

写像の特異点の分類・双対性・応用

石川 剛郎

(いしかわ・ごうお, Goo Ishikawa)

北海道大学理学研究院・数学部門

「春の野に咲くスマレはただスマレらしく咲いているだけでいい」
岡 潔 先生 (春宵十話)

【写像の特異点】

$N, M : C^\infty$ 多様体, $\dim N = n, \dim M = m$ (e.g. $N = \mathbf{R}^n, M = \mathbf{R}^m$)

$f : N \rightarrow M : C^\infty$ 写像, $a \in N$ とする.

a のまわりの局所座標系 x_1, x_2, \dots, x_n ,

$f(a)$ のまわりの局所座標系 y_1, y_2, \dots, y_m , について,

$$f : y_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad (1 \leq i \leq m)$$

【例】

しずめ込み: $n \geq m, \text{rank} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right) = m \iff \exists x'_1, x'_2, \dots, x'_n$
: a のまわりの局所座標系; $f : y_i = x'_i, (1 \leq i \leq m)$. (“陰関数定理”)

はめ込み: $n \leq m, \text{rank} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right) = n \iff \exists y'_1, y'_2, \dots, y'_m$
 $f(a)$ のまわりの局所座標系; $f : y'_i = x_i, (1 \leq i \leq n), y'_j = 0 (n+1 \leq j \leq m)$

【写像の特異点の定義】

点 $a \in N$ が、写像 $f : N \rightarrow M$ の特異点 (singular point)

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \text{rank} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right) < \min\{n, m\}$$

【写像の特異点の分類】

写像芽^(しやぞうが) f, g が \mathcal{R} - \mathcal{L} -同値 (right-left equivalent)

(Map-germs f and g are “diffeomorphic”)

$$f \sim g \stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{array}{ccc} N, a & \xrightarrow{f} & M, b \\ \exists \cong \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \exists \cong \\ N', a' & \xrightarrow{g} & M', b' \end{array}$$

【特異点の分類における基本的な2つの方法】

- 不変量 (invariant) による方法 ← 内包 (intension)
- 標準形 (normal form) による方法 ← 外延 (extension)

不変量で大きく分類し、標準形で代表元を具体的に表示する。

【例】

不変量：Jacobi 行列の階数

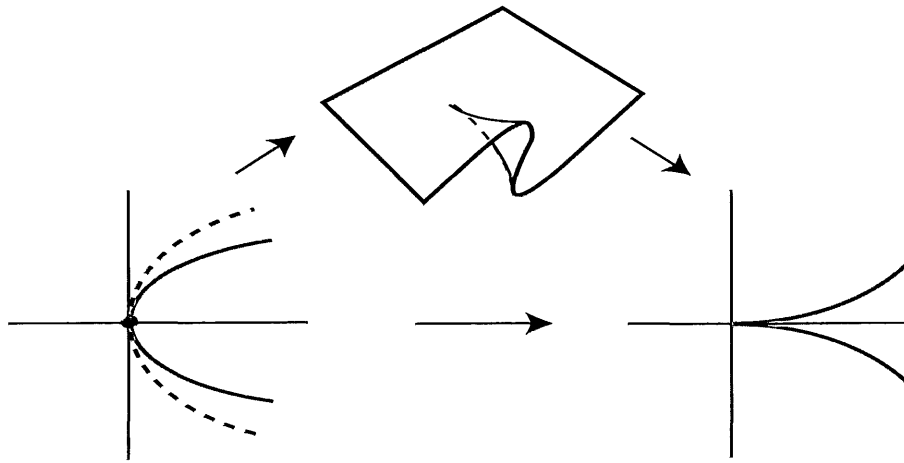
“しずめ込み”の標準形： $(x_1, \dots, x_m, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_m)$

“はめ込み”の標準形： $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$

【例】(構造安定特異点の分類)

$f : N^2 \rightarrow M^2$ が「構造安定」のとき、写像芽 $f_a : (N, a) \rightarrow (M, f(a))$ ($a \in N$) の標準形は、

$(x_1, x_2), (x_1, x_2^2)$: fold, $(x_1, x_2^3 + x_1x_2)$: cusp. (H. Whitney 1955)



【写像の特異点の分類理論の先駆者】

— H.Whitney, R.Thom, J.Mather, 福田拓生,...

【関数の特異点】

$m = 1. f : (\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow \mathbf{R}, y = f(x_1, \dots, x_n).$

特異点 $x = 0$ が f の非退化特異点 ($\stackrel{\text{def}}{\iff} \det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (0) \right) \neq 0$),

$\text{Index} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) = r \implies f \sim -x_1^2 - \dots - x_r^2 + x_{r+1}^2 + \dots + x_n^2$

(Morse の補題)

微分トポロジーへの応用 — 参考文献：ミルナー「モース理論」
吉岡書店

Thom のカタストロフ理論 — 参考文献：トム「形態形成と構造
安定性」岩波書店

【関数の特異点 (つづき)】

“複素化”して、複素解析的なカテゴリーで、“余次元”が有限な
関数芽 $f : (\mathbf{C}^n, 0) \rightarrow \mathbf{C}, y = f(x_1, \dots, x_n)$, の分類を考える. “
モダリティー”という不変量に注目して, “安定 R_+ -同値”につ
いて標準形を求める (V.I.Arnold 1973):

— 0-modal (simple)

$$A_k : f(x_1) = x_1^{k+1}, \quad D_k : f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 + x_2^{k-1} \quad (k \geq 4)$$

$$E_6 : f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^4, \quad E_7 : f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_1 x_2^3,$$

$$E_8 : f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^5.$$

— uni-modal

$$T_{p,q,r} : f(x_1, x_2, x_3) = x_1^p + x_2^q + x_3^r + ax_1 x_2 x_3, \\ \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1, \quad a \neq 0\right),$$

$$T_{3,3,3} : f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + ax_1 x_2 x_3, \quad (a^3 + 27 \neq 0)$$

$$T_{2,4,4} : f(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + x_2^4 + x_3^2 + ax_1^2 x_2^2, \quad (a \neq \pm 2)$$

$$T_{2,3,6} : f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^6 + x_3^2 + ax_1^2 x_2^2, \quad (4a^3 + 27 \neq 0)$$

— uni-modal (cont.)

$$Q_{10} : x_1^2 x_3 + x_2^3 + x_3^4 + ax_2 x_3^3 \quad K_{14} : x_1^3 + x_2^8 + x_3^2 + ax_1 x_2^6$$

$$Q_{11} : x_1^2 x_3 + x_2^3 + x_2 x_3^3 + ax_3^5 \quad Z_{13} : x_1^3 x_2 + x_2^6 + x_3^2 + ax_1 x_2^5$$

$$Z_{11} : x_1^3 x_3 + x_3^5 + x_3^2 + ax_1 x_2^4 \quad K_{13} : x_1^3 + x_1 x_2^5 + x_3^2 + ax_2^8$$

$$S_{11} : x_1^2 x_3 + x_2 x_3^3 + x_3^4 + ax_2^3 x_3 \quad W_{13} : x_1^4 + x_1 x_2^4 + x_3^2 + ax_2^6$$

$$Q_{12} : x_1^2 x_3 + x_2^3 + x_3^5 + ax_2 x_3^4$$

$$S_{12} : x_1^2 x_3 + x_2 x_3^2 + x_1 x_2^3 + ax_3^5$$

$$U_{12} : x_1^3 + x_2^3 + x_3^4 + ax_1 x_2 x_3^2$$

$$Z_{12} : x_1^3 x_2 + x_1 x_2^4 + x_3^2 + ax_2^6$$

$$W_{12} : x_1^4 + x_2^5 + x_3^2 + ax_1^2 x_3$$

$$K_{12} : x_1^3 + x_2^7 + x_3^2 + ax_1 x_2^5$$

Arnold の研究とは独立に,

— 齋藤恭司, Einfach-elliptische Singularitäten, Invent math. (1974).

→ Flat coordinates, Frobenius structures, etc...

● 自然科学を2つに分類するとしたら：

Natural Philosophy (和訳：自然哲学, 物理学)	Natural History (和訳：自然史, 博物学, 本草学)
--------------------------------------	---------------------------------------

特異点の分類における2つの方法：

不変量による方法, 標準形による方法

Natural Philosophy：たくさんの例をまとめることに貢献する研究

Natural History：たくさんの例を見つけることに貢献する研究

不変量の研究は自然哲学 標準形の研究は自然史

自然哲学だけでなく、自然史の研究も紹介します。

【関数の普遍開折理論】

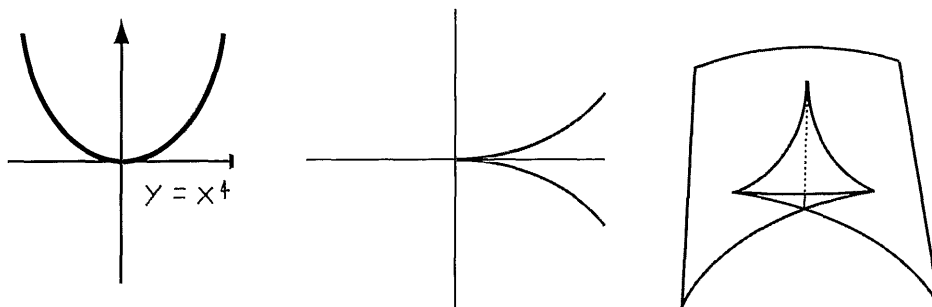
$f : (\mathbf{R}, 0) \rightarrow (\mathbf{R}, 0), f(t) = t^4$: 退化した特異点 (A_3 -型) について,

$$F(t, x_1, x_2) = t^4 + x_1 t^2 + x_2 t$$

は, $f(t) = t^4$ の \mathcal{R}_+ -普遍開折 (universal unfolding, 退化した特異点の摂動をもれなく記述).

$$G(t, x_1, x_2, x_3) = t^4 + x_1 t^2 + x_2 t + x_3$$

は, $f(t) = t^4$ の \mathcal{K} -普遍開折.



【 Lagrange 特異点の研究への応用 】

$T^*\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{2n}$: \mathbf{R}^n の cotangent bundle, 座標 $x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$.

$\omega = dp_1 \wedge dx_1 + \dots + dp_n \wedge dx_n$: シンプレクティック形式

$L \subset T^*\mathbf{R}^n$ が Lagrange 部分多様体 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ L は n 次元部分多様体で, $\omega|_L = 0$.

【 例 】.

\mathbf{R}^n 上の C^∞ 関数 $y = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ に対して,

$$L = \left\{ (x, p) \in T^*\mathbf{R}^n \mid p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), 1 \leq i \leq n \right\}$$

は Lagrange 多様体.

実際 $\omega|_L = d(\sum_{i=1}^n p_i dx_i|_L) = d(df) = 0$.

射影 $\pi : T^*\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, $\pi(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = (x_1, \dots, x_n)$ について, 制限写像 $\pi|_L : L \rightarrow \mathbf{R}^n$ の特異点を Lagrange 特異点とよぶ. (\rightarrow 多価性, 分岐の解析等への応用)

【 例 】.

$L = \{(\lambda_1, \lambda_2, p_1, p_2) = (\lambda, t^3 + \lambda t, \frac{t^2}{2}, -t) \in T^*\mathbf{R}^2 \mid (\lambda, t) \in \mathbf{R}^2\}$ は Lagrange 部分多様体. $\pi|_L : L \rightarrow \mathbf{R}^2$ は カスプ写像芽 $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2^3 + x_1 x_2)$ と \mathcal{R} - \mathcal{L} -同値.

【 定義 】

Lagrange 部分多様体 $L, L' \subset T^*\mathbf{R}^n$, 射影 $\pi : T^*\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ について, $\pi|_L$ と $\pi|_{L'}$ が Lagrange 同値 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ π -ファイバーを保存するシンプレクティック微分同相写像 $\Sigma : T^*\mathbf{R}^n \rightarrow T^*\mathbf{R}^n$ が存在して, $\Sigma(L) = L'$.

$\pi|_L$ と $\pi|_{L'}$ が Lagrange 同値 $\implies \pi|_L = \pi|_{L'}$ が \mathcal{R} - \mathcal{L} -同値

【定義】

$\pi(L)$ の特異値全体の集合 $C_L \subset \mathbf{R}^n$ を L のコースティック (焦点集合) とよぶ.

$\pi|_L$ と $\pi|_{L'}$ が Lagrange 同値 $\implies C_L$ と $C_{L'}$ が微分同相

関数の特異点の分類理論 $\xrightarrow{\text{応用}}$ 関数の開折理論
 $\xrightarrow{\text{応用}}$ Lagrange 特異点の分類理論

●関数族 $F(t, x) : \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ が Morse 族

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 関数の特異点の軌跡 $C(F) := \left\{ \frac{\partial F}{\partial t_1} = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial t_k} = 0 \right\} \subset \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^n$ が n 次元部分多様体で, しかも, $\left(\frac{\partial F}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial t_k} \right) : \mathbf{R}^{k+n} \rightarrow \mathbf{R}^k$ が $C(F)$ 上に特異点を持たない. (関数の非退化性を, 関数族に対して一般化した概念)

$F(t, x)$ が Morse 族ならば,

$L = \left\{ (x, p) \in T^*\mathbf{R}^n \mid p_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x) \text{ for some } (t, x) \in C(F) \right\}$

はラグランジュ部分多様体.

すべてのラグランジュ部分多様体は, 局所的にこの構成から得られる. (母関数とよばれる).

コースティック $C_L =$ 母関数 $F(t, x)$ の 分岐集合

分岐集合: $F(x, \lambda)$ が退化特異点を持つようなパラメータ λ の集合. 言い換えると, $\pi_1|_{C(F)} : C(F) \rightarrow \mathbf{R}^n$ の特異値の集合. (← 標準形があれば調べられる.)

【 Legendre 特異点の研究への応用 】

$J^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}) = \mathbf{R}^{2n+1} : \mathbf{R}^n$ 上の関数の 1-ジェット空間,

座標 $x_1, \dots, x_n, y, p_1, \dots, p_n$.

接触形式 $\alpha = dy - (p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n)$.

$\tilde{L} \subset J^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ が Legendre 部分多様体 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \tilde{L}$ は n 次元部分多様体で, $\alpha|_{\tilde{L}} = 0$.

【 例 】.

\mathbf{R}^n 上の C^∞ 関数 $y = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ に対して,

$$\tilde{L} = \left\{ (x, y, p) \in T^*\mathbf{R}^n \mid y = f(x), p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), 1 \leq i \leq n \right\}$$

は Legendre 部分多様体.

射影 $\pi : J^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$, $\pi(x, y, p) = (x, y)$ について, 制限写像 $\pi|_{\tilde{L}} : \tilde{L} \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ の特異点を Legendre 特異点, 像 $\pi(\tilde{L}) \subset \mathbf{R}^{n+1}$ を波面集合 (wave front) とよぶ.

(波面集合は, \mathbf{R}^{n+1} の超曲面となり, 関数のグラフの一般化と見なすことができる)

参考文献：泉屋周一，石川剛郎「応用特異点論」共立出版.

“博物（はくぶつ）”とは何か？

博物の博は博覧強記の博？

理 \leftrightarrow 博？ 哲 \leftrightarrow 史？

博物 \rightarrow 博物館 = museum \leftarrow muse (物思いにふける)
 \leftarrow amuse (楽しませる) \rightarrow amusement = 娯楽

特異点論は、多分に写像の特異点の博物学を作ることを目指している、と考えている。

ちなみに、Arnold は「数学は、流行から遅れた物理の一分野」と言っている。

【 幾何構造にかかわる特異点の分類問題 】

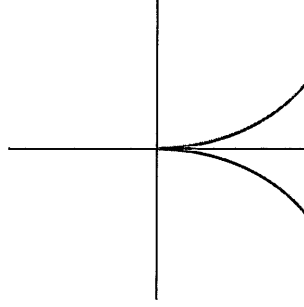
- Lagrange 特異部分多様体 $(\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow T^*\mathbf{R}^n$ の分類理論
- $(n = 1)$ 平面曲線 $(\mathbf{R}, 0) \rightarrow \mathbf{R}^2 = T^*\mathbf{R}$ の特異点の分類, “Zariski の問題”への応用, Bruce-Gaffney の結果の拡張, (S.Janeczko-I).
- Legendre 特異部分多様体 $(\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow J^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}) = \mathbf{R}^{2n+1}$ の分類理論
- $(n = 1)$ Legendre 曲線 $(\mathbf{R}, 0) \rightarrow \mathbf{R}^3 = J^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ の分類 (P.Mormul-I), “Legendre-Goursat duality”, differential system の分類問題への応用. (Zhitomirskii, Montgomery, Mormul, ...)
- 可展面 (developable surface) の特異点の分類, Monge-Ampère 方程式の解の特異点の分類・射影双対性
- 接触構造と共形構造の双対性, contact-cone Legendre-null 双対性

【 例 】.

パラメータ付けられた平面曲線 $c : (\mathbf{R}, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^2, 0)$ $c(t) = (x_1(t), x_2(t))$ について,

$c'(0) = (0, 0)$ かつ $c''(0), c'''(0)$ が一次独立 $\implies c \sim (t^2, t^3)$.
(平面曲線の A_2 形特異点)

実はシンプレクティック微分同相写像で同値 (シンプレクティック同値).



$c_1, c_2 : (\mathbf{R}, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^2, 0)$, c_1 と c_2 が “シンプレクティック同値”
 $\implies c_1$ と c_2 が可微分同値 (RL -同値).

【 0-modal, unimodal $(\mathbf{C}, 0) \rightarrow (\mathbf{C}^2, 0)$ の RL -分類 】 (Janeczko-I, 2006–2010)

$$\begin{aligned}
 A_{2\ell} &: (t^2, t^{2\ell+1}), \quad (\ell = 1, 2, 3, \dots), \\
 E_{6\ell} &: (t^3, t^{3\ell+1} + t^{3(\ell+p)+2}), \quad (0 \leq p \leq \ell - 2), \quad (t^3, t^{3\ell+1}), \\
 E_{6\ell+2} &: (t^3, t^{3\ell+2} + t^{3(\ell+p)+4}), \quad (0 \leq p \leq \ell - 2), \quad (t^3, t^{3\ell+2}), \\
 W_{12} &: (t^4, t^5 + t^7), \quad (t^4, t^5), \\
 W_{18} &: (t^4, t^7 + t^9), \quad (t^4, t^7 + t^{13}), \quad (t^4, t^7), \\
 W_{1,2\ell-1}^\# &: (t^4, t^6 + t^{2\ell+5}), \\
 N_{20} &: (t^5, t^6 + t^8 + at^9) \quad (-a \sim a), \quad (t^5, t^6 + t^9), \quad (t^5, t^6 + t^{14}), \quad (t^5, t^6), \\
 N_{24} &: (t^5, t^7 + t^8 + at^{11}), \quad (t^5, t^7 + t^{11} + at^{13}) \quad (-a \sim a), \\
 &: (t^5, t^7 + t^{13}), \quad (t^5, t^7 + t^{18}), \quad (t^5, t^7), \\
 N_{28} &: (t^5, t^8 + t^9 + at^{12}), \quad (t^5, t^8 + t^{12} + at^{14}) \quad (-a \sim a), \\
 &: (t^5, t^8 + t^{14} + at^{17}) \quad (-a \sim a), \quad (t^5, t^8 + t^{17}), \quad (t^5, t^8 + t^{22}), \quad (t^5, t^8), \\
 W_{24} &: (t^4, t^9 + t^{10} + at^{11}) \quad (a \neq \frac{19}{18}), \quad (t^4, t^9 + t^{10} + \frac{19}{18}t^{11} + at^{15}), \\
 &: (t^4, t^9 + t^{11}), \quad (t^4, t^9 + t^{15}), \quad (t^4, t^9 + t^{19}), \quad (t^4, t^9), \\
 W_{30} &: (t^4, t^{11} + t^{13} + at^{14}) \quad (-a \sim a), \quad (t^4, t^{11} + t^{14} + at^{17}) \quad (a \neq \frac{25}{22}), \\
 &: (t^4, t^{11} + t^{14} + \frac{25}{22}t^{17} + at^{21}) \quad (\omega a \sim a, \omega^3 = 1), \\
 &: (t^4, t^{11} + t^{17}), \quad (t^4, t^{11} + t^{21}), \quad (t^4, t^{11} + t^{25}), \quad (t^4, t^{11}), \\
 W_{2,2\ell-1}^\# &: (t^4, t^{10} + t^{2\ell+9} + at^{2\ell+11}) \quad (\omega a \sim a, \omega^{2\ell-1} = 1) \quad (\ell = 1, 2, 3, \dots).
 \end{aligned}$$

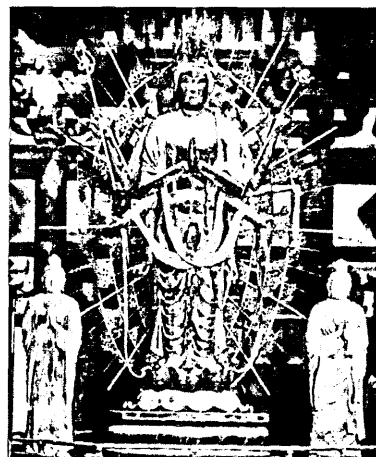
【双対性 (duality) とは何か？】

日光菩薩と月光菩薩（東大寺三月堂）

双対性は、物事の説明の基本的方法の一つ。

例. この2枚の写真はそっくりだ. なぜなら鏡に写しただけだから.

例. A君とB君は似ている. なぜなら双子だから. 等



対称性と双対性は異なる概念.

射影双対性 (projective duality) は対称的.

後ほど説明する “contact-cone Legendre-null 双対性” は対称的でない双対性.

【射影双対性】

$\mathbf{R}P^{n+1} = P(\mathbf{R}^{n+2})$ を $(n+1)$ -次元射影空間とする.

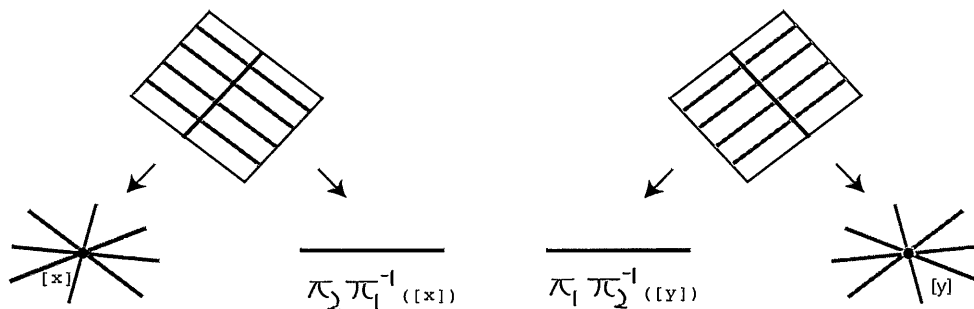
「射影双対」は, incidence 多様体

$$I^{2n+1} = \mathcal{F}_{1,n+1} = \{([x], [y]) \in \mathbf{R}P^{n+1} \times \mathbf{R}P^{n+1*} \mid x \cdot y = 0\}$$

($2n+1$ 次元多様体) と, ダブル・ファイブレーション

$$\mathbf{R}P^{n+1} \xleftarrow{\pi_1} \mathcal{F}_{1,n+1} \xrightarrow{\pi_2} \mathbf{R}P^{n+1*}$$

によって与えられる. ($\mathbf{R}P^{n+1*} = P(\mathbf{R}^{n+2*})$ は双対射影空間).



【接触幾何，ルジャンドル特異点論の応用】

I^{2n+1} は $(2n+1)$ 次元多様体であり，自然に， $\mathbf{R}P^{n+1}$ 上の“接触要素”の全体 $PT^*\mathbf{R}P^{n+1}$ ，あるいは $\mathbf{R}P^{n+1*}$ 上の接触要素の全体 $PT^*\mathbf{R}P^{n+1*}$ ，と同一視され，接触構造

$$D = \{x \cdot dy = 0\} = \{dx \cdot y = 0\} \subset T(I^{2n+1})$$

を持つ。

局所的には，ダブル・ルジャンドル・ファイブレーション

$$\mathbf{R}^{n+1} \xleftarrow{(x,y) \leftarrow (x,y,p)} \mathbf{R}^{2n+1} \xrightarrow{(x,y,p) \rightarrow (x \cdot p - y, p)} \mathbf{R}^{n+1}$$

と同型.)

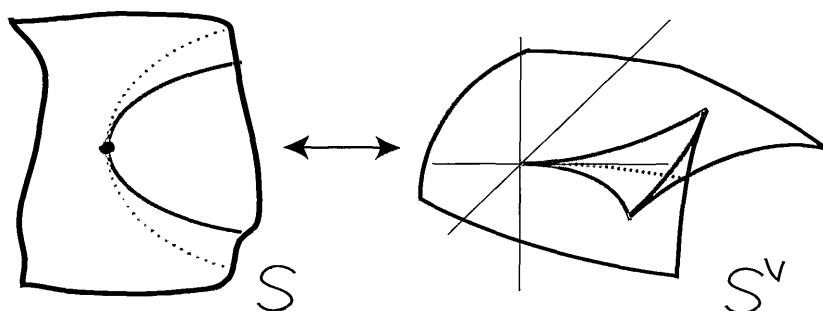
n 次元部分多様体 $S^n \subset \mathbf{R}P^{n+1}$ に対して，Legendre 持ち上げ

$$\tilde{S} := \{([x], [y]) \in I^{2n+1} \mid [x] \in S, \\ [y] \text{ は } [x] \text{ における } S \text{ の接平面を与える}\}$$

が一意的に定まり，波面集合 $S^\vee = \pi_2(\tilde{S})$ は S の dual variety を与える. (S の各接平面を $\mathbf{R}P^{n+1*}$ の点と見たときの，それらが S に沿って描く軌跡).

【例】.

$S \subset \mathbf{R}P^3$ を”generic”な曲面 (2次元部分多様体) とする. S の dual variety S^\vee に現れる特異点は, A_2 型特異点 (cuspidal edge) または A_3 型特異点 (swallowtail) に限る.



【可展面】

曲面のうち, “接平面の動きが退化する”曲面を考える. $S \subset \mathbf{R}P^3$ が可展面 (developable surface) $\stackrel{\text{def}}{\iff} \text{rank}(\pi_2|_{\tilde{M}}) \leq 1$.

● Euclid 空間内の曲面 $S \subset \mathbf{R}^3 (\subset \mathbf{R}P^3)$ が可展面 \iff 局所的に平面と等長的 (平坦曲面).

【定理】.

$S \subset \mathbf{R}P^3$ をコンパクトで特異点のない曲面とする.

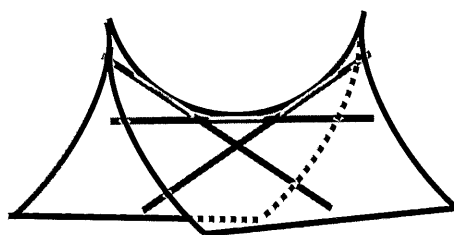
S が可展面ならば, S は射影平面に限る.

(森本徹-I, Diff.Geom.Appl. 2001, 一般化, Monge-Ampère 方程式の大域的モデルとの関係)

— 射影平面でないコンパクトな可展曲面には必ず特異点が生じる.

【接線曲面の特異点】

可展面の例. (接線曲面, tangent surface, tangent developable)
空間曲線の接線の作る線織面 (ruled surface).



接線曲面は, 曲線の型 (type) とよばれる 射影不変量によって記述される.

整数の列 $1 \leq a_1 < a_2 < a_3$ について,

$c: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}P^3$ が $t = t_0 \in \mathbf{R}$ で型 (a_1, a_2, a_3) を持つ

$\stackrel{\text{def}}{\iff} c(t_0)$ を中心とした或る局所射影座標 x_1, x_2, x_3 について,

$$c: \begin{cases} x_1(t) = (t - t_0)^{a_1} + O((t - t_0)^{a_1}), \\ x_2(t) = (t - t_0)^{a_2} + O((t - t_0)^{a_2}), \\ x_3(t) = (t - t_0)^{a_3} + O((t - t_0)^{a_3}). \end{cases}$$

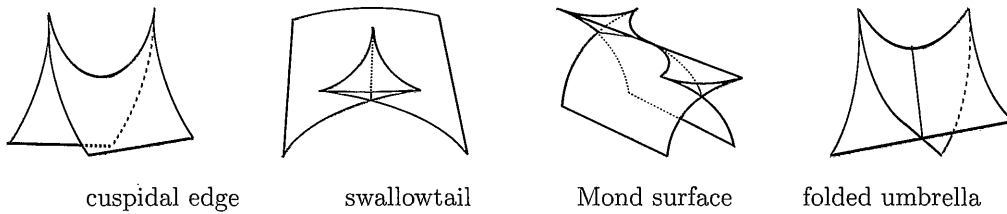
【例】.

$(a_1, a_2, a_3) = (1, 2, 3)$ のとき, 接線曲面は, カस्प縁 (A_2 型),

$(2, 3, 4)$ のとき, 接線曲面は, 燕尾形 (A_3 型),

$(1, 3, 4)$ のとき, 接線曲面は, モンド曲面 (Mond surface).

$(1, 2, 4)$ のとき, 接線曲面は, 閉じた笠 (folded umbrella) (folded umbrella は Legendre 持ち上げ自体が特異点を持つ. 特異ルジャンドル部分多様体.)

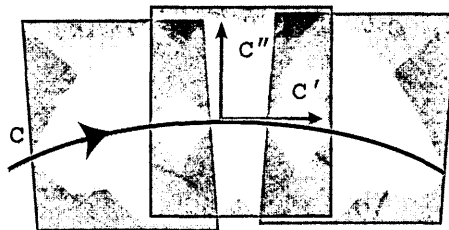


【双対曲線】

有限型曲線 $c: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}P^3$ について、各点で接触平面が定まる。

【例】.

$c'(t_0), c''(t_0)$ が 1 次独立 ($a_1 = 1, a_2 = 2$ の型) のとき、 $c'(t_0), c''(t_0)$ の張る平面が接触平面。



$c: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}P^3$ に沿って接触平面の作る $\mathbf{R}P^{3*}$ における曲線 $c^*: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}P^{3*}$ を c の 双対曲線 (dual curve) とよぶ。

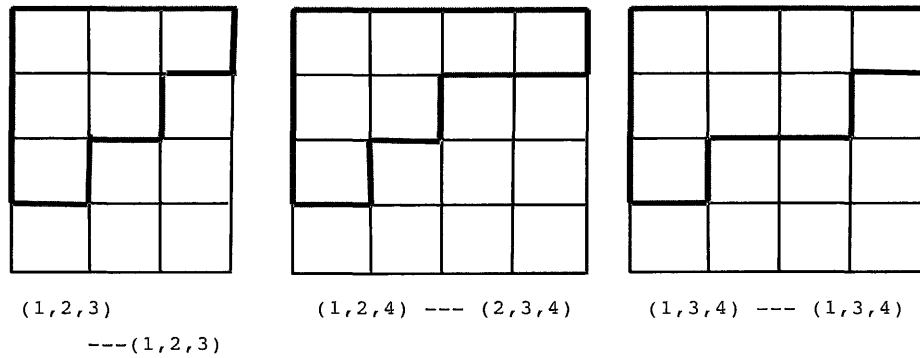
● 双対定理 $c^{**} = c$ が成り立つ。

● 双対公式 (Arnold, Scherbak)

曲線 c の $t = t_0$ における型が (a_1, a_2, a_3) のとき、 c^* の型は

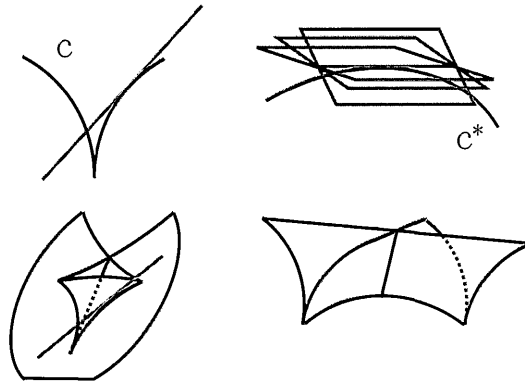
$$(b_1, b_2, b_3) = (a_3 - a_2, a_3 - a_1, a_3)$$

で与えられる。



【接線曲面の双対性】

c の接線曲面は, c^* の接平面の作る軌跡 (c^* の双対曲面),
 c^* の接線曲面は, c の接平面の作る軌跡 (c の双対曲面),



cuspidal edge は射影自己双対, swallowtail と folded umbrella
 は射影双対, Mond surface は射影自己双対.

【境界付き曲面の射影双対】

境界付き曲面 $(S, \gamma) \subset \mathbf{R}P^3$ は, 5次元接触多様体 $I^5 \subset \mathbf{R}P^3 \times \mathbf{R}P^{3*}$ 中の曲面に持ち上げられる:

$$L := \{([x], [y]) \in \mathbf{R}P^3 \times \mathbf{R}P^{3*} \mid [x] \in S, [y] \text{ determines } T_{[x]}S \text{ as a projective plane}\}.$$

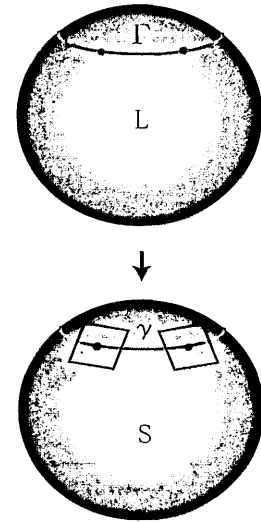
$$\Gamma := \{([x], [y]) \in L \mid [x] \in \gamma\} = \partial L.$$

L は接触構造の Legendre 曲面 (D -積分曲面)

Γ は D -積分曲線

$$T\Gamma \subset TL \subset D \subset T(PT^*\mathbf{R}P^3).$$

(L, Γ) は (S, γ) の一意的な Legendre リフト.



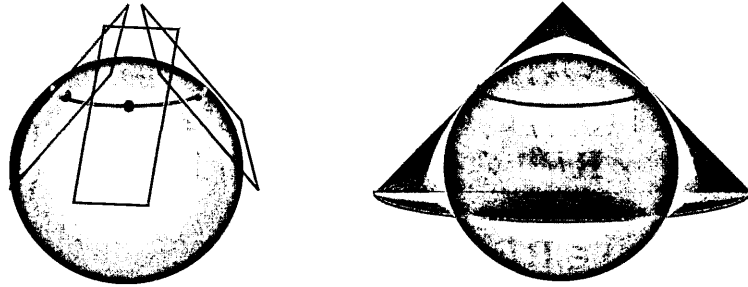
$$\begin{array}{ccccc} (L, \Gamma) \subset & PT^*\mathbf{R}P^3 & = & M^5 & = & PT^*\mathbf{R}P^{3*} \\ \downarrow & & \downarrow \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \downarrow & \\ (S, \gamma) \subset & \mathbf{R}P^3 & & & \mathbf{R}P^{3*} & \end{array}$$

【曲面の平坦拡張問題への応用】

問題: 3次元ユークリッド空間内 E^3 の境界付き C^∞ 曲面 (S, γ) に対し, C^1 -平坦拡張 \tilde{S} of S を求めよ. (つまり, 拡張部分 $S' = \tilde{S} \setminus \text{Int}S$ が C^∞ -平坦曲面, i.e. 局所的に平面と等長的)

幾何的方法:

- 境界 γ に沿って S の接平面の作る 1-パラメータ族を考える
- その平面族の“包絡面” $E(\gamma)$ を求める (境界包絡面, boundary envelope).



境界上の点 $p \in \gamma = \partial S$ について, 曲面 S の接平面 $T_p S$ と空間曲線 γ の p における接触平面が定まる. それらが一致するとき, 点 p を “接触平面接触点”(osculating-tangent point) とよぶ.

定理. (Diff. Geom. Appl. **28** (2010), 341–354.)

[ジェネリック平坦拡張問題の解].

E^3 内のジェネリックな C^∞ 曲面 (S, γ) が $p \in \gamma$ を超えて局所的, 一意的な C^1 平坦拡張 \tilde{S} を持つための必要十分条件は, p が osculating-tangent point でないことである.

単位法束 $T_1 E^3 = \{(x, v) \mid x \in E^3, v \in T_x E, \|v\| = 1\}$,

接触構造 $\{v dx = 0\} \subset T(T_1 E^3)$.

E^3 の境界付き曲面 (S, γ) は, 境界のついたルジャンドル曲面 (L, Γ) に一意的に持ち上げられる: $\pi_1(L) = S, \pi_1(\Gamma) = \gamma$.

$$\begin{array}{ccc}
 PT^*\mathbf{R}P^3 & \xleftarrow{\rho} & T_1(E^3) \\
 & \pi_1 \swarrow & \searrow \pi_2 \\
 \mathbf{R}P^3 \supset E^3 & & \mathbf{R} \times S^2 \xrightarrow{\varphi} \mathbf{R}P^{3*}
 \end{array}$$

$\pi_1([1, x], [-x \cdot y, y]) = [1, x], \pi_2([1, x], [-x \cdot y, y]) = [-x \cdot y, y]$

$\hat{\gamma} := \pi_2(\Gamma) \subset \mathbf{R}P^{3*}$ を γ のフレーム双対 (frame dual) と呼ぶ.

フレーム双対 $\hat{\gamma}$ の双対曲面 $(\hat{\gamma})^\vee$ と双対曲線 $(\hat{\gamma})^*(\subset \hat{\gamma}^\vee)$ が $\mathbf{R}P^3$ の中に得られる:

- $(\hat{\gamma})^\vee$ は $\hat{\gamma}$ の接平面 ($\in \mathbf{R}P^3$) の作る軌跡.
- $(\hat{\gamma})^*$ は $\hat{\gamma}$ の接触平面 ($\in \mathbf{R}P^3$) の作る軌跡.

定理. ジェネリック曲面 (S, γ) の境界包絡面はフレーム双対 $\hat{\gamma}$ の双対曲面 $(\hat{\gamma})^\vee$ に一致する.
境界包絡面の特異点集合はフレーム双対 $\hat{\gamma}$ 双対曲線 $(\hat{\gamma})^*$ に一致する.

- 問題: フレーム双対 $\hat{\gamma}$ は, 曲線 γ のフレミングに応じて, どのような特異点を持つか?

定理. ジェネリックな D -積分曲線 $\Gamma: I \rightarrow \mathcal{F}_{1,n+1}$ に対して, 曲線 $\gamma = \pi_1 \circ \Gamma$ の型と曲線 $\hat{\gamma} = \pi_2 \circ \Gamma$ の型は, I の任意の点に対して,
 $(1, 2, \dots, n, n+1)$ または $(1, 2, \dots, n, n+2)$ で与えられる.
とくに, $n=2$ については, $(1, 2, 3)$ または $(1, 2, 4)$ で与えられる.

定理. (境界包絡面の特異点の分類) フレーム双対 $\hat{\gamma}$ の型が $(1, 2, \dots, n, n+1)$ のとき, その双対曲面 $(\hat{\gamma})^\vee$ の特異点は A_n 型, $(1, 2, \dots, n, n+2)$ のとき, A_{n+1} 型.
特に, ジェネリックな境界包絡面の特異点は, カスプ縁 (A_2 型) または 燕尾形 (A_3 型) で尽される.

最後に, ごく最近の結果の紹介をします. ある種の双対性から特異点の分類を行いました.

【 Contact-cone Legendre-null duality 】

(V^4, Ω) を 4次元シンプレクティックベクトル空間,

Ω をシンプレクティック形式とする.

Lagrange 旗多様体:

$$\mathcal{F}_{1,2}^{\text{Lag}} := \{(\ell, L) \mid \ell \subset L \subset V, \ell : \text{直線}, L : \text{Lagrange 平面}\},$$

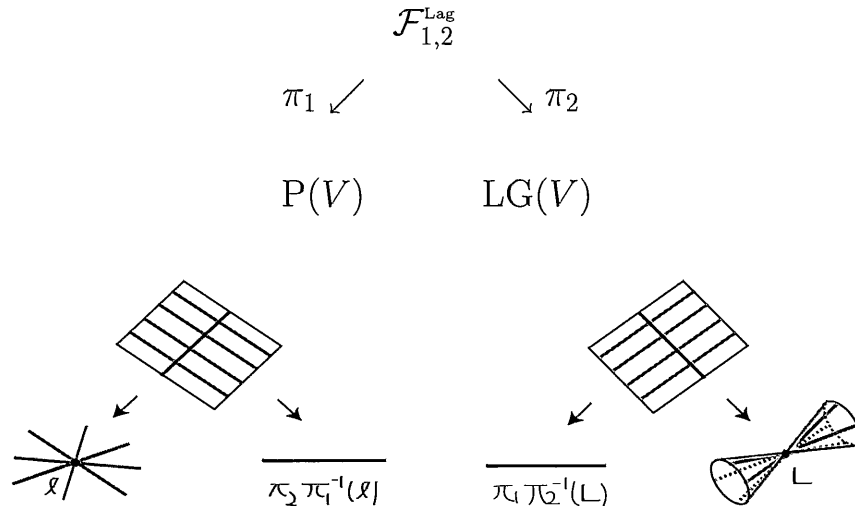
3-次元実射影空間:

$$P(V) = \text{Gr}(1, V) := \{\ell \subset V \mid \ell : \text{直線}\},$$

Lagrange Grassmann 多様体:

$$\text{LG}(V) := \{L \subset V \mid L : \text{Lagrange 平面}\}$$

とする.



【接触構造と錐 (共形) 構造】

$P(V)$ は自然な 接触構造を持つ: $\mathcal{D} \subset TP(V)$, $\ell \in P(V)$,

$$\mathcal{D}_\ell := T_\ell(\pi_1 \pi_2^{-1} \pi_2 \pi_1^{-1}(\ell)) = T_\ell P(\ell^{\text{skew}}) \subset T_\ell P(V).$$

$\text{LG}(V)$ は (1, 2) 型の非定値 共形構造を持つ:

零錐 (null cone) $\mathcal{C} \subset TLG(V)$ が $L \in \text{LG}(V)$ について,

$$\mathcal{C}_L := \text{Tangent Cone}_L(\pi_2 \pi_1^{-1} \pi_1 \pi_2^{-1}(L))$$

で定まる。ただし,

$$\pi_2\pi_1^{-1}\pi_1\pi_2^{-1}(L) = \{L' \in LG(V) \mid L' \cap L \neq \{0\}\}$$

は Schubert ヴァライティ。

【 Engel 構造 】

Lagrange 旗多様体 $\mathcal{F}_{1,2}^{\text{Lag}}$ は Engel 構造 $\mathcal{E} \subset T\mathcal{F}_{1,2}^{\text{Lag}}$ を持つ: $(\ell, L) \in \mathcal{F}_{1,2}^{\text{Lag}}$ について,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{(\ell,L)} &:= T_{(\ell,L)}(\pi_2^{-1}\pi_2\pi_1^{-1}(\ell)) = T_{(\ell,L)}(\pi_1^{-1}\pi_1\pi_2^{-1}(\ell)) \\ &= \text{Ker}(\pi_1)_* \oplus \text{Ker}(\pi_2)_*. \end{aligned}$$

言い換えると

$$v \in T\mathcal{F}_{1,2}^{\text{Lag}}, \quad v \in \mathcal{E}_{(\ell,L)} \iff \pi_{1*}(v) \in TP(L) \subset TP(V).$$

導来系 $\mathcal{E}^2 := \mathcal{E} + [\mathcal{E}, \mathcal{E}]$ は, 接触構造 \mathcal{D} の引き戻し $\pi_1^*\mathcal{D}$ に等しい。

$I \subset \mathbf{R}$ を開区間とする。

C^∞ 曲線 $f: I \rightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{E})$ が Engel 積分曲線とは

$f_*(TI) \subset \mathcal{E} (\subset T\mathcal{F})$ のときに言う。

C^∞ 曲線 $g: I \rightarrow (P(V), \mathcal{D})$ が Legendre 曲線とは

$g_*(TI) \subset \mathcal{D} (\subset TP(V))$ のときに言う。

C^∞ 曲線 $h: I \rightarrow (LG(V), \mathcal{C})$ が ヌル曲線とは

$h_*(TI) \subset \mathcal{C} (\subset TLG(V))$ のときに言う。

● $f: I \rightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{E})$ が Engel 積分曲線 \implies

$\pi_1 \circ f: I \rightarrow (P(V), \mathcal{D})$ は Legendre 曲線.

$\pi_2 \circ f: I \rightarrow (LG(V), \mathcal{C})$ はヌル曲線.

【 射影構造と曲線のタイプ 】

$M: m$ -次元 C^∞ 多様体, $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$, $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbf{R}^m$

:チャート, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ が 1 次有理式:
 $(x_1, \dots, x_m) \mapsto \left(\frac{a_j^0 + \sum_i a_j^i x_i}{a_0^0 + \sum_i a_0^i x_i} \right)_{1 \leq j \leq m}$.

自然数の列 $1 \leq a_1 < a_2 < a_3$ について,
 曲線 $\gamma : I \rightarrow M$ が $t_0 \in I$ で タイプ $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ を持つとは,
 $\gamma(t_0)$ を中心とする局所射影座標系 (x_1, x_2, \dots, x_m) があって,
 γ が

$$\begin{cases} x_1(t) = (t - t_0)^{a_1} + o((t - t_0)^{a_1}), \\ x_2(t) = (t - t_0)^{a_2} + o((t - t_0)^{a_2}), \\ x_3(t) = (t - t_0)^{a_3} + o((t - t_0)^{a_3}). \end{cases}$$

と表示されるときに言う.

● $P(V), LG(V), \mathcal{F}_{1,2}^{\text{Lag}}$ は, それぞれ射影構造を持ち, 各 π_1 -ファイバー, π_2 -ファイバー, および, それらの π_2 -像, π_1 -像が射影直線となる.

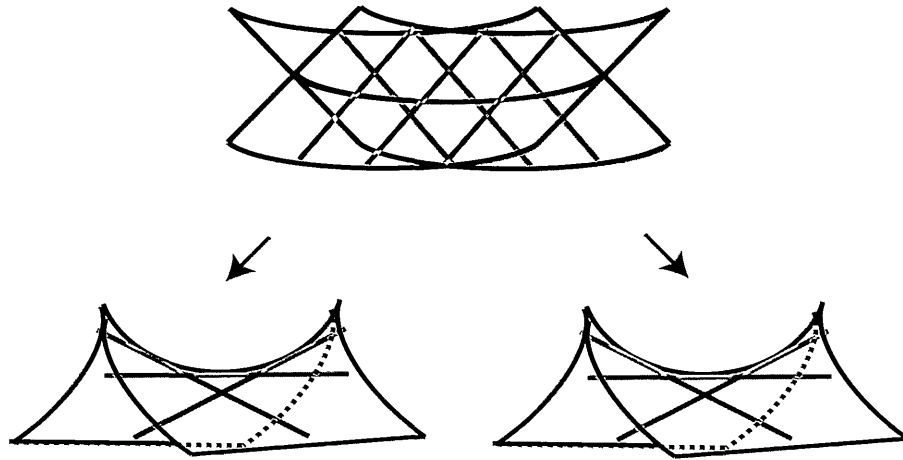
【ルジャンドル曲線とヌル曲線の接線曲面】

射影構造を持つ 3-次元多様体の中の有限型の空間曲線に対し,
 接線曲面 (接線可展面) が定義される.

補題 :

$f : I \rightarrow (\mathcal{F}_{1,2}^{\text{Lag}}, \mathcal{E})$ を Engel 積分曲線とし, $\pi_1 \circ f$ と $\pi_2 \circ f$ がともに有限型曲線とする.

このとき $\pi_1(\pi_2^{-1}(\pi_2(f(I))))$ は曲線 $\pi_1(f(I))$ の接線曲面となり,
 $\pi_2(\pi_1^{-1}(\pi_1(f(I))))$ は曲線 $\pi_2(f(I))$ の接線曲面となる.



Engel 積分曲線のジェット空間 $J_{\mathcal{E}}^r(I, \mathcal{F}_{1,2}^{\text{Lag}})$ が定義できて、
 その中で、

$$\Sigma_{\pi_1, \mathbf{a}} := \{j^r f(t_0) \in J_{\mathcal{E}}^r(I, \mathcal{F}_{1,2}^{\text{Lag}}) \mid \pi_1 \circ f : I \rightarrow \mathbb{P}(V) \text{ is of type } \mathbf{a}\}$$

$$\Sigma_{\pi_2, \mathbf{b}} := \{j^r f(t_0) \in J_{\mathcal{E}}^r(I, \mathcal{F}_{1,2}^{\text{Lag}}) \mid \pi_2 \circ f : I \rightarrow \text{LG}(V) \text{ is of type } \mathbf{b}\}$$

と定める。このとき、次を得る：

補題： [余次元公式 (codimension formula)]

$$\Sigma_{\pi_1, \mathbf{a}} \neq \emptyset \iff a_3 = a_1 + a_2, \quad \text{codim}(\Sigma_{\pi_1, \mathbf{a}}) = a_2 - 2.$$

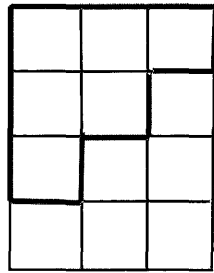
$$\Sigma_{\pi_2, \mathbf{b}} \neq \emptyset \iff b_3 = 2b_2 - b_1, \quad \text{codim}(\Sigma_{\pi_1, \mathbf{a}}) = b_2 - 2.$$

補題： [双対性公式 (duality formula)]

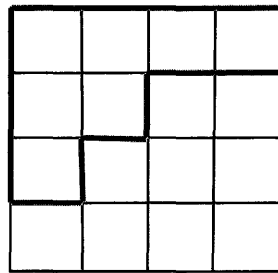
Engel 積分曲線 $f : I \rightarrow \mathcal{F}_{1,2}^{\text{Lag}}$ について、

$\text{type}(\pi_1 \circ f) = \mathbf{a}$ $\text{type}(\pi_2 \circ f) = \mathbf{b}$ ならば

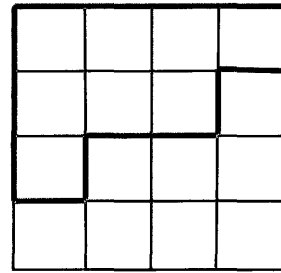
$$(b_1, b_2, b_3) = (a_2 - a_1, a_2, a_3), \quad (a_1, a_2, a_3) = (b_2 - b_1, b_2, b_3).$$



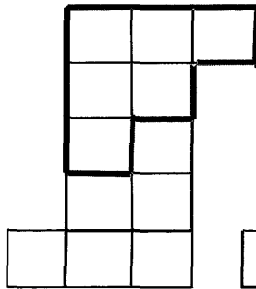
(1,2,3)
---(1,2,3)



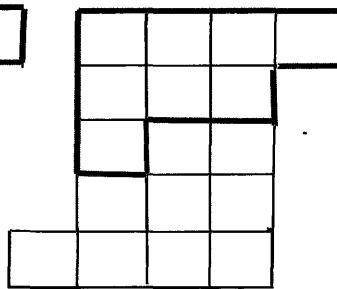
(1,2,4) --- (2,3,4)



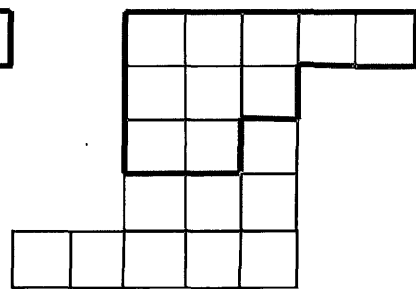
(1,3,4) --- (1,3,4)



(1,2,3)
---(1,2,3)



(1,3,4) --- (2,3,4)



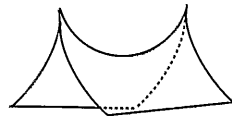
(2,3,5) --- (1,3,5)

定理. (待田芳徳-高橋雅朋-I)

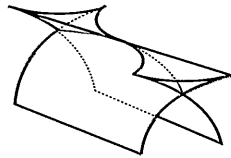
C^∞ -トポロジーに関してジェネリックな Engel 積分曲線 $f : I \rightarrow \mathcal{F}_{1,2}^{\text{Lag}}$ について,

$\pi_1 \circ f, \pi_2 \circ f$ の タイプの対 と 接線曲面の特異点の対 は次のリストで尽される :

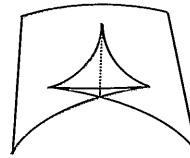
- (I) (1,2,3), (1,2,3), cuspidal-edge, cuspidal edge.
- (II) (1,3,4), (2,3,4), Mond surface, swallowtail.
- (III) (2,3,5), (1,3,5), generic folded pleat, Scherbak surface.



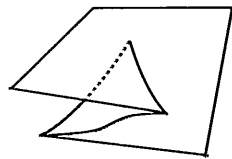
cuspidal-edge



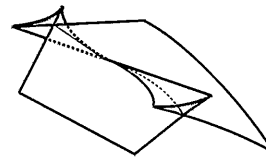
Mond surface



swallowtail



generic folded pleat



Scherbak surface

cuspidal-edge (resp. Mond surface, swallowtail, generic folded pleat, Scherbak surface)

は、それぞれ次の標準形で与えられる写像芽 $(\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ と $\mathcal{R}\text{-}\mathcal{L}$ -同値である：

$$\text{cuspidal-edge : } (x, t) \mapsto (x, -\frac{1}{2}t^2 + xt, \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}xt^2),$$

$$\text{Mond surface : } (x, t) \mapsto (x, -\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}xt^2, \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}xt^3),$$

$$\text{swallowtail : } (x, t) \mapsto (x, \frac{1}{6}t^3 - xt, -\frac{1}{4}t^4 + xt^2),$$

$$\text{generic folded pleat : } (x, t) \mapsto (x, -\frac{1}{6}t^3 + xt - \frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{2}xt^2, \frac{1}{20}t^5 - \frac{1}{6}xt^3 + \frac{1}{24}t^6 - \frac{1}{8}xt^4),$$

$$\text{Scherbak surface : } (x, t) \mapsto (x, \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}xt^2, -\frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{4}xt^4).$$

.....

分け入っても分け入っても青い山 種田 山頭火

完