

超幾何的又黑写像

2009年 6月6日

岡集会 於奈良女子大

9大6本松数理

吉田 正章

超幾何微分方程式：

$$E(\mu_0, \mu_1, \mu_\infty) : u'' + q(x)u = 0,$$

$$4q = \frac{1 - \mu_0^2}{x^2} + \frac{1 - \mu_1^2}{(1-x)^2} + \frac{1 - \mu_\infty^2 + \mu_0^2 + \mu_1^2}{x(1-x)}$$

より見慣れた形：

$$x(1-x)u'' + \{c - (a+b+1)x\}u' - abu = 0$$

指数差：

$$\mu_0 = 1 - c, \quad \mu_1 = c - a - b, \quad \mu_\infty = a - b.$$

0での局所解の例：

$$u = 1 + O(x), \quad v = x^{\mu_0}(1 + O(x)).$$

黒写像 (的は理満球面)

$$X := \mathbf{C} - \{0, 1\} \longrightarrow \mathbf{P}^1 = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$$

$$x \longmapsto u(x) : v(x)$$

- 局所双正則なれども多価
- (射影的) 測多価群 $\subset \mathrm{PGL}_2(\mathbf{C})$:
一次分数変換

注：以前は「一道群」と呼ばれていたが、今度の数学辞典で、

「測多価群」

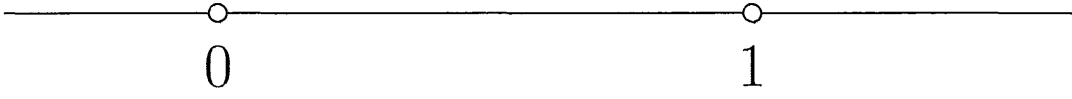
と改まった。

局所指数 μ_0, μ_1, μ_∞ が実なら

- $(-\infty, 0)$ で実数値の 2 独立解あり。この区間の像は線分
- $(0, 1), (1, \infty)$ でも同様、解は同じでない
- 2 組の独立解は線形に関係、故に 2 黒写像は一次分数で関係
- 一次分数変換で円は円に移る

X_+ (X の上半分) の黒像は円弧三角形 (黒三角形)

X_+



↓ 黒

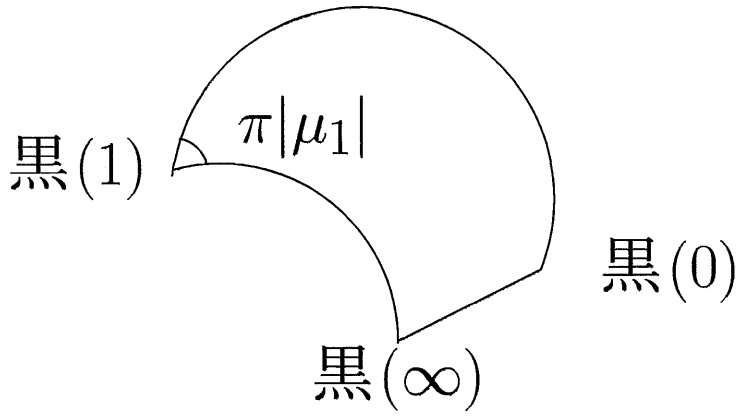


図 1: 黒三角形

全体像は黒鏡像原理

一般には像は混沌

だが

$$|\mu_j| = \frac{1}{k_j}, \quad j = 0, 1, \infty, \quad k_j \in \{2, 3, \dots, \infty\}$$

なら、像は

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_\infty} > 1 & \text{の時} & \mathbf{P}^1 \\ & = 1 & \text{の時} & \mathbf{C} \\ & < 1 & \text{の時} & \mathbf{B}_1 : \text{単位円盤} \end{aligned}$$

を隈なく一様に覆う。

例えば $k_0 = k_1 = k_\infty = \infty$ の時に全ての黒三角形を描いて見ると

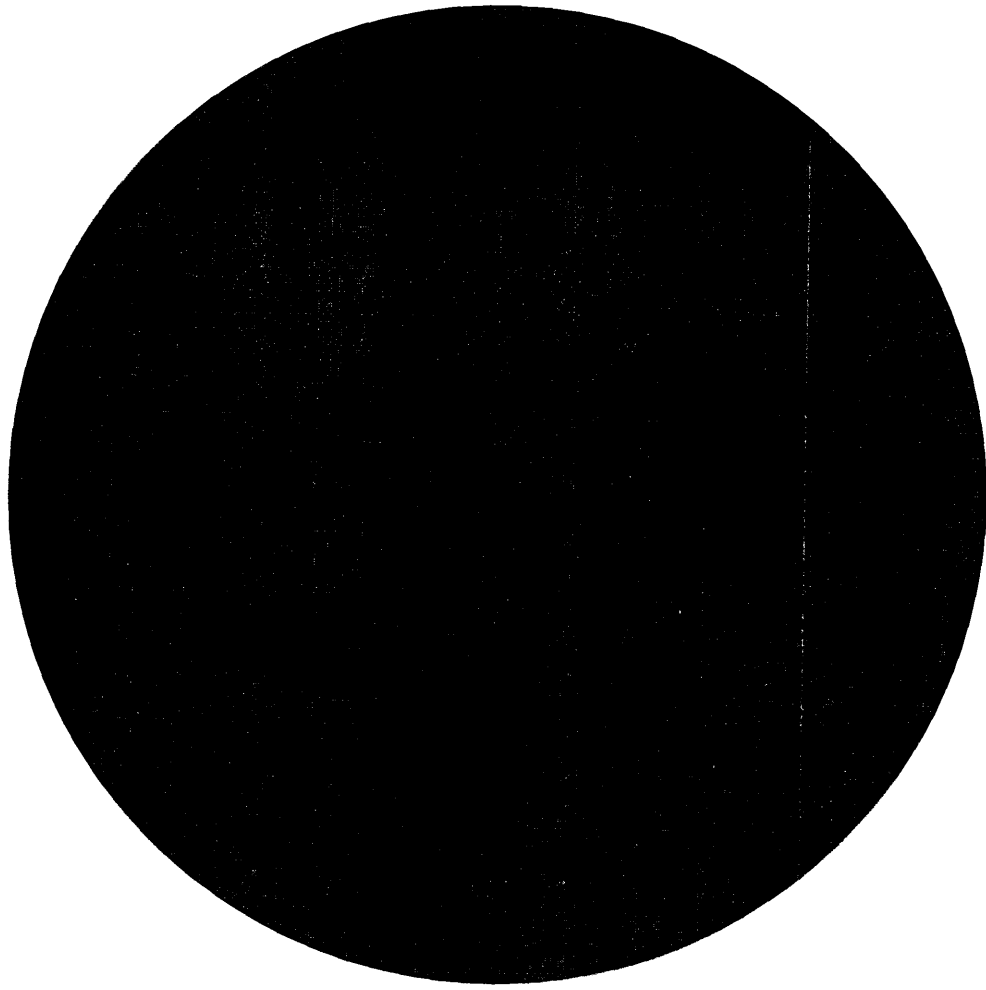


図 2: B_1 を隈なく覆っている 闇夜に烏

これは何事も真面目にやればいい結果
がでる訳ではない事を示している。

一つ置きに

黒三角形、白三角形

と塗り分けることが肝心。すると、世
界数学会議だかの紋章のようになる。

高次元的一般化

絵見る光^o、寺田俊明、他

超幾何方程式の高次元版を見繕って来て、解 u_0, \dots, u_n を使って

「多黒写像」

$$\mathbf{C}^n - \text{超曲面} \longrightarrow \mathbf{P}^n$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto u_0(x) : \dots : u_n(x)$$

を考える。

代数幾何、表現論、数論 …

専門家にお任せ

百年前に戻って反省

黒の的がおかしくないか

測多価群 $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{C})$ の自然な働き場は

球面でなく、その中だろうが

理満球面の中は又曲3-空間 \mathbf{H}^3

注：「双曲」は間違い。一方の葉しか使わない場合は「又曲」とすべき

自己同型は以下のもの：

$$H \longrightarrow MHM^*, \quad M \in \mathrm{PGL}_2(\mathbf{C}), \quad H \in \mathbf{H}^3$$

又黒写像

(「又曲黒」は発音し難いので、
「又黒」と命名)

的は又曲3-空間 \mathbf{H}^3

$$X \ni x \mapsto H(x)H(x)^* \in \mathbf{H}^3, \quad H = \begin{pmatrix} u & u' \\ v & v' \end{pmatrix}$$

像は \mathbf{H}^3 内の曲面

ここからは、神戸の佐々木武さんとの仕事です。又曲空間内曲面的微分幾何では山田光太郎、特異点では佐治健太郎、数式処理では野呂正行各氏にお世話になりました。自分で出来ないことは専門家にやって貰うことにしています。

局所的性質

方程式

$$E : u'' - q(x)u = 0$$

の又黒写像は、曲線

$$C : |q(x)| = 1$$

に沿って特異（歓迎すべき事）

C やその像を尖端曲線と言う。又黒像がこの曲線に沿って大体、尖端的特異点を有するからである

大域的性質

黒と又黒の測多価群は同じ:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightarrow M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad H \rightarrow MHM^*$$

$\mathrm{PGL}_2(\mathbf{C})$ は \mathbf{H}^3 に、より自然に働く

例を観察する:

- $\mu = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ 測多価群が (位数 6 の) 2 面体群
- $\mu = (0, 0, 0)$ 同群が楕円芋蔓群 $\Gamma(2)$

注: 芋蔓式に色々な面白いことが分かるという気持ちである

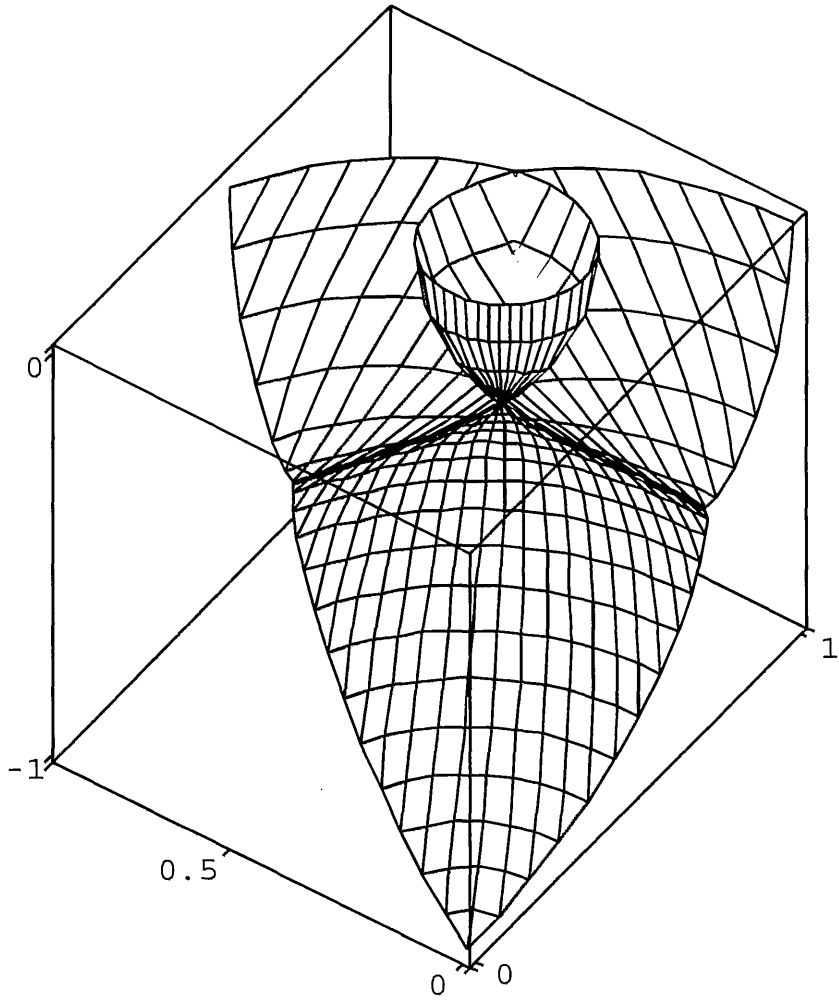


図 3: X_+ の像: 燕尾あり (2 群共)

ここらで尖端曲線の絵を描く

微分方程式の特異点 0 と 1 を囲むひょうたん型の単純閉曲線で、くびれた所に上下 2 点の燕尾点に乗っている。

燕尾の説明をする

実係数 4 次多項式の判別式として知られる。尖端曲線の尖端が燕尾点である。昔から燕尾と呼ばれているが、烏賊の頭のようにも見える。燕を見たことのない人が増えているが、ここは環境問題を論ずる場でないので、そのことには触れない。雀に似ているが、焼き鳥屋では出てこない。巣は中華料理で使われる。

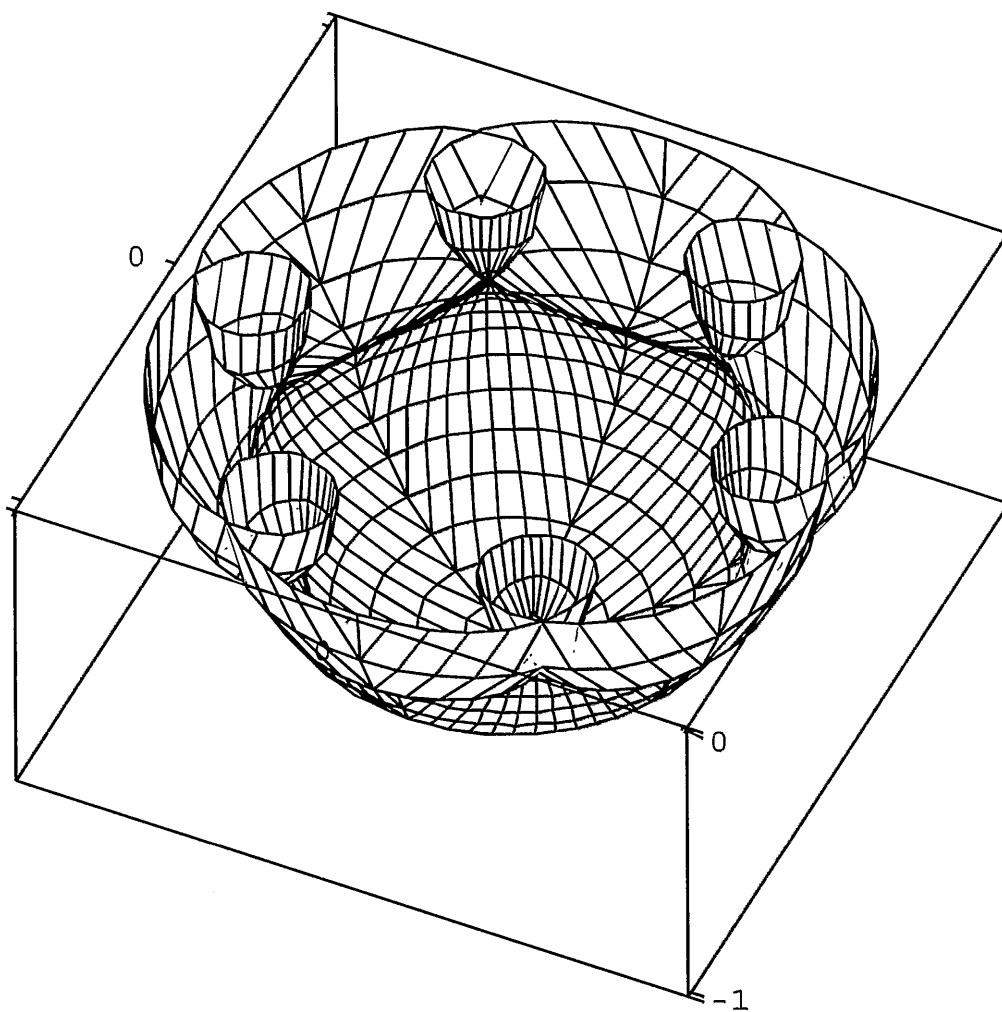


图 4: 2 面体群、黑鏡像原理 6 回適用

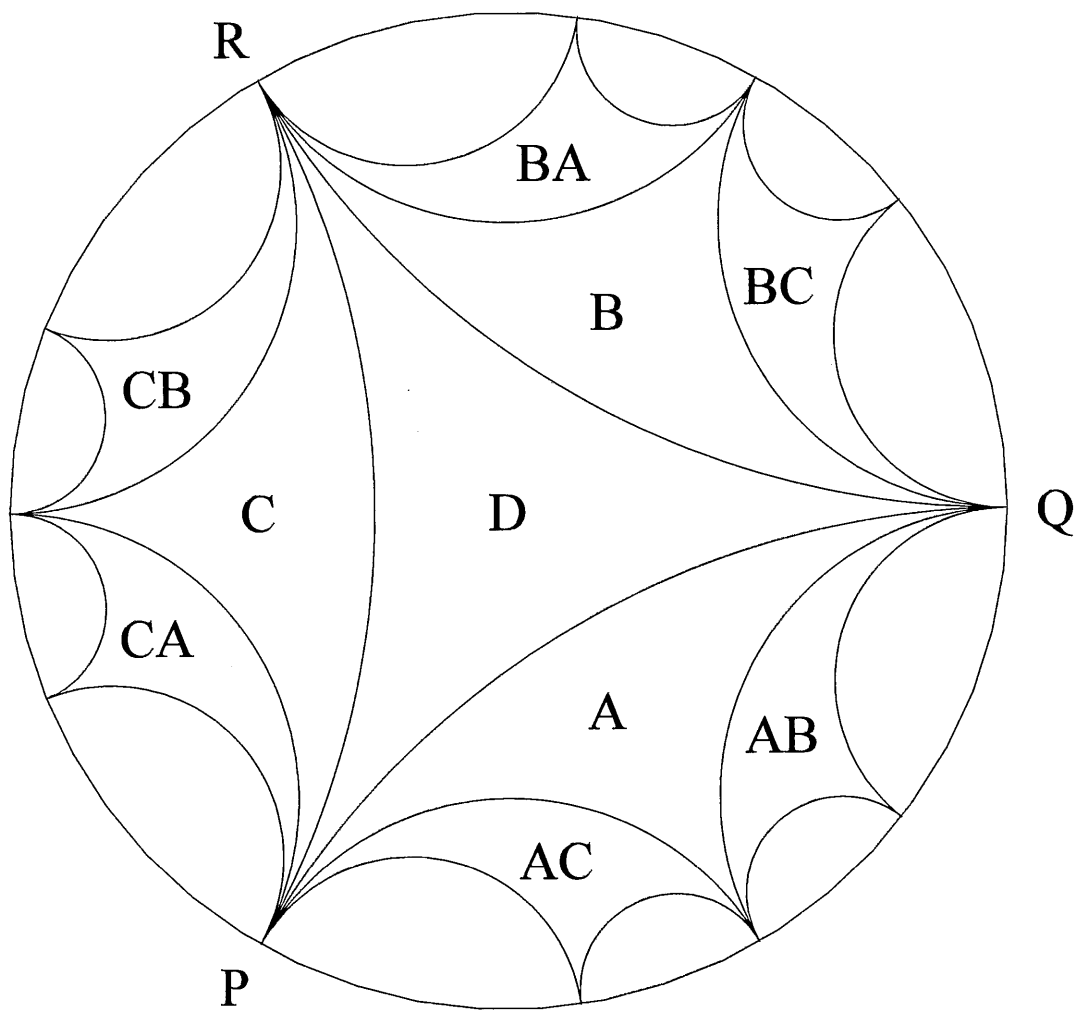


图 5: $\Gamma(2)$: 地黒

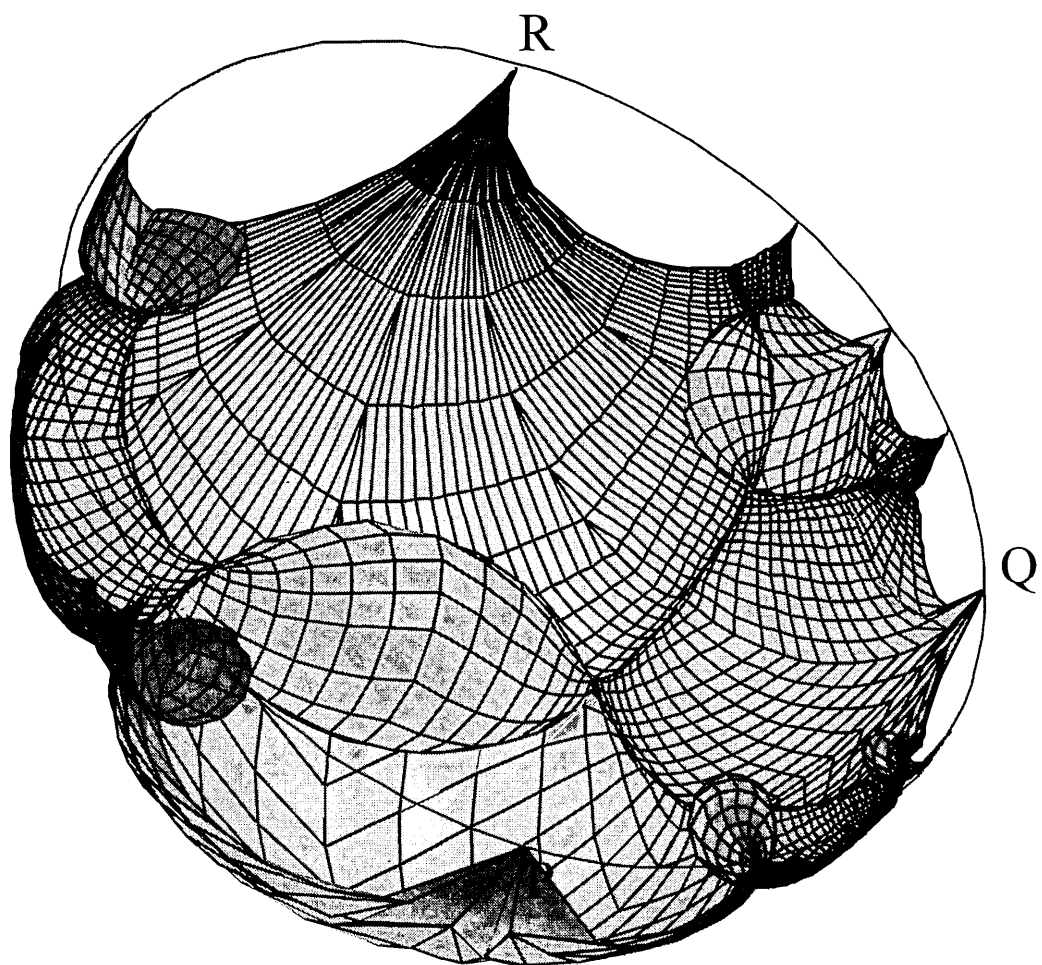


图 6: $\Gamma(2)$: 又黒

又黒の法線は黒を回復

又黒像には表裏がありまして、又黒像の一点から表向き法線を測地的に延ばして理想境界たる球面にぶつけると、そこは黒像

裏向き法線でやると、そこは裏黒像。裏黒写像（的は理満球面）とは

$$\begin{aligned} X := \mathbf{C} - \{0, 1\} &\longrightarrow \mathbf{P}^1 = \mathbf{C} \cup \{\infty\} \\ x &\longmapsto u'(x) : v'(x) \end{aligned}$$

注：各種黒写像が出てくるので、黒写像は一般的に使い、本来の黒は「地黒」と言って区別することがある。

注：微分方程式の特異点0と1の行き先は黒も裏黒も（又黒も）同じ；これは高等学校でもやる「病院の定理」である。

平行曲面族

又黒像の各点から法線を立て、その点から等距離の点のなす曲面、即ち、又黒像の平行曲面を考えると、その最も極端なものが境界の球に張り付いた地黒と裏黒である。

地黒、又黒、裏黒は、平行曲面族で繋がっている

次の絵では球に張り付いた黒三角形が少しずつ起き上がり燕尾を作り、裏黒になっている様子を表している

裏黒になっていく辺りがよく見えないでしょう

焦曲面

楕円・放物線の焦点とは曲線の法線の交点です。一般の曲線なら点にならず曲線になり焦曲線、曲面でやれば焦曲面です。今の場合、それは平行曲面族の特異点の全体と思った方が理解しやすいでしょう。

そう思って、楓に描かせました

より正確な絵も付けました

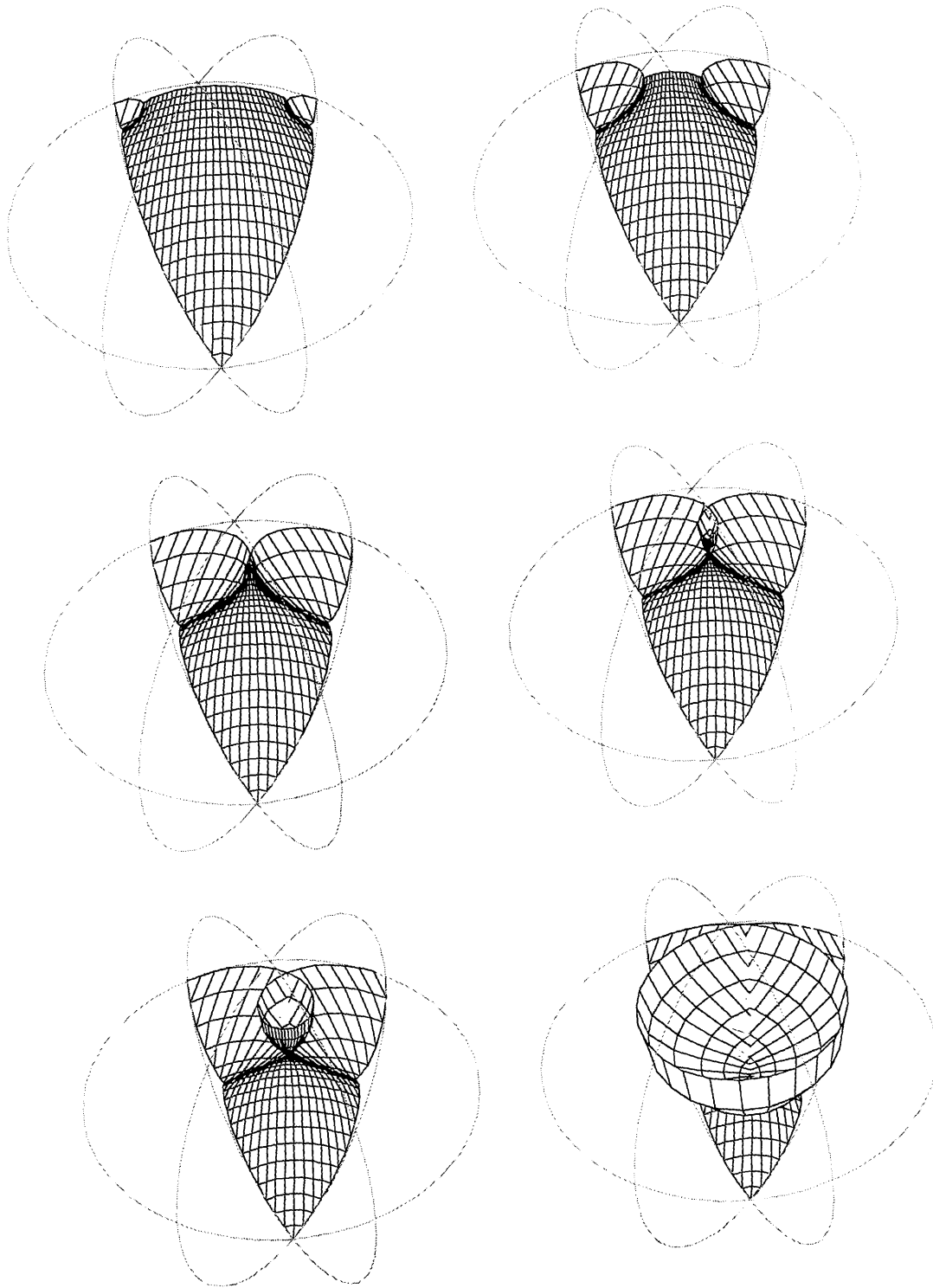


图 7: 平行曲面族

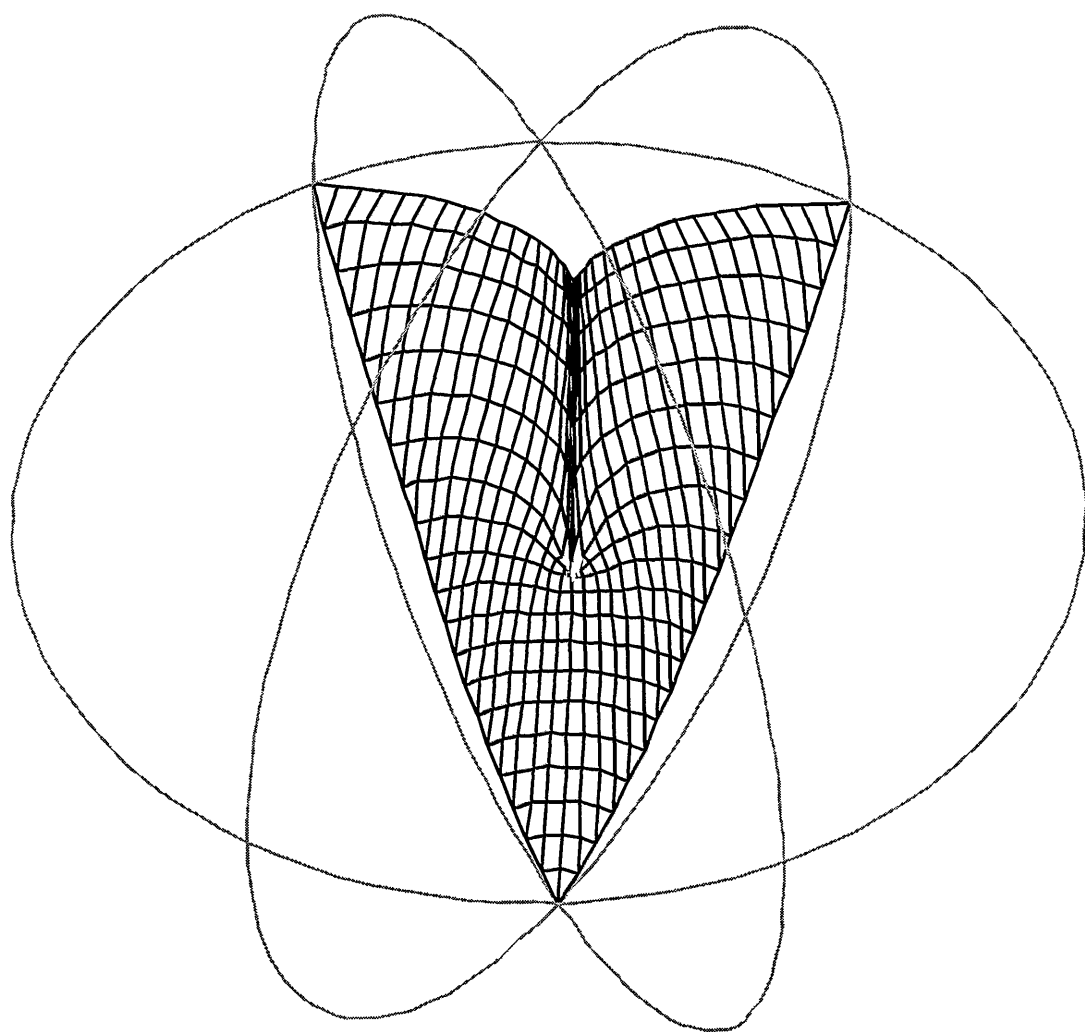


図 8: 楓の描く杜撰な焦曲面

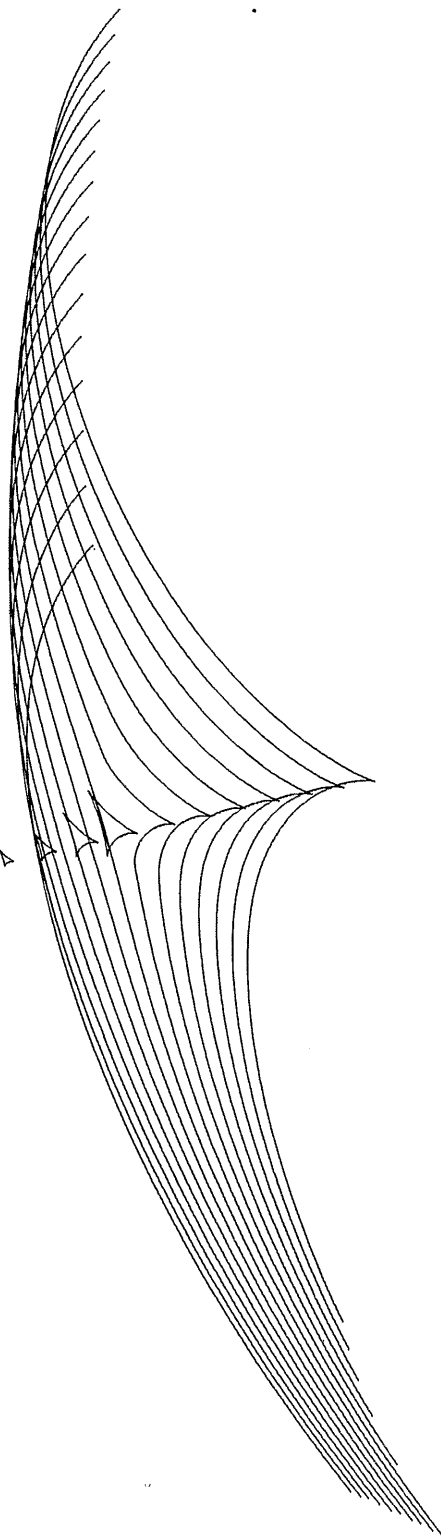


図 9: 焦曲面から何かが...

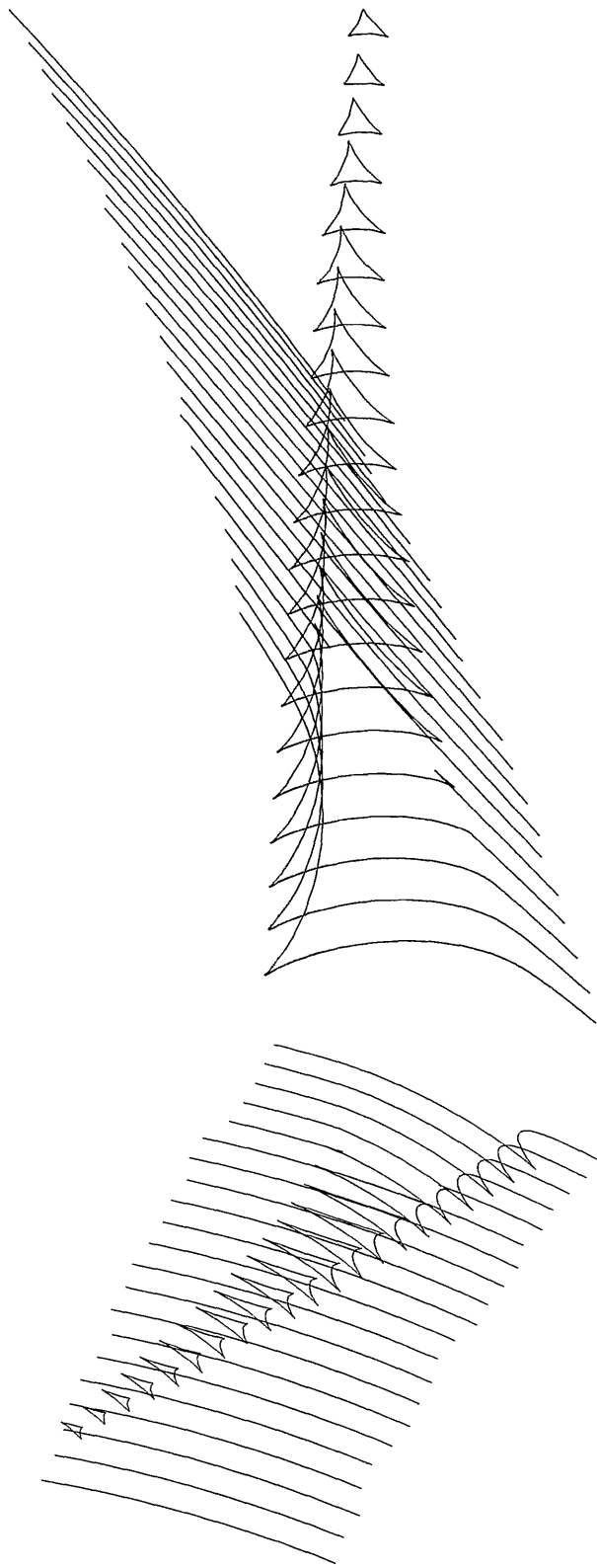


図 10: 焦曲面には角があった

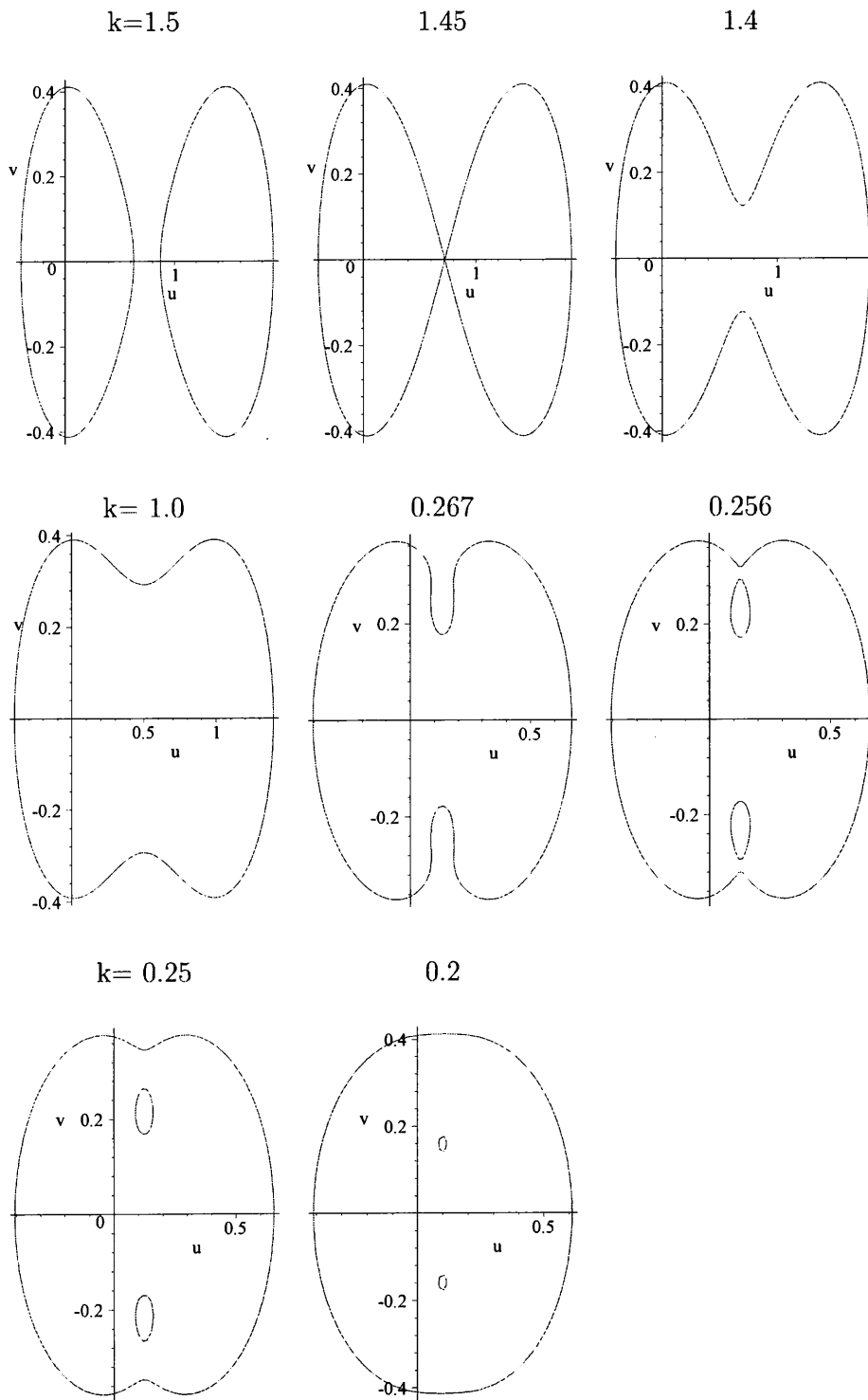


图 11: 尖端曲线

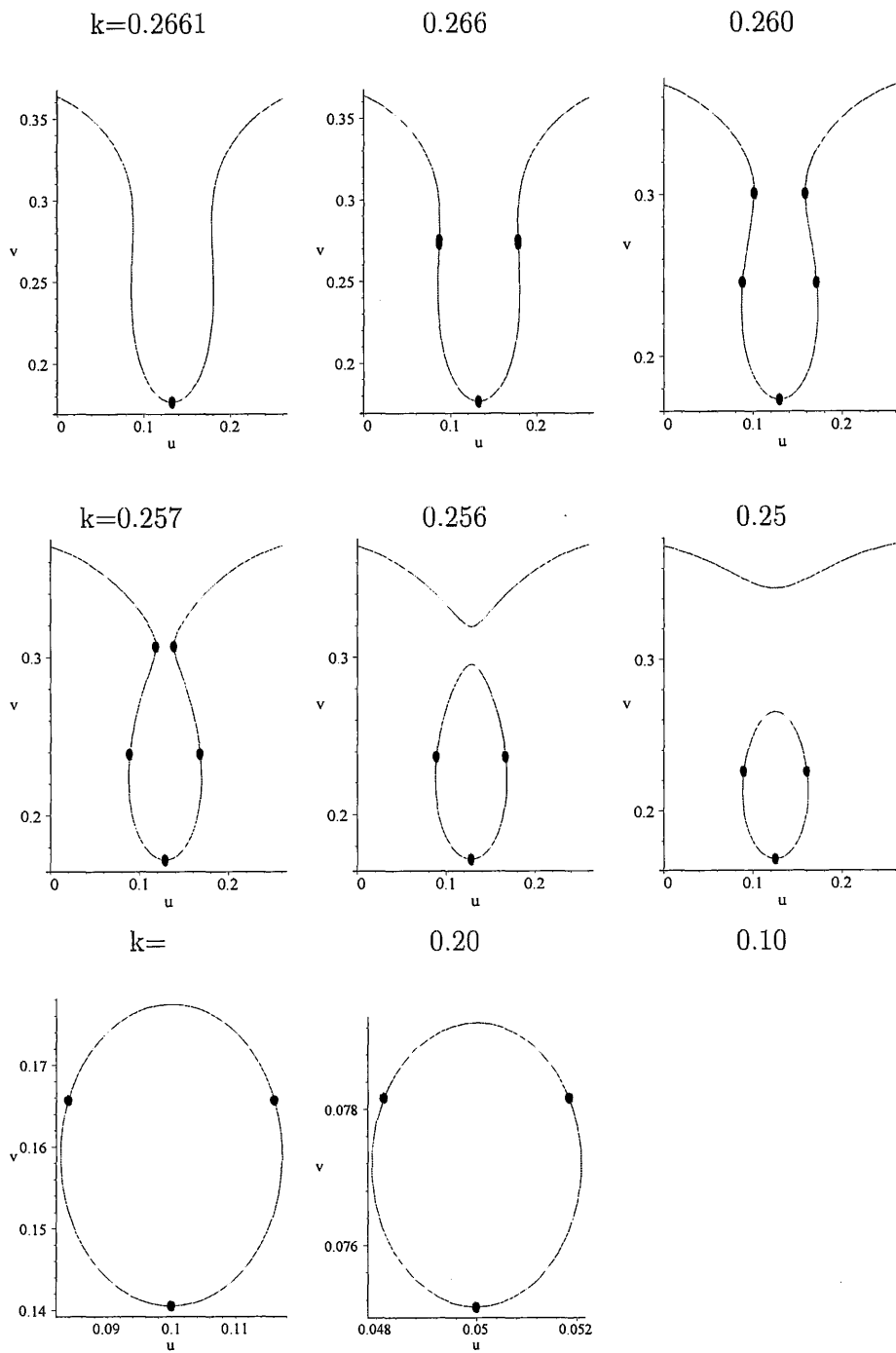


図 12: 尖端曲線 拡大図: 燕尾の交尾が 2 回 (0.266 で近親、0.257 で出合い系)

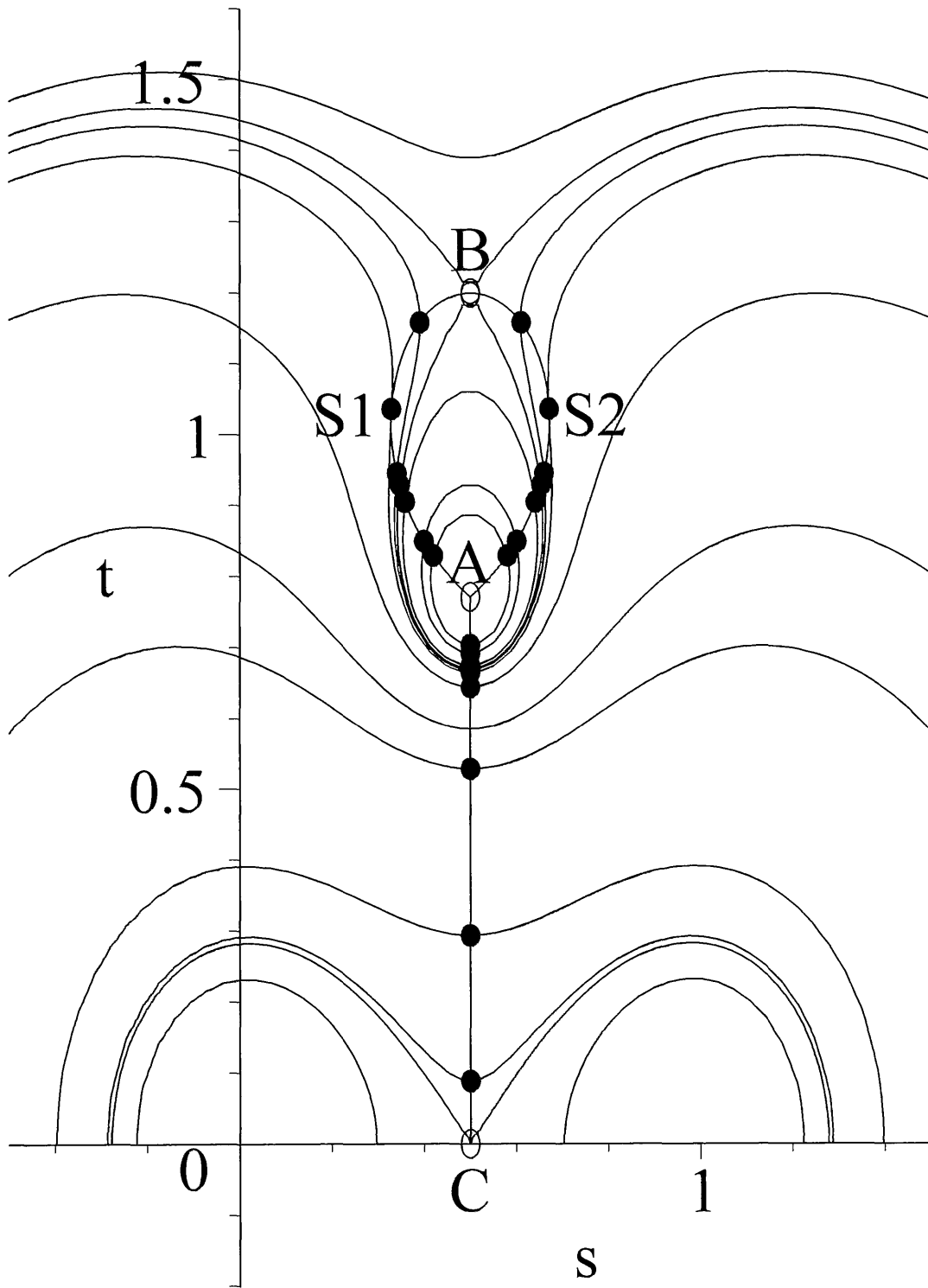


図 13: 焦曲面の尖端線