

高次元ブラックホールの世界

KEK 素粒子原子核研究所
宇宙物理理論グループ
小玉英雄

岡潔シンポジウム，奈良女子大，
2009年6月6日

内容

1. ブラックホールとは？
2. 数学的定義
3. 静的ブラックホール
 - Birkhoffの定理
 - Israelの剛性定理
 - 正エネルギー定理
 - 高次元における一意性定理
 - 縮退ブラックホール
4. 回転ブラックホール
 - 4次元回転ブラックホールの一意性定理
 - 宇宙検閲仮説
 - 一般剛性定理
 - 5次元ブラックリング
5. 安定性
 - 摂動解析
 - 静的ブラックホールの安定性
 - ブラックブレーン
 - Gregory-Laflamme不安定
 - 増幅反射不安定
 - 回転するブラックホールの安定性
6. まとめ

1. ブラックホールとは？

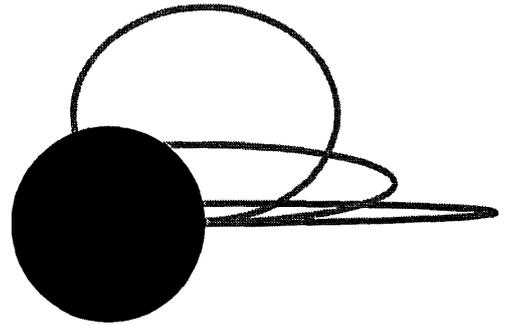
脱出速度とブラックホール

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r} = \frac{1}{2}mv_{\infty}^2$$



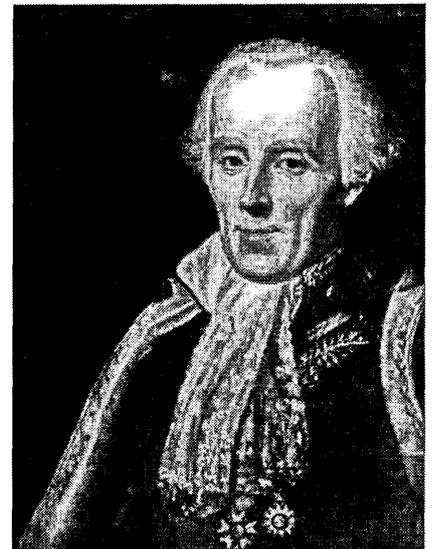
$$\text{脱出速度 : } v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

$$r < \frac{2GM}{c^2} \equiv r_h \Rightarrow v_{\text{esc}} > c$$



天体の半径が r_h より小さくなると、その天体は遠方にいる観測者から見えなくなる。

[Pierre-Simon Laplace
(1749-1829)]



1915 一般相対性理論 (Albert Einstein)

1916 Schwarzschild解 (Karl Schwarzschild)

1933 Horizonの概念 (Georges Lemaitre)

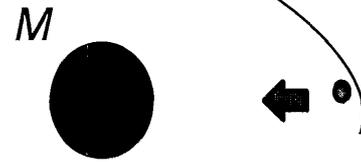
Schwarzschildブラックホール

- Schwarzschild解 ($c=G=1$) [1916]

$$g = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega_2^2,$$

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r}$$

$$\Rightarrow Ric(g) = 0$$



- 定常で球対称.
- 漸近的に平坦: $f(r) \rightarrow 1$ ($r \rightarrow \infty$)
- r の大きい領域での粒子の運動は、質量 M の天体の重力による運動と同じ

- $f(r)=0 \Rightarrow r=r_h$ は特異点?

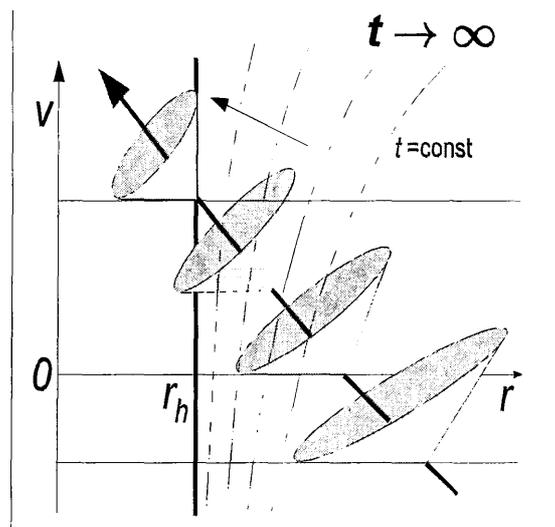
- ◆ Eddington-Finkelstein 座標 [1924]

$$v = t + r + 2M \ln |r - 2M|$$

$$\Rightarrow g = 2drdv - f(r)dv^2 + r^2d\Omega_2^2$$

- ◆ 曲率多項式は正則

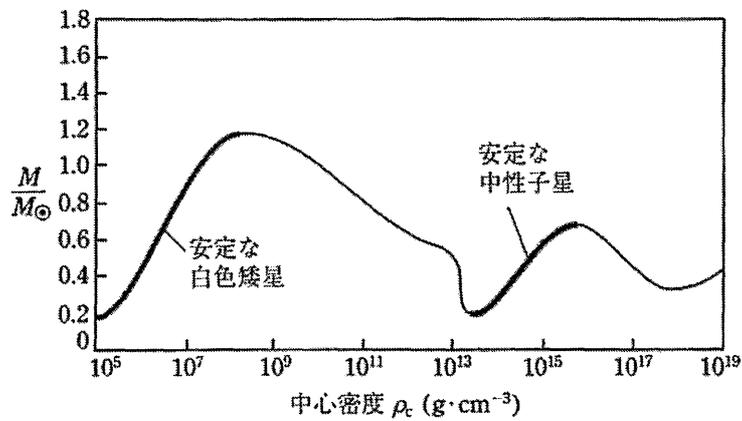
$$R_{abcd}R^{abcd} = \frac{48M^2}{r^6}$$



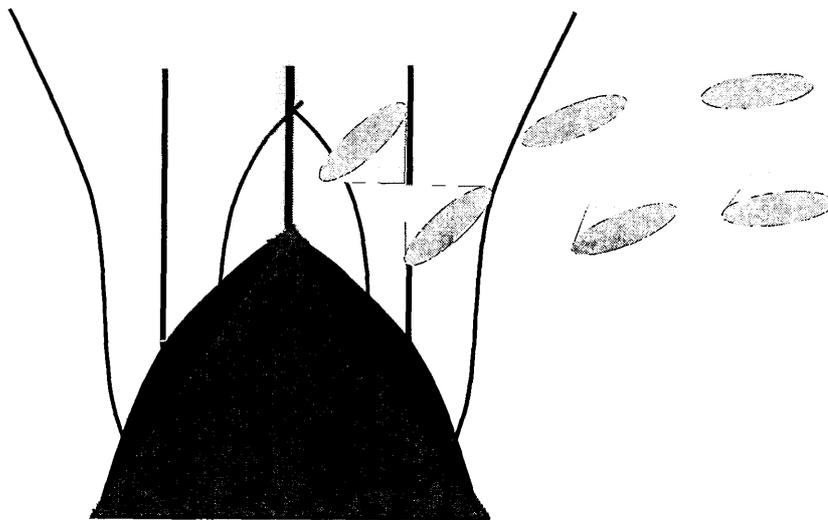
天体の重力崩壊

- 白色矮星・中性子星の上限質量
[Chandrasekar S 1931]

$$M < M_{\text{ch}} \simeq 1.4 M_{\odot}$$

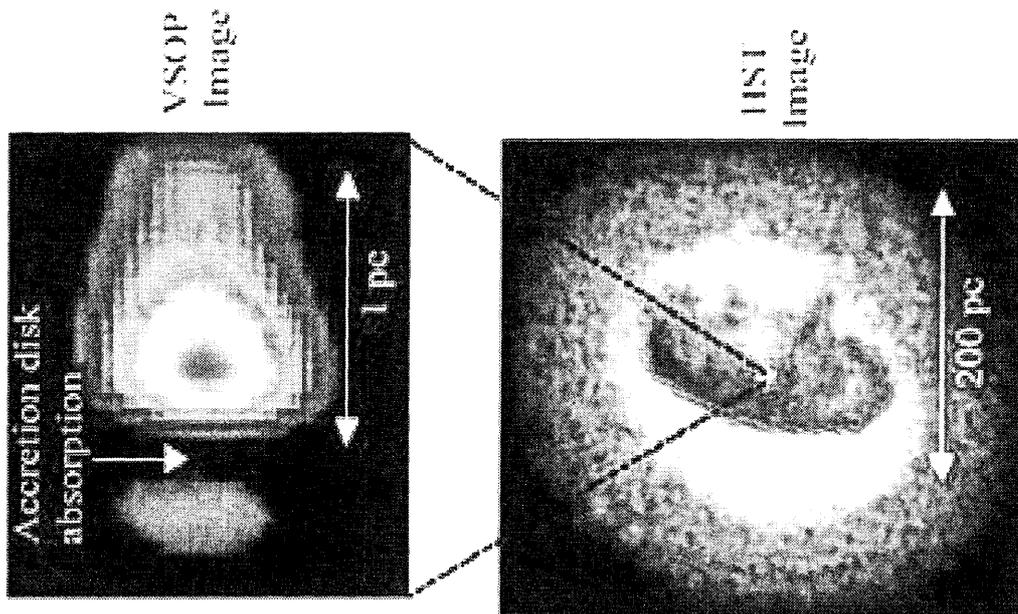
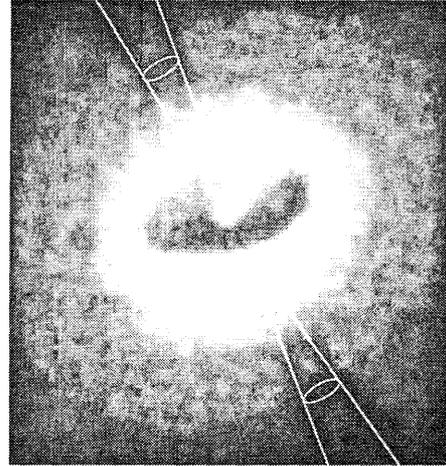


- 星の重力崩壊の数値計算
– Oppenheimer, Snyder 1939



• ブラックホールの発見

- QSO 1963
- Cygnus X-1 1973-1978
- 現在では、X線天体、ガンマ線バースター、活動的銀河中心核など高エネルギー天体だけでなく、我々の銀河を含む多くの銀河の中心にも $10^6 M_{\odot}$ から $10^{10} M_{\odot}$ のブラックホールが含まれていると考えられている。ブラックホールは天文学・宇宙物理学の花形となっている！



NGC4261

一意性と終状態

- 重力崩壊は必ずブラックホールを生み出すのか？

⇒ (弱い)宇宙検閲仮説 [Penrose R 1969]

この問題は未だ未解決！

Cf. 特異点定理 [Penrose, Hawking SW 1965-1970]

- ブラックホールにはどのようなものが存在するのか？

⇒ Kerr BH (回転するブラックホール)[1963], Kerr-Newman BH [1965]

⇒ Ernst形式, 変換論, 逆散乱法, ソリトン法 [1970's, 1980's]

⇒ 一意性定理 [Israel W 1967; Hawking 1972]

安定性定理 [Vishveshwara CV 1972; Whiting B 1989]

これを根拠に, 現在, 宇宙に存在するブラックホールは Kerr(-Newman)ブラックホールだと信じられている.

Cf. ブラックホールの量子論的蒸発 [Hawking 1974]

⇒ $M < 10^{15}$ g のブラックホールは宇宙年齢以下で蒸発して消滅

⇒ その後はどうなるのか？

高次元への展開

- 超弦理論・M理論
 - 重力を含む統一理論の有力な候補.
 - 整合で平坦な真空を解として持つ \Rightarrow 古典極限は10次元時空の理論.
 - 素粒子標準モデルのもつ不思議や未解決問題を解決する可能性.
- AdS/CFT対応
 - 新たな双対性に関する予言.
 - n 次元のゲージ理論と $(n+1)$ 次元の重力理論の双対性.
 - 有限温度での物性と高次元ブラックホールの物理の対応を示唆.
- TeV重力理論
 - mmサイズの内部空間をもつ高次元理論
 - LHC実験でmini ブラックホールが生成される可能性を示唆.

高次元時空ではどのようなブラックホールが存在するのか？

それらは安定か？

2. 数学的定義

無限遠の概念

共形埋め込み

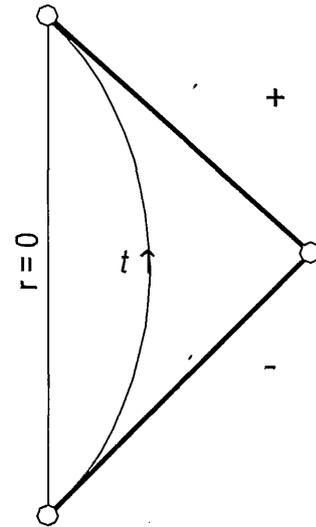
Minkowski時空 $\approx \mathbb{R}^{n+1}$

$$g(E^{n,1}) = -dt^2 + dr^2 + r^2 g(S^{n-1})$$



$$t - r = 2 \tan \frac{\eta - \chi}{2},$$

$$t + r = 2 \tan \frac{\eta + \chi}{2}$$



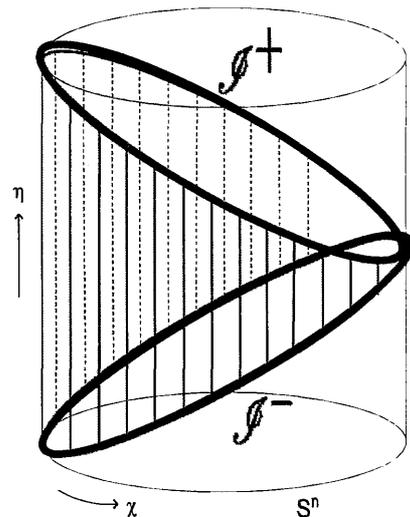
静的Einstein宇宙 $\approx \mathbb{R} \times S^n$

$$\begin{aligned} \Omega^2 g(E^{n,1}) &= -d\eta^2 + d\chi^2 + \sin^2 \chi g(S^{n-1}) \\ &= -d\eta^2 + g(S^n) \end{aligned}$$

$$\Omega = \cos \frac{\eta + \chi}{2} \cos \frac{\eta - \chi}{2}$$

Image : $|\eta| < \pi - \chi$
 $(0 \leq \chi < \pi)$

$$\begin{aligned} \partial M &= \mathcal{I}^+ \cup \mathcal{I}^- \\ \mathcal{I}^\pm &\simeq \mathbb{R} \times S^{n-1} \end{aligned}$$

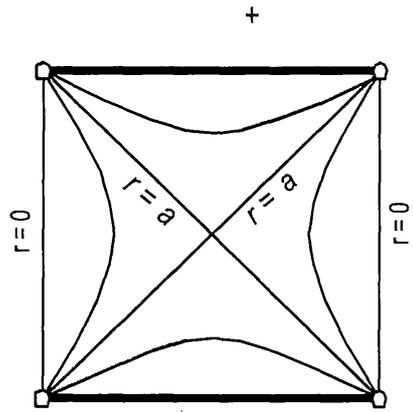


一般化

- 共形的無限遠[Penrose R 1963]

$$f : (M, g) \rightarrow (\hat{M}, \hat{g})$$

1. $\mathcal{I} = \partial \overline{f(M)} \subset \hat{M}$: smooth
2. $\hat{g} = \Omega^2 f_* g$: $\exists \Omega : \hat{M} \rightarrow \mathbb{R}$
3. $\Omega|_{\mathcal{I}} = 0, d\Omega|_{\mathcal{I}} \neq 0$

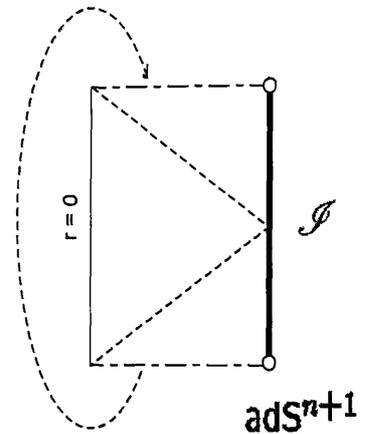


- 弱漸近単純性

- 真空時空では、無限遠は宇宙項に敏感

$$R_{\mu\nu} = \frac{2\Lambda}{n-1} g_{\mu\nu}$$

- $\Lambda = 0 \Rightarrow \mathcal{I}$: Null
- $\Lambda > 0 \Rightarrow \mathcal{I}$: Spacelike
- $\Lambda < 0 \Rightarrow \mathcal{I}$: Timelike



- 一般に、時空Mの共形的無限遠の近傍が、 $E^{n,1}$, dS^{n+1} , adS^{n+1} のいずれかの無限遠近傍と同相であるとき、Mは弱漸近的単純であるという。

ブラックホールの定義

M を漸近的に平坦な時空, $\mathcal{I} = \mathcal{I}^+ \cup \mathcal{I}^-$ をその共形的無限遠とする.

- 漸近予言可能 (Asymptotically predictable)

$$\mathcal{I} \subset \overline{D(\Sigma)} \quad \text{in } \hat{M}$$

- ホライズン

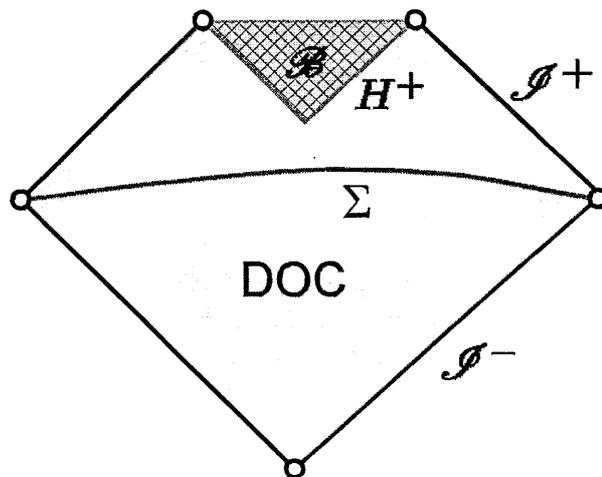
$$H^+ = \partial(J^-(\mathcal{I}^+)) \cap J^+(\mathcal{I}^-)$$

- ブラックホール領域

$$\mathcal{B} = \overline{M - J^-(\mathcal{I}^+)}$$

- DOC(外部交信領域)

$$\text{DOC} = J^-(\mathcal{I}^+, M) \cap J^+(\mathcal{I}^-, M)$$



Killing ホライズン

- 定常時空

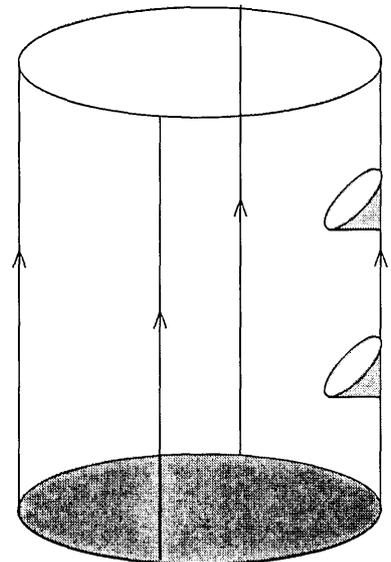
- 無限遠近傍で時間的な Killingベクトル $\xi = \partial_t$ が存在:

$$\xi_\xi g = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0$$

- $\xi \Rightarrow$ 1 径数変換群 $\Phi_a: t \rightarrow t+a$

- 光的超曲面

- 超曲面 Σ は, その接平面が光的(すなわち計量が退化)となるとき, 光的であるという. 光的超曲面は光円錐に接し, 光的($k \cdot k=0$)となる接線(光的測地線)を各点で一本もつ.
- ホライズンは光的超曲面である.



- Killingホライズン

- 光的超曲面はその光的接ベクトルが適当な Killingベクトルと平行になるとき, Killingホライズンという.

静的ブラックホール

- 静的時空

定常で時間反転不変

⇔ \exists Killing vector ξ st $\xi_* \wedge d\xi_* = 0$

- Schwarzschild時空

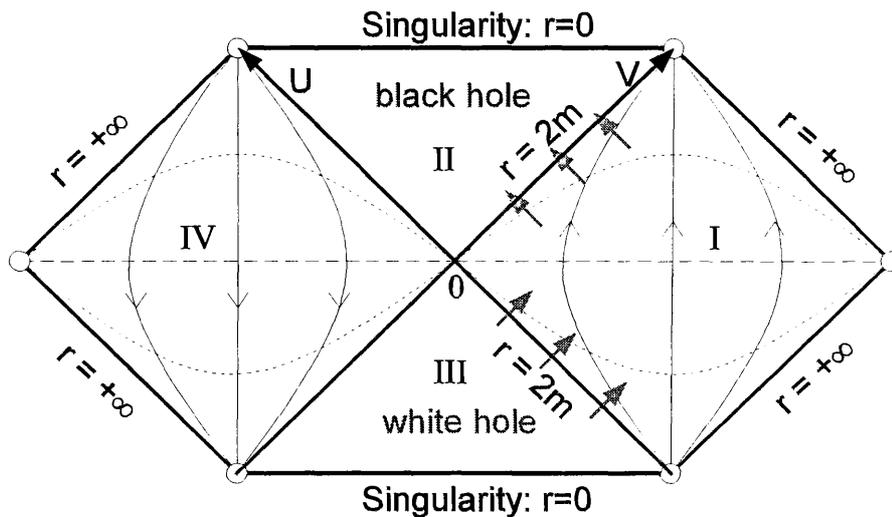
$$g = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2g(S^n),$$

$$f(r) = 1 - \frac{2m}{r^{n-1}}$$

- Horizon=Killing horizon: $f(r)=0$

- ホライズンは $S^n \times \mathcal{R}$

- 時間推進のKillingベクトルはホライズン上で光的で、DOCでは時間的.

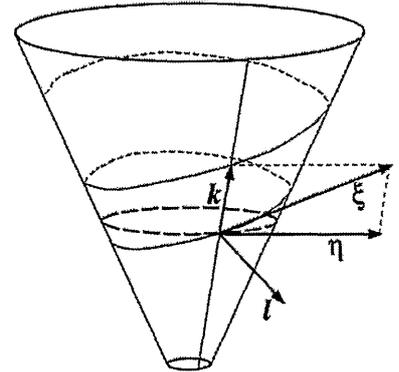


定常回転ブラックホール

- 回転的定常時空

時間推進を表すKillingベクトル ξ に対し

$$\omega := *(\xi_* \wedge d\xi_*) \neq 0$$



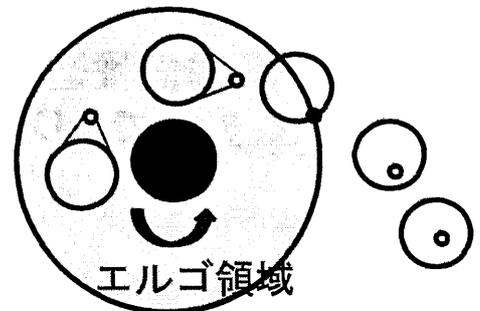
- 例: Kerr解

$$g = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2 + \rho^2 \left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right)$$

$$\Delta = g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi} = r^2 - 2Mr + a^2,$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$$

$$\omega = d \left(\frac{2aM \cos \theta}{\rho^2} \right) \neq 0$$



- ホライズン H^+ は Killing ホライズン ($\Delta(r)=0$).
- $H^+ \approx S^2 \times \mathcal{R}$
- 時間推進 Killing ベクトル ξ は H^+ 上で空間的. また, ホライズン外部に ξ が空間的となる領域 (Ergo 領域) が存在.
- ブラックホール内部にも Killing ホライズンが存在.

3. 静的ブラックホール

Birkhoffの定理

球対称 真空 \Rightarrow 静的

Einstein方程式の弱漸近単純かつ球対称な4次元真空解は必ず静的で、(dS/adS-)Schwarzschild解に限られる。



一般化

高々電磁場しか存在しない(n+2)次元系に対して、Einstein方程式のSO(n+1), SO(n,1)ないしISO(n)(=Isom(Eⁿ))対称な解は必ず静的で、次のいずれかと局所同型である:

- 成相解: $M = dS^2 \times S^n, adS^2 \times H^n$.
- ブラックホール解:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\sigma_k^2,$$
$$f(r) = k - \frac{m}{r^{n-1}} + \frac{q^2}{r^{2n-2}} - \lambda r^2$$

静的BHの剛性定理: 4次元

静的真空 \Rightarrow 球対称

[Israel W 1967] 漸近的平坦で漸近予言可能な静的なEinstein方程式の真空解は, $D\Omega \approx S^2 \times \mathcal{R}^2$ ならば球対称である.

証明の概要

静的(n+2)次元時空 $ds^2 = -N^2 dt^2 + d\sigma^2(\Sigma)$ に対して, Einstein方程式は

$$R_{ij}(\Sigma) = \frac{1}{N} \nabla_i \nabla_j N, \quad \Delta N = 0$$

空間計量を $d\sigma^2 = \rho^2 dN^2 + \gamma_{ab} dz^a dz^b$ と表すと, $N=$ 一定面(n次元) $S(N)$ の外部曲率

$$K_{ab} = \frac{1}{2\rho} \partial_N \gamma_{ab} = \hat{K}_{ab} + \frac{1}{n} K \gamma_{ab}$$

に対して, Einstein方程式より

$$\partial_N \int_{S(N)} \left(\frac{KN}{\rho} + \frac{2n-1}{n-1} \frac{1}{\rho^2} \right) = -\frac{N}{n-1} \int_{S(N)} \left(R + (n-1) \frac{(D\rho)^2}{\rho^2} + n\hat{K}^2 \right)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 dN N \int_{S(N)} R \leq \frac{2nA_H}{\rho_H^2}, \quad M = \frac{A_H}{(n-1)\Omega_n \rho_H}$$

$$\partial_N \int_{S(N)} \frac{K}{N} \rho^{1/n-1} = - \int_{S(N)} \left(\frac{n-1}{n} \frac{(D\rho)^2}{\rho^2} + \hat{K}^2 \right)$$

$$\Rightarrow 2n\Omega_n \{(n-1)M\}^{1-1/n} \rho_H^{-1/n} \leq \int_H R$$

を得る. 特に, $n=2$ のとき, $S(N) \approx S^2$ なら Gauss-Bonnet の定理より

$$\int_{S(N)} R = 8\pi \Rightarrow 4\pi \leq \frac{4A_H}{\rho_H^2} = \frac{16\pi M}{\rho_H} \leq 4\pi \Rightarrow D\rho = \hat{K} = 0$$

これより, $S(N)$ が 2次元球面に等長で, 時空が $SO(3)$ 対称性をもつことが導かれる.

正エネルギー一定理

[Schoen-Yau 1979; Witten 1981] 空間的に漸近的平坦な初期条件から得られる(ブラックホール)時空のADM質量は, 主エネルギー条件が満たされるならば非負である. さらに, ADM質量がゼロならば, 時空は平坦である.

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + q_{ij}(dx^i - \beta^i dt)(dx^j - \beta^j dt)$$

$$K_{ij} = -\frac{1}{2}\mathcal{L}_n q_{ij} = \frac{1}{2N}(-\partial_t q_{ij} + D_j \beta_k + D_k \beta_j)$$

ADM質量

- Einstein方程式に対する初期値問題

$$R + K^2 - K_j^i K_i^j = 2\kappa^2 \rho,$$

$$-D_j K_i^j + D_i K = \kappa^2 J_i$$

- 初期面 Σ に対する仮定コンパクト集合 C , C_i が存在して,

$$\Sigma - C = \cup_j N_j : N_j \approx \mathbf{R}^3 - C_i$$

初期面は各エンド N_j で漸近平坦とする.

- 空間的に漸近的平坦

$$q_{ij} = \left(1 + \frac{M}{r}\right)^4 \delta_{ij} + p_{ij},$$

$$p_{ij} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad D p_{ij} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right),$$

$$DD p_{ij} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

- 主エネルギー条件
任意の未来向き時間的ベクトル V に対して, $T^{\mu\nu} V_\nu$ が過去向きの時間的ベクトル
 $\Rightarrow \rho \geq 0, \quad \rho^2 \geq J^2$

静的BHの剛性定理：一般次元

[Bunting, Masood-ul-Alam 1987; Hwang S 1998; Gibbons, Ida, Shiromizu 2002] 漸近的平坦で漸近予言可能な静的なEinstein方程式の解は、高々電磁場しか存在せずかつホライズンが非縮退なら、球対称である。

$$ds^2 = -N(x)^2 dt^2 + q_{ij}(x) dx^i dx^j$$

$$R_{ij}(\Sigma) = \frac{1}{N} \nabla_i \nabla_j N, \quad \Delta N = 0$$

(証明の概要：真空の場合)

Σ の2つのコピー Σ^+, Σ^- を用意し、 q に共形的な計量を与える：

$$q^\pm = \Omega_\pm^2 q; \quad \Omega_\pm = \left(\frac{1 \pm N}{2} \right)^2$$

$$\Rightarrow \tilde{\Sigma} = \Sigma^+ \cup \Sigma^- \cup P$$

正則, 漸近的平坦, ゼロ質量

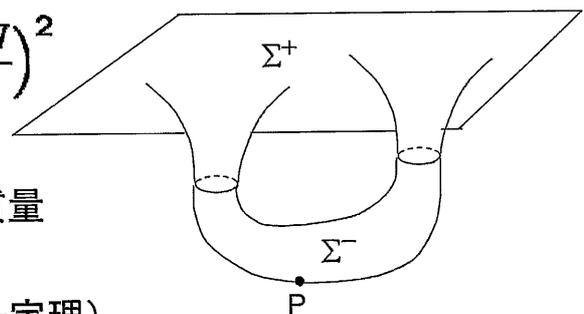
$$\text{かつ } R(\tilde{\Sigma}) = 0$$

$$\Rightarrow (\tilde{\Sigma}, \tilde{q}) : \text{平坦 (正エネルギー定理)}$$

& ホライズンは totally umbilical

$$\Rightarrow \text{ホライズンの連結成分は球で, その近傍は球対称}$$

$$\Rightarrow \text{全時空は球対称}$$



縮退ホライズンをもつBH

- 定義

ホライズンを生成する光的測地線が完備のとき、ホライズンは縮退しているという。

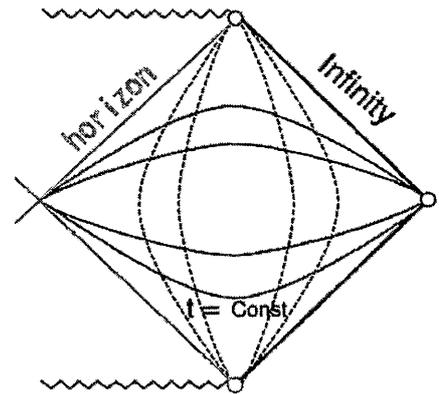
- 例

- Extremal Reissner-Nordstrom BH: $Q=M$ となる荷電ブラックホール

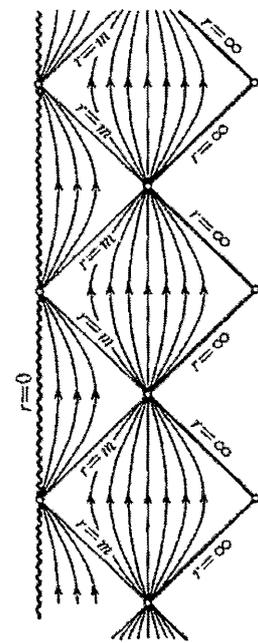
$$g = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2g(S^n),$$

$$f(r) = \left(1 - \frac{m}{r^{n-1}}\right)^2$$

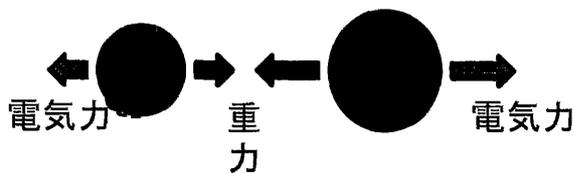
- Majumdar-Papapetrou 解: 上記の解の任意個の重ね合わせ.
- 一般に, 超重重力理論における超対称ブラックホール解(BPS BH)はこのタイプとなる.



非縮退BH



縮退BH



4. 回転ブラックホール

4次元回転BHの一意性定理

定常 \Rightarrow 軸対称

剛性定理[Hawking 1973] 高々電磁場しか存在しないとき, ホライズンが連結で $S^2 \times \mathcal{R}$ と同相な解析的部分多様体ならば, 定常回転ブラックホール解は軸対称である.

$$g = -e^{2U}(dt + Ad\phi)^2 + e^{-2U}(\rho^2 d\phi^2 + e^{2k}(d\rho^2 + dz^2))$$

- Ernst形式
- 非線形 σ モデル

一意性定理[Carter 1972; Robinson; Mazur 1982; Chrusciel 1996] 高々電磁場しか存在しないとき, 漸近的に平坦かつ予測可能な定常回転ブラックホール解は, ホライズンが連結な解析的部分多様体ならば, Kerr-Newman解に限られ質量, 角運動量, 電荷で一意的決まる.

非線形σモデル

- 計量のGeroch分解

- Killingベクトル ξ が存在するとき、時空計量は

$$ds^2 = e^{-2U} (\gamma_\Sigma - \epsilon \xi_* \otimes \xi_*)$$

- ここで, $N = g(\xi, \xi) = -\epsilon e^{2U}$.

- 複素ポテンシャル

$$\mathcal{F} := F + i * F$$

$$\mathcal{L}_\xi F = 0 \Rightarrow d\Phi = I_\xi \mathcal{F}$$

- Ernstポテンシャル

$$\omega := *(\xi_* \wedge d\xi_*)$$



$$d\mathcal{E} = -dN + i\omega - 2\bar{\Phi}d\Phi$$

- 非線形σモデルへの埋め込み

- Kinnersleyベクトル

$$v = \frac{1}{2|N|^{1/2}} (\mathcal{E} - 1, \mathcal{E} + 1, 2\Phi)$$



- $X \in \text{SU}(1,2) \cap \text{H}(3)$

$$X_{ab} = \eta_{ab} + 2\epsilon \bar{v}_a v_b$$

- $\text{SU}(1,2)/\text{S}(\text{SU}(2) \times \text{U}(1))$ -
σモデル

$$J := X^{-1} dX$$

$$S = \frac{1}{2} \int_{(\Sigma, \gamma)} * \text{Tr}(J \cdot J)$$

$$\delta S = 0 \Leftrightarrow d * J = 0$$

Mazur恒等式 $\Psi = X_2 X_1^{-1} - 1, \quad \Delta J = J_2 - J_1$

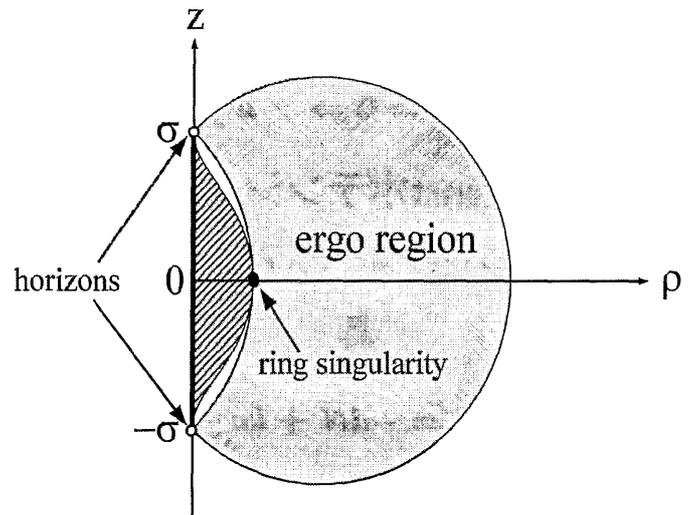
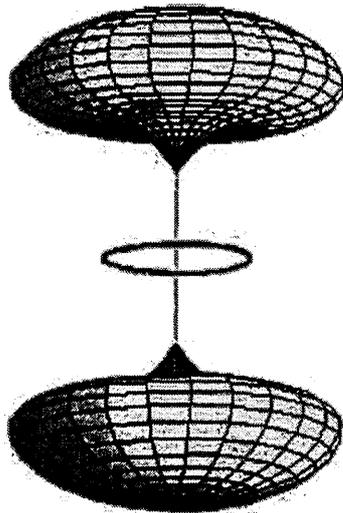
$$-d^\dagger d \text{Tr} \Psi = \text{Tr} (X_{(1)}^{-1} \Delta J^\dagger, X_{(2)} \Delta J) \geq 0$$

宇宙検閲仮説

弱い宇宙検閲仮説[Penrose 1969] 重力崩壊により
生み出される時空特異点はホライズンの内側に隠
される。

宇宙検閲仮説は、一意性定理から実際の現象
についての予言をする上で決定的な重要性を
もつ。

$\delta=2$ の富松佐藤解



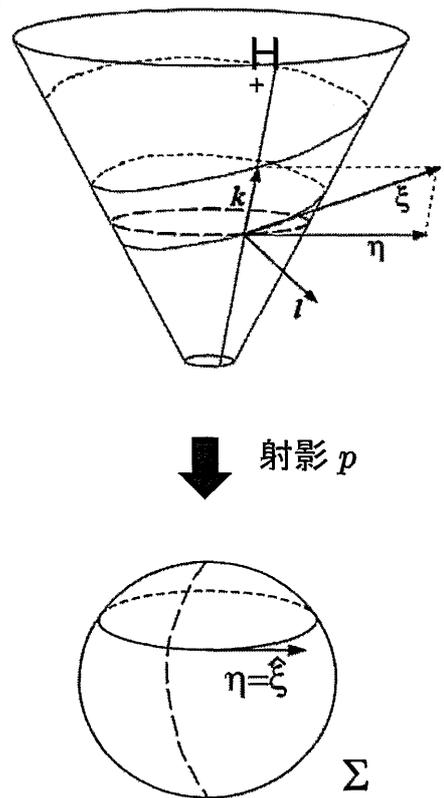
Kodama & Hikida,
Class.Quant.Grav.20:5121-
5140,2003

一般剛性定理

一般次元での剛性定理[Hollands, Ishibashi, Wald 2007] 解析的な定常回転ブラックホール解は、ホライズンが連結な解析的部分多様体ならば、軸対称である。

(証明の概要)

- H^+ の光的接ベクトルを k , 各光的生成母線を一点につぶして得られる軌道空間を Σ とする. $p: H^+ \rightarrow \Sigma$
- BHが回転的なら, ホライズン H^+ 上で時間推進のKillingベクトル ξ は空間的なので, $\xi' = p_* \xi$ は Σ のKillingベクトルとなる.
- ξ' の軌道がエルゴード的でない時には, 軌道は単純閉曲線となり($\xi' = \Omega_h \partial_\phi$), 適当に $f(\phi)$ を取ると, $\eta = \xi - f k$ は H^+ の構造を保ち, かつ H^+ 上での軌道が閉曲線となる.
- 時空および H^+ が解析的な場合には, Einstein方程式を用いると, η を時空全体の回転的Killingベクトルで $[\xi, \eta] = 0$ を満たすものに解析的に拡張できることが示される.
- ξ' の軌道がエルゴード的な時にも, Σ がより高い対称性を持つことより, Killingベクトルを適当に取り替えることにより, 同様の議論ができることが示される.



一般化されたWeyl形式

$D=N+3$ 次元時空が、静的でかつ空間的な $U(1)^N$ 対称性を持つとすると、

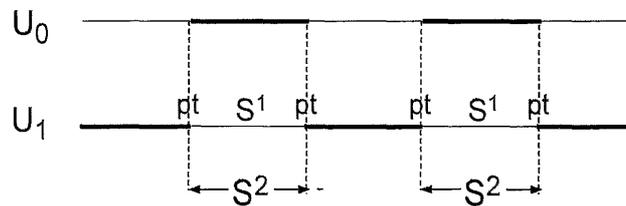
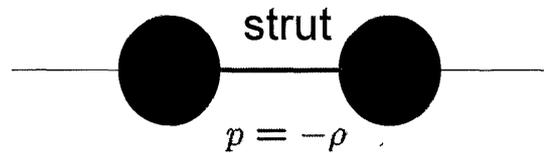
- 計量

$$ds^2 = -e^{2U_0} dt^2 + \sum_{i=1}^{D-3} e^{2U_i} d\phi_i^2 + e^{2\nu} (d\rho^2 + dz^2)$$

- Einstein 方程式は次の線形PDE系に帰着：

$$\rho^{-1} \partial_\rho (\rho \partial_\rho U_i) + \partial_z^2 U_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{D-3} U_i = \ln \rho$$

- ブラックホール解の重ね合わせが可能.

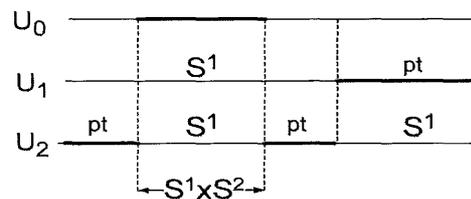


Israel-Kahn解に対するロッド図式

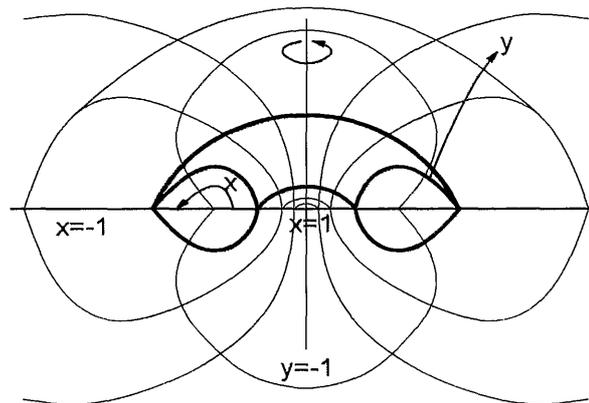
静的なブラックリング解

$$ds^2 = -\frac{F(y)}{F(x)}dt^2 + \frac{1}{A^2(x-y)^2}F(x) \left[(1-x^2)d\phi^2 + (y^2-1)d\psi^2 \right. \\ \left. + \frac{dx^2}{(1-x^2)F(x)} + \frac{dy^2}{(y^2-1)F(y)} \right]$$

5次元では、 $\mathcal{R} \times U(1)^2$ 不変な真空解に対する一般化されたWeyl形式を用いると、ホライズントポロジータが $S^1 \times S^2$ となる漸近的平坦な静的ブラックリング解を構成できる。ただし、膜状の特異面をもつ [Emparan, Reall 2002]



Static Black Ring



回転する正則ブラックリング解

膜状の特異性はブラックリングに適切な回転を与えることで解消できる. [Emparan, Reall 2002]

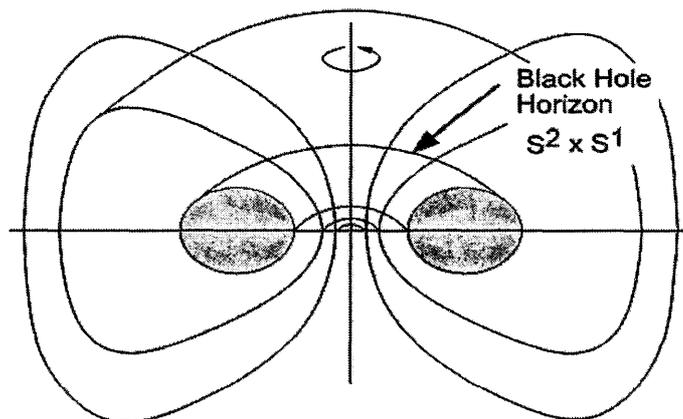
- 漸近的に平坦な正則解で, 2個ののパラメータをもつ.
- ホライズン位相: $S^1 \times S^2$
- 特定の2次元面内でのみ回転 (S^1 方向).

$$M = R^2 \hat{M}(\nu), \quad J_\psi = R^3 \hat{J}(\nu), \quad J_\phi = 0$$

($0 < \nu < 1$).

- 質量 M と角運動量 J を指定しても, パラメータ ν は一般に2個の異なる値を取り得る.

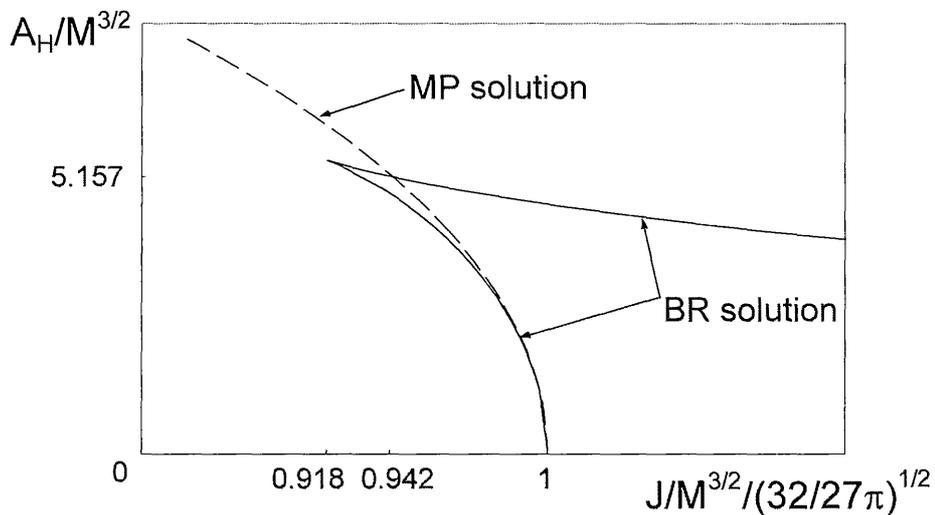
$$j^2 := \frac{27\pi J^2}{32GM^3} = \frac{(1+\nu)^3}{8\nu}$$



5次元回転ブラックホールの非一意性

5次元では, 2つの軸対称定常正則回転ブラックホール解が存在:

- Myers-Perry解 (1986): 3 params, horizon $\approx S^3$
- ブラックリング : horizon $\approx S^2 \times S^1$
 - Emparan-Reall解(2002): 2 params
 - Pomeransky-Senkov解(2006): 3 params



Belinsky-Sakharov法

- 既知の解 (seed) から新しい解を生成する組織的方法.
 - R^{D-2} 対称性を持つ時空にのみ適用可能.
 - 新たな解には, ブラックホール (リング) の質量, 角運動量, 位置に対応に対応するパラメータが附加される.
- 4次元では, 一意性定理のため, この方法は正則な解を生成する方法としては無用であった.
- 5次元では, 一意性定理が成り立たないため, この方法により新しい正則解を生成できる. [Mishima, Iguchi, Tomizawa 2006]
- 6次元以上では, 漸近的に平坦な解を生成することはできない.

複合型のブラックリング解

Belinsky-Sakharov法(ソリトン法)を用いると, ブラックホール解やブラックリング解の重ね合わせに対応する様々な解を構成できる. [Elvang, Figueras 2007]

- これらの解のホライズンは, 複数の S^3 と $S^2 \times S^1$ の直和.
- すべて, $R \times U(1)^2$ の対称性をもつ.
- この対称性を仮定すると, 角運動量付きロッド図式を指定すると解は一意的だが, 存在や異なるロッド図式に対応する解の関係は不明[Hollands, Yazadjiev 2008].

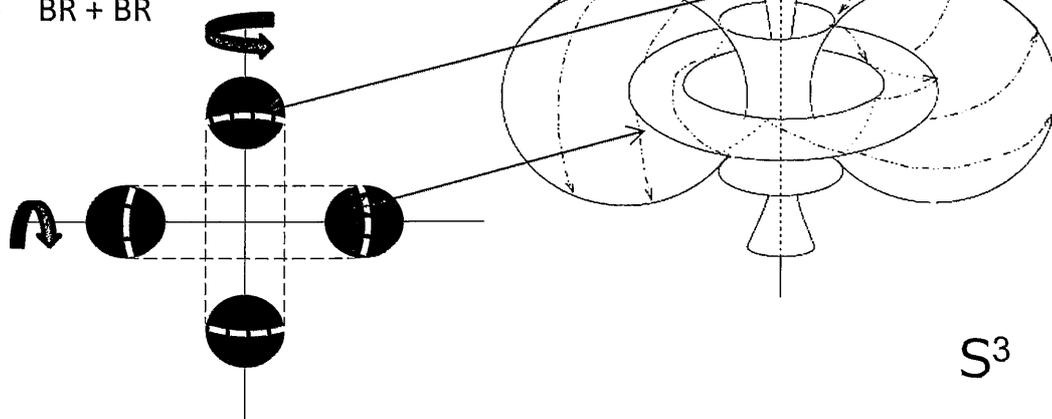
例

ブラックサターン解

- BH + BR.
- 反対方向に回転し, 全角運動量ゼロの正則解も存在.

バイサイクリングBR解

- BR + BR



5. 安定性

摂動論による安定性解析

定常ブラックホール解 : $\text{Ric}(g)=0$



摂動解 : $\text{Ric}(g+h)=0$



線形摂動方程式 : $LD(g)h=0$



QNM解析

$h \propto e^{-\omega t}$: $\Im(\omega) \leq 0$?

No

不安定!!!

Yes

安定

BHを叩いて
みて音を聞く

問題点

- 摂動方程式は混合型連立偏微分方程式系(双曲型+楕円型)
- ゲージ不変性: $LD(g) L_X g=0$
- 一般に ω^2 に対する自己共役固有値問題とならない.

静的Einsteinブラックホール

$$g(\text{BH}) = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + S(r)^2g(K_n)$$

- K_n がEinstein空間のとき, 摂動 h は K_n 上の既約テンソル型と対応した3つのタイプに分類される. これらは力学的に分離する.

- テンソル型: $T^i{}_i=0, D_j T^{ij}=0 \Rightarrow T_{ij}$

- ベクトル型: $D_i V^i=0 \Rightarrow V_\nu, D_i V_j + D_j V_i$

- スカラ型: $s \Rightarrow D_i s, s g_{ij}, D_i D_j s$

- 各型の摂動は, 調和テンソル展開により, ゲージ不変量に対する1個の自己共役型2階ODE(マスター方程式)に帰着される:

$$\omega^2 \Phi = (-D^2 + V_\ell(r))\Phi, \quad D = f(r)\partial_r$$

$$\Rightarrow \omega^2(\Phi, \Phi) = \int dr f(r)^{-1} (|D\Phi|^2 + V_\ell(r)|\Phi|^2)$$

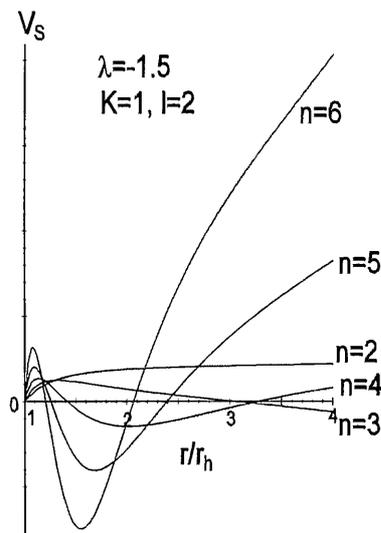
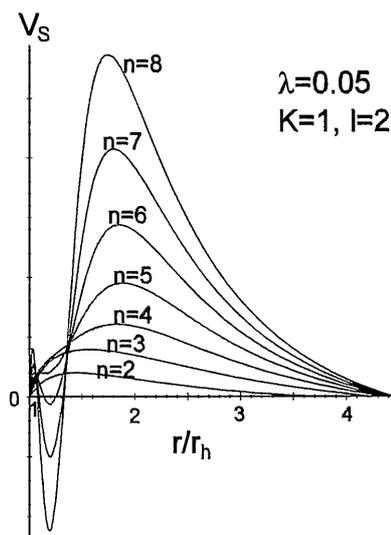
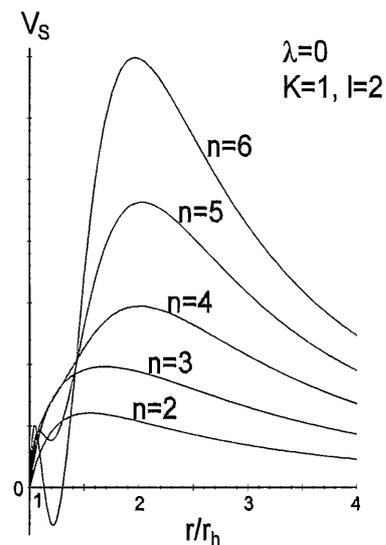
- 特に, $V_\ell(r) \geq 0$ なら, 摂動的に安定. しかし, $V_\ell(r) < 0$ となる領域が存在しても, 不安定とは言えない.

Kodama H, Ishibashi A 2003;
Regge T, Wheeler J 1957; Zerilli F 1970]

有効ポテンシャルの振る舞い

$$\hat{\Delta}_L h_{ij} := -\hat{D} \cdot \hat{D} h_{ij} - 2\hat{R}_{ikjl} h^{kl} + 2(n-1)K h_{ij}.$$

- 一般のEinstein空間ではLichnerowicz作用素の最小固有値が不明であるため、テンソル型摂動に対する安定性は不明.
- 一般に、ベクトル型やスカラー型摂動に対しては、高次元で $V(r)$ が正定値でなくなる.



S変形

$$\dot{E} = 0: \quad E = \int_{r_h}^{r_\infty} \frac{dr}{f} [(\partial_t \Phi)^2 + (D\Phi)^2 + V\Phi^2]$$



$$\bar{D} = D + S(r)$$

$$E = \int_{r_h}^{r_\infty} \frac{dr}{f} [(\partial_t \Phi)^2 + (\bar{D}\Phi)^2 + \bar{V}\Phi^2]$$

$$\bar{V} = V + f \frac{dS}{dr} - S^2$$

例：高次元Schwarzshild BH

$$V_\ell = \frac{f(r)U(r)}{4r^2 \{2m + n(n+1)x\}}, \quad m = (\ell-1)(\ell+2), \quad x = 2M/r^{n-1}$$

$$U(r) = n(n+1) [4(2n^2 - 3n + 4)m + n(n-2)(n-4)(n+1)] x^2 + n^4(n+1)^2 x^3 - 12n [(n-4)m + n(n+1)(n-2)] mx + 16m^3 + 4n(n+2)m^2.$$



$$S = f(r) \left(\frac{n+2\ell-1}{2r} + \frac{1}{h} \frac{dh}{dr} \right)$$

$$h \equiv (\ell-1)(\ell+n) + n(n+1)x/2$$

$$\bar{V}_\ell = \frac{f(r)\bar{U}(r)}{4r^2 h},$$

$$\bar{U}(r) \equiv \ell x [\ell n(n+1)x + 2(\ell-1)\{n^2 + n(3\ell-2) + (\ell-1)^2\}] > 0$$

Table 1: **Stabilities of generalised static black holes.** In this table, “ d ” represents the spacetime dimension, $n + 2$. The results for tensor perturbations apply only for maximally symmetric black holes, while those for vector and scalar perturbations are valid for black holes with generic Einstein horizons, except in the case with $K = 1, Q = 0, \lambda > 0$ and $d = 6$.

		Tensor $\forall Q$	Vector $\forall Q$	Scalar	
				$Q = 0$	$Q \neq 0$
$K = 1$	$\lambda = 0$	OK	OK	OK	$d = 4, 5$ OK $d \geq 6$?
	$\lambda > 0$	OK	OK	$d \leq 6$ OK $d \geq 7$?	$d = 4, 5$ OK $d \geq 6$?
	$\lambda < 0$	OK	OK	$d = 4$ OK $d \geq 5$?	$d = 4$ OK $d \geq 5$?
$K = 0$	$\lambda < 0$	OK	OK	$d = 4$ OK $d \geq 5$?	$d = 4$ OK $d \geq 5$?
$K = -1$	$\lambda < 0$	OK	OK	$d = 4$ OK $d \geq 5$?	$d = 4$ OK $d \geq 5$?

[Kodama H: Lect. Notes Phys. 769: 427-70 (2009)]

(注) 球対称ブラックホール($K=1$)については, ($\lambda > 0, Q \neq 0$)を除いて, $D \leq 11$ で安定性が数値的に示されている. 一方, ($\lambda > 0, Q \neq 0$)の場合には, $D \geq 7$ で不安定という数値計算の結果が得られている. [Konoplya R, Zhidenko A 2007, 2008]

ブラックブレン

直積型の時空

$$M_D = X_m \times Y_n; \quad g(M) = g(X) + g(Y)$$

真空Einstein方程式

$$R_{\mu\nu}(X) = \lambda g_{\mu\nu}(X), \quad R_{pq}(Y) = \lambda g_{pq}(Y).$$

➤ $D \leq 4$ では、可能な解は局所的に有限個:

$$E^{m-1,1} \times E^n, \quad dS^2 \times S^2, \quad AdS^2 \times H^2$$

➤ $D \geq 5$ では、 $m \geq 4$ なら無限個の局所同型でない解が存在:

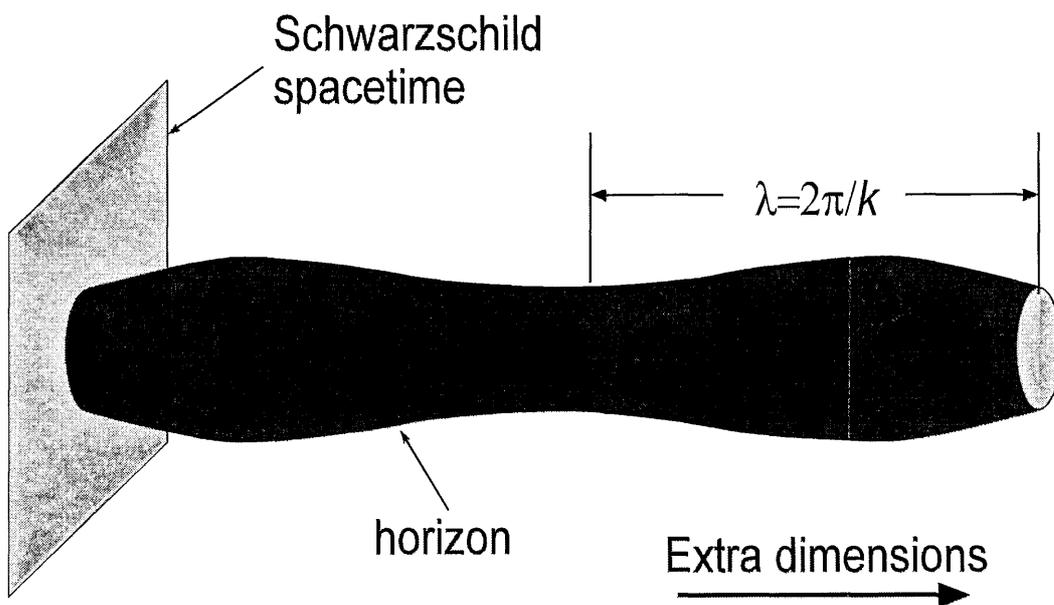
e.g.

An arbitrary 4-dim black hole $\times (\mathbb{R}^n, T^n)$

Gregory-Laflamme 不安定

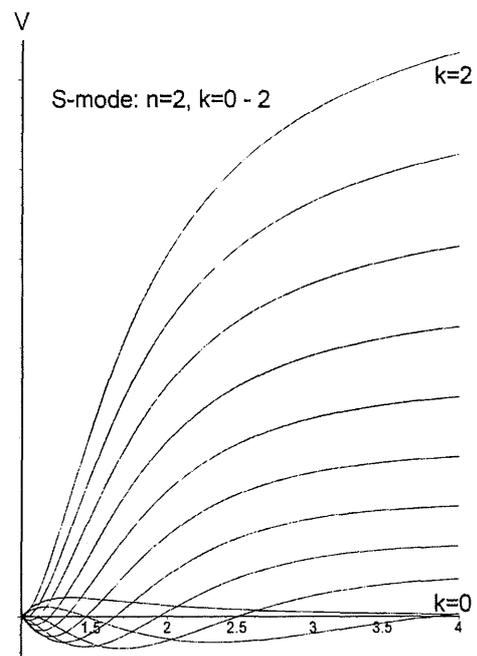
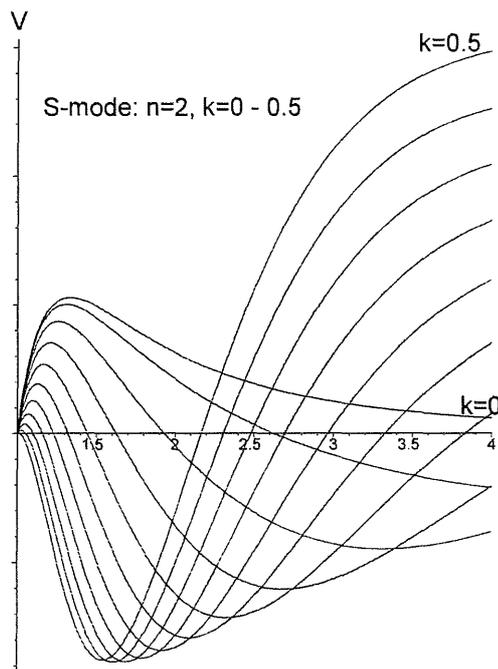
ブラックストリング(ブレーン)は, 球対称でストリング方向に周期的な変形(Sモード)に対して, 波長 λ がある臨界値 $\lambda_0 = O(r_h)$ を超えると不安定となる.

[Gregory & Laflamme 1993]



Sモード

- Sモードの摂動方程式は、 $\omega^2 \Psi = (-D^2 + V_k) \Psi$ 型のマスター方程式に帰着される。
- 有効ポテンシャル $V_k(r)$ は、波数 $k=2\pi/\lambda$ が $0 < k_2 < k_0^2 = O(1/r_h^2)$ で負の領域をもつ。



一般モード

- 一般モードの大部分に対しては、摂動方程式は単独2階ODE型のマスター方程式に帰着出来ない。
- 連立ODE型に帰着できる場合も、自己共役作用素に対する固有値問題とならない。
 - 例えば、4次元から見てベクトル型摂動に対する摂動方程式は、次の連立系に帰着される。

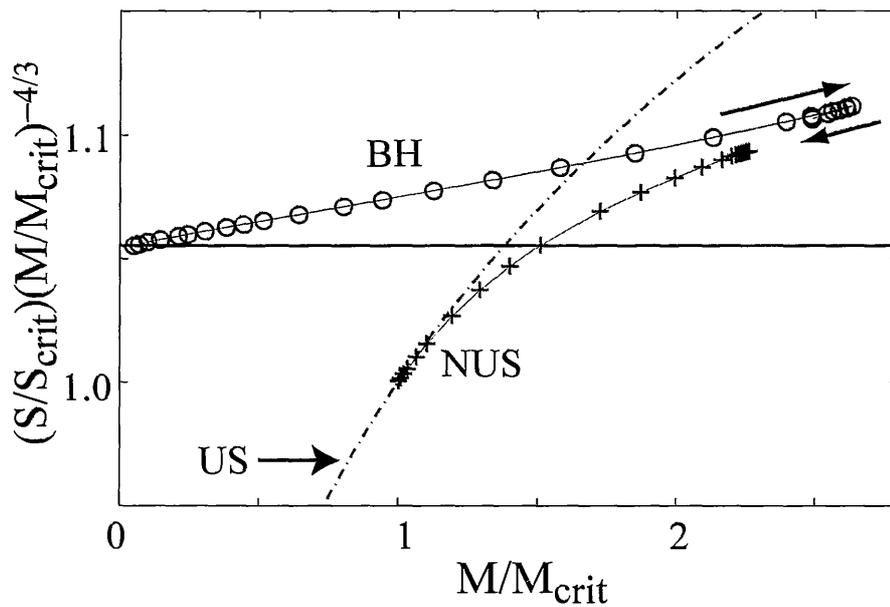
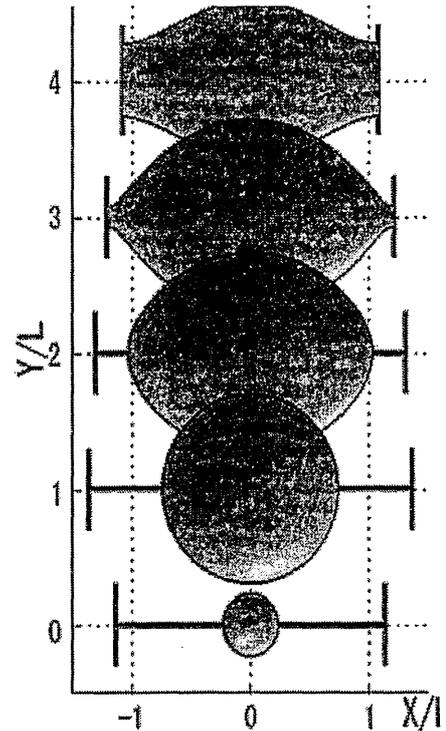
$$\omega^2 \Psi = (-D^2 + V(r) + f(r)A) \Psi :$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2k^2}{n+1} + \frac{(n+2)f'}{2r} & -\frac{2k^2}{n+1} \\ \frac{2k^2}{n+1} & -\frac{2k^2}{n+1} - \frac{n}{2r}f' \end{pmatrix}.$$

- ただし、これまでの数値計算ではSモード以外に不安定モードは発見されていない。

Gregory-Laflamme 不安定からの帰結

MXS¹型時空のブラックホール解は一意的でない。
 [Kudoh & Wiseman 2003, 2004]



不安定性の末路は？

- 裸の特異点？

- Hawking-Ellisの定理により、ブラックホールのホライズンは、裸の特異点ができないとすると、分岐しない。
- たとえ裸の特異点を許しても、ブラックストリングが有限時間で球状のブラックホールにちぎれることはできない。 [Horowitz & Maeda 2001]

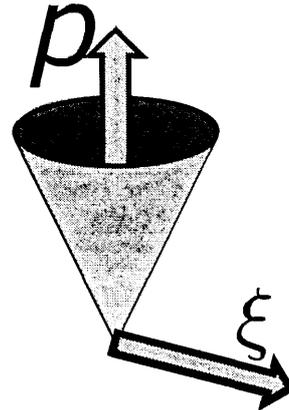
- Kaluza-Klein泡

一様BS解, 非一様BS解, 球形ブラックホール解に加えて, 複数のブラックホールと静的 Kaluza-Klein泡が共存する解の族が存在。 [Elvang & Horowitz 2003; Elvang, Harmark & Obers 2005]

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times S^m : ds^2 = -dt^2 + \frac{dr^2}{f_n(r)} + r^2 d\Omega_n^2 + f_n(r) du^2$$

Penrose過程

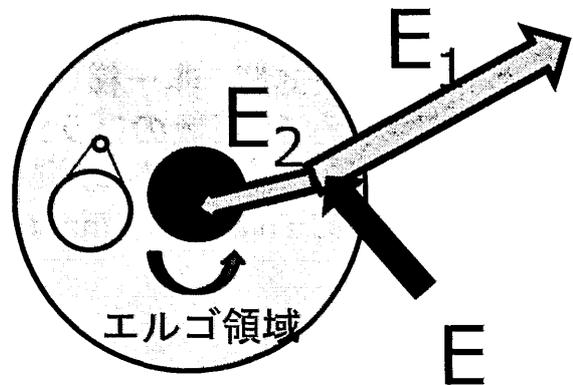
- エネルギー保存則
 - p を自由粒子のエネルギー運動量ベクトル, ξ を時間推進のKillingベクトルとすると, $E = -\xi \cdot p$ は保存される:



$$\dot{E} = -\nabla_u(p \cdot \xi) = -p^a u^b \nabla_{(b} \xi_{a)} = 0$$

- 回転ブラックホールのエルゴ領域

- ξ が空間的となるため, 物理的な粒子が負エネルギー $E = -\xi \cdot p < 0$ を持ち得る.
- エルゴ領域での反応により, ブラックホールからエネルギーを取り出すことができる.



$$E_1 = E - E_2 > E$$

増幅反射不安定

- Klein-Gordonノルム
 - スカラ場 Φ に対して, 次のノルムが保存される.

$$N(\Phi, \Phi) = -i \int_{\Sigma} *(\Phi^\dagger d\Phi - d\Phi^\dagger \Phi)$$

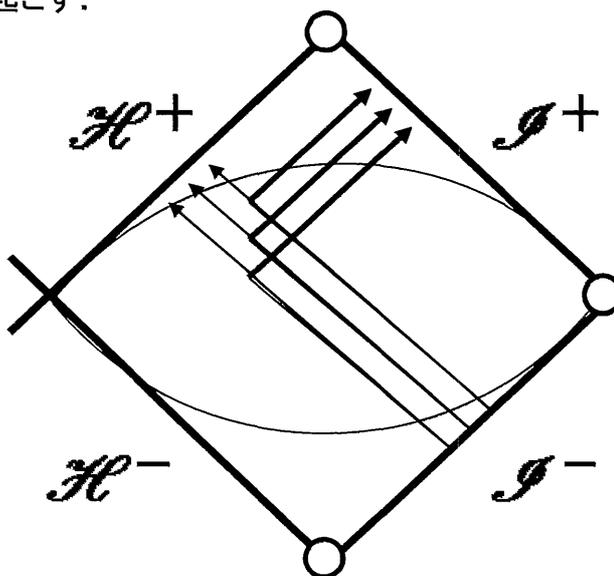
- 増幅反射(superradiance)
 - 回転ブラックホールで散乱される波動

$$\Phi = A e^{-i\omega t + im\phi}$$

に対して, H^+ に落ち込むフラックスは負になり得る. この場合, 散乱波のフラックスは入射波より大きくなる.

$$I_{\text{out}} = I_{\text{in}} - I_H > I_{\text{in}} \quad I_H = \int_{H^+} (\omega - m\Omega_h) |A|^2$$

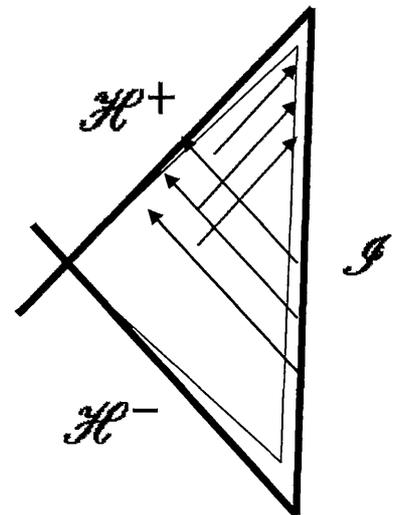
- ブラックホール爆弾
 - 質量を持つスカラ場では, ポテンシャル障壁での反射と増幅反射の繰り返しにより, スカラ場の振幅は指数関数的な増大を起こす.



回転するBH, BRの不安定性

- 回転ブラックホール

- 漸近的に adS となる単純回転ブラックホール ($a_1 \neq 0, a_2 = \dots = a_N = 0$) は, 宇宙項から決まる臨界角速度を超えると, 増幅反射 (superradiance) の効果で不安定. [Kodama H 2007; Kodama, Konoplya, Zhidenko 2008].
- 漸近的に adS となる奇数次元の特殊回転ブラックホール ($a_1 = a_2 = \dots = a_N$) も, 回転角速度が十分大きいと不安定. [Kunduri, Lucietti, Reall 2006]
- (予想) 漸近的に平坦な単純回転ブラックホールも, $D > 5$ で十分回転が速いとき, Gregory-Laflamme 型の不安定が起きる [Empanan, Myers 2003]



- ブラックリング

- (予想) 十分細いブラックリングは, Gregory-Laflamme 型の不安定性をもつ. [Empanan, Reall 2002]

6. まとめ

まとめ

高次元重力の世界は非常に豊かで魅力的なものであるが、その全貌はまだ霧の中である。

- 高次元では、ブラックホールの一意性定理は成り立たず、正則なブラックホールを一意的かつ過不足なく記述するパラメーター(モジュライ空間の構造)は不明。
- 6次元以上では、ホライズンが球以外にどのような位相を持ちうるのかほとんどわかっていない。たとえば、6次元以上でブラックリング型解が存在するかどうかもわかっていない。
- 高次元ブラックホールは、様々なメカニズムで不安定になるが、安定性の判定基準は多くの場合不明。また、不安定性の行き先も不明。
- 高次元では、無限遠の構造は多様になるが、漸近的に単純でない場合の解の多様性についてはほとんど研究が進んでいない。