u_7+\delta]}(T_{u_6}T_{u_7}^{-1}-1)\Phi(u)\\
&=[u_6+u_7-u_0-\delta]\prod_{i=1}^{5}[u_i]\,\Phi(u). \qquad (5.17)
\end{aligned}
$$

$\Phi(u)=\Phi(u_0;u_1,\ldots,u_7)$ に対するこの 2 階の差分方程式が, **楕円差分超幾何方程式** である. 実際, $u_1,\ldots,u_7$ の何れかが $u_i=-N\delta$ $(N\in\mathbb{N})$ となる場合には, この方程式は, 次のような ${}_{12}V_{11}$ 型の超幾何級数解をもつ:

$$
{}_{12}V_{11}(u_0;u_1,\ldots,u_7)=\sum_{k=0}^{N}\frac{[u_0+2k\delta]}{[u_0]}\frac{[u_0]_k}{[\delta]_k}\prod_{i=1}^{7}\frac{[u_i]_k}{[\delta+u_0-u_i]_k}. \qquad (5.18)
$$

(${}_{12}V_{11}$ がこの方程式を満たすことは, Riemann 関係式から従う隣接関係式と Bailey の変換公式を組合せて示すことができる.)

もとの変数 $\varepsilon=(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_9)$ は $E_8^{(1)}$ 型の Cartan 部分環 $\mathfrak{h}$ の座標系であった. 前掲の対応関係を通じて, この変数 $u=(u_0,u_1,\ldots,u_7)$ は $E_7^{(1)}$ 型の Cartan 部分環に対応していることが分かる.



$$
\beta_0=\delta+u_0-u_1,\quad \beta_7=\delta+u_0-u_1-u_2-u_3
$$
$$
\beta_i=u_i-u_{i+1}\quad (i=1,\ldots,6) \qquad (5.19)
$$

適当なゲージ因子を乗ずると, ${}_{12}V_{11}$ は有限 Weyl 群 $W(E_7)$ に関して不変となり, $\alpha_0=\beta_7$ に関する鏡映が, 丁度 Bailey 変換に対応している. (幾何学的には標準 Cremona 変換であったもの.)

今は $[\alpha_8]=0$ の場合に楕円超幾何級数で表される解が存在することを述べたが, $[\alpha_8-n\delta]=0$ $(n\in\mathbb{Z})$ の場合には, 楕円超幾何函数を成分とする行列式 (または多重楕円超幾何級数) で表す解も構成することができる.

本稿では, 楕円超幾何函数の最近の進展について, 級数によるアプローチを中心に紹介したが, 積分によるアプローチについては述べることが出来なかった. 楕円超幾何積分とそれに関連する話題については, Spiridonov [12], Rains [10] 等を参照して頂きたい. (終)

参考文献

[1] G. Gasper and M. Rahman: *Basic Hypergeometric Series*, Second Edition, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 96, Cambridge University Press, 2004.

[2] Y. Kajihara and M. Noumi: Elliptic multiple hypergeometric series. An approach from the Cauchy determinant, Indag. Math. **14**(2003), 395–421.

[3] K. Kajiwara, T. Masuda, M. Noumi, Y. Ohta and Y. Yamada: ${}_{10}E_9$ solution to the elliptic Painlevé equation, J. Phys. A. **36**(2003), L263–L272.

[4] K. Kajiwara, T. Masuda, M. Noumi, Y. Ohta and Y. Yamada: Hypergeometric solutions to the q-Painlevé equations, IMRN **2004:47**(2004), 2497–2521.

[5] 梶原健司・増田哲・野海正俊・太田泰広・山田泰彦：Cremona 変換と楕円差分 Painlevé 方程式, 数理解析研究所講究録 **1400**(2004), 197–263.

[6] K. Kajiwara, T. Masuda, M. Noumi, Y. Ohta and Y. Yamada: Construction of hypergeometric solutions to the q-Painlevé equations, IMRN **2005:24**(2005), 1439–1463.

[7] 梶原健司・増田哲・野海正俊・太田泰広・山田泰彦：q-Painlevé 方程式の超幾何解, 数理解析研究所講究録 **1422**(2005), 77–98.

[8] K. Kajiwara, T. Masuda, M. Noumi, Y. Ohta and Y. Yamada: Point configurations, Cremona transformations and the elliptic difference Painlevé equation, *Théories asymptotiques et équations de Painlevé* (Angers, juin 2004), Séminaires et Congrès **14**(2006), 175–204.

[9] R. Koekoek and R.F. Swarttouw: The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue, Delft University of Technology, Department of Technical Mathematics and Informatics, Report no. 98-17, 1998. (http://homepage.tudelft.nl/11r49/askey.html)

[10] E.M. Rains: Recurrences for elliptic hypergeometric integrals, in *Elliptic Integrable Systems* (M. Noumi and K. Takasaki, Eds.), pp. 183–199, Rokko Lectures in Mathematics, Vol. 18, Department of Mathematics, Kobe University.

[11] H. Sakai: Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations, Comm. Math. Phys. **220**(2001), 165–229.

[12] V.P. Spiridonov: Classical elliptic hypergeometric functions and their applications, in *Elliptic Integrable Systems* (M. Noumi and K. Takasaki, Eds.), pp. 253–287, Rokko Lectures in Mathematics, Vol. 18, Department of Mathematics, Kobe University.

[13] E.T. Whittaker, G.N. Watson: *A Course of Modern Analysis. An introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions: with an account of the principal transcendental functions*, Fourth Edition, Cambridge University Press, 1962.