Towards a Categorical Construction of Lie Algebras*

斎藤恭司 （京都大学数理解析研究所）述

松澤淳一 (奈良女子大学理学部) 記

2007年3月21日

1 序

カテゴリーの理論を使ったリー環の構成について紹介したい．その前に，前提となる群論，リー環論など，対称性を扱う数学について一言ふれておきたい．

群という言葉がはっきり意識されだしたのは１９世紀の前半からである．Cauchy による置換群，ガロアによる Galois 群，その後，Jordan，Klein，Lie などの人々の仕事があげられる．今でこそ，これらの仕事は当たり前のことのように受け入れられているが，これは驚くべき革命であったと思う．例えば，代数方程式の可解性について考えるてみる．それ以前は，代数方程式や，その根そのものを研究の対象としていたのであるが，根を置き換える操作という実体のない空論のようなもの，一見，空をつかむような話と思われかねないものを数学の対象として認識し，それを群という言葉で繋ぎとめた結果，それまで個別に根を扱っていたのでは見えなかった構造，例えば方程式の代数的可解性などの問題が数学的に取り扱えるようになったのである．さらに，この群の発見は代数方程式に限らず，例えば微分方程式の Lie 理論など，とてつもない数学の変革を引き起こし，それまで千年，二千年かかった方程式論が，ガロア理論の発見の後，わずか150年ほどの間に現代に至る革命的な変化を遂げたのである．

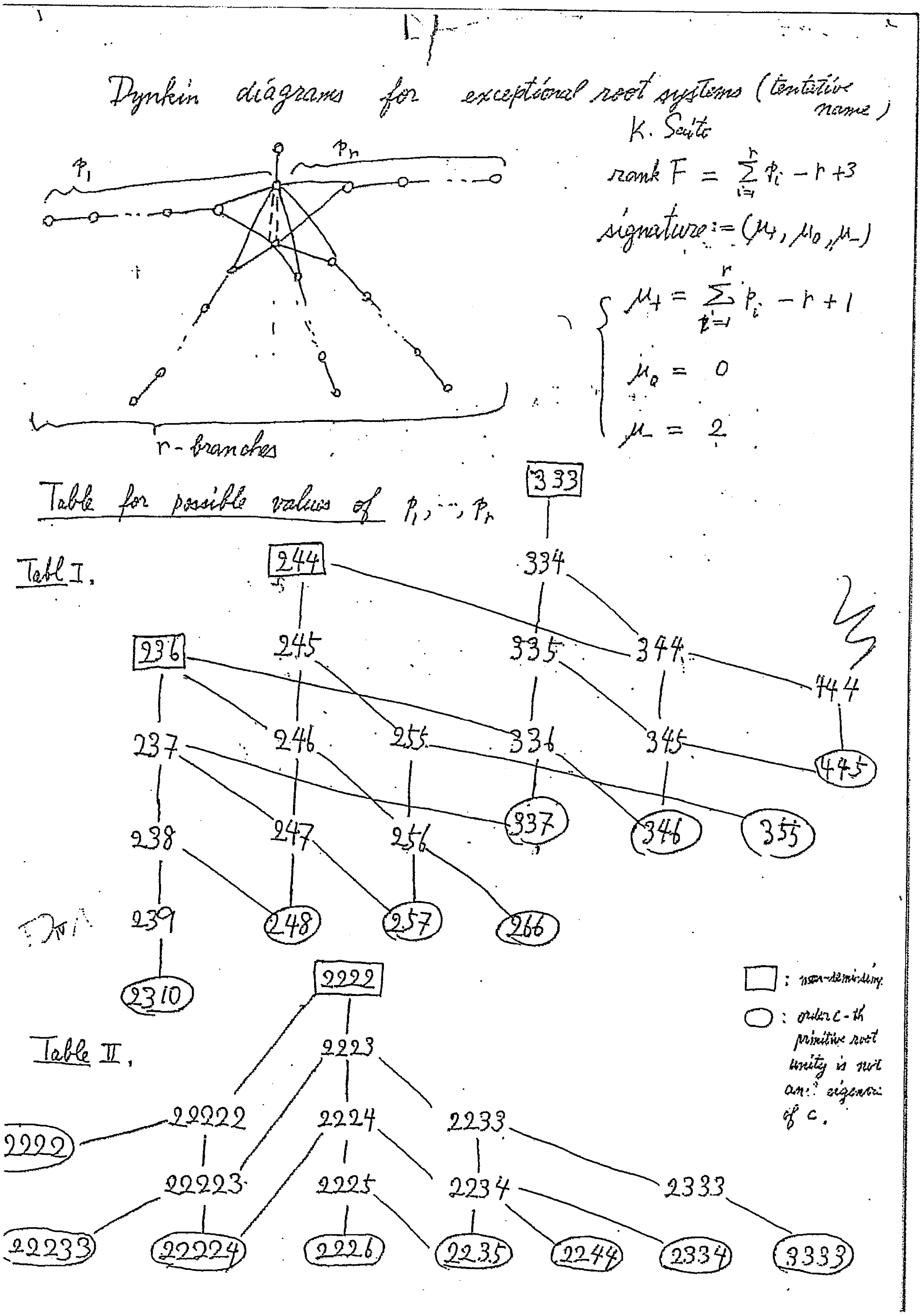
このような群の発見に匹敵する発見が，カテゴリー論の発見であると私は思っている．カテゴリーとは，数学的な対象（object）の範囲を一つ定め，その中の任意の２つの対象 X, Y に対して，X から Y への射 (morphism) と呼ばれるものの集合 $\mathrm{Hom}(X, Y)$ が決められ，しかるべき公理系をみたす数学的概念である．カテゴリーも実体のない空論のよう

* 当講演は，同一表題の論文 [29] にもとづいて行った講演である．

に見みえるが，実は，思った以上に或る種の構造をはっきり決定する概念であり，群論がそれ以前の数学に対して，大きな支配力を持ったのと同じ位の支配力を持つのではないかという印象を，ここ数年の研究で抱くようになった．

ここにお見せする絵（図 1）は，２０年ぐらい前に作成した，ある複素多様体のホモロジー群の基底を頂点と思って，それらの間の交叉の様子を表した図である（第 8 節で解説する）． 当時は，そのホモロジー群に，一般化したルート系という付加構造を付け加えることにより，苦労して基底を見つけ出した． 一方，最近，高橋篤史，梶浦宏成両氏との共同研究で，ある種の triangulated category を研究すると，その exceptional collections としてこれらのダイアグラムが出てくることがわかった．それ（exceptional collections）は上記のダイアグラム（図１）を quiver まで持ち上げた構造を持っている．別の言い方をすると，20 年前のホモロジー群の研究は，ある triangulated category の K 群の研究にリフトされたのである．このように，圏論により，古典的なプラトンの対称性や，後で説明するような人々の仕事を大幅に拡張していくような手段が得られるのではないか，という感じを抱くようになった．この講義では，これらの事を紹介したい．詳しくは文献 [28, 29] を参照いただきたい．

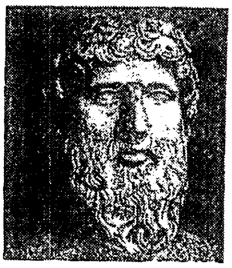
後記：このノートは，私の 2007 年 3 月 21 日に行われた講義をもとに，松澤淳一氏が作成されたものです．私のとりとめない話をこのように，形あるものにまとめていただいた松澤さんに深く感謝します．



Dynkin diagrams for exceptional root systems (tentative name)
K. Saito
p_1
p_r
r-branches
rank F $= \sum_{i=1}^{r} p_i - r + 3$
signature $:= (\mu_+, \mu_0, \mu_-)$
$\mu_+ = \sum_{i=1}^{r} p_i - r + 1$
$\mu_0 = 0$
$\mu_- = 2$
Table for possible values of $p_1, \cdots, p_r$
Table I.
333
244
334
236
245
335
344
444
237
246
255
336
345
445
238
247
256
337
346
355
239
248
257
266
2310
Table II.
2222
2223
22222
2224
2233
2222
22223
2225
2234
2333
22233
22224
2226
2235
2244
2334
3333
: non-degenerate
: order c-th primitive root unity is not an eigenvalue of c.

図 1

2　プラトンの対称性および歴史的な流れ



プラトン　Platon
(427～347 B.C.　ギリシャ)

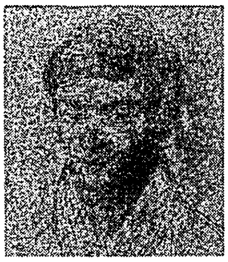
ユークリッド　Euclid
(330？～275？B.C.
ギリシャ、アレクサンドリア)

現代から見れば，群や Lie 環など，いろいろな種類の対称性，あるいはそのバリエーションがあるが，そのなかで，最も古いものとして，プラトンの対称性とも呼ぶべきものがある．本稿ではこのプラトンの対称性とは何か，それがどのように拡張され，どのような形で Lie 環論とつながり，さらに現在どのような一般化がなされつつあるかということを解説する．

プラトンの著作「チマイオス」([22]) に，当時有力であった四元素説に対応して，物質の構造に関する議論があり，宇宙の根源要素の形状としてふさわしい立体，理想的な形状を持った立体として 5 つの正多面体が紹介されている．これが，正多面体をプラトン立体と呼ぶ所以である．さらに，ユークリッドは，「原論」の最後の章において，正多面体の作図を取り上げている．正多面体はどれも 2 次方程式を解くことで描けるので，定規とコンパスを使って作図できる．これを実際にユークリッドはやって見せた．そこでは 二次方程式を解くという数論的課題と 対称性を持つ図形を作図するという 幾何的課題が 見事に融合しており，原論最後の章を飾るにふさわしい．これが 後長く 影響を与え続ける 対称性の起源の 一つである．プラトンの対称性と言う言葉でもって これらの正多面体の持つ対称性及びそれから 付随して生じる 種々の 構造の 対称性を 総称して言うことにしよう．いずれにせよ，対称性という概念は群が認識される以前，少なくとも古代ギリシアの時代からすでにあったのである．

では対称性とは何か．ここで一挙に 200 近く前のパリに話は飛ぶ．ある対象物の集合に対して，その元を置換するという操作を数学的対象として，はっきり認識したのは，

Cauchy が最初であろう．Galois は，代数方程式の根の置換の群が solvable であることと，代数方程式の根号による可解性とが同値であることを見抜いた．すなわち，抽象的な群の構造のみから，対象になった数学に対する帰結を導いた．Galois の全集が出版されたのは 1846 年だったが，これが単に方程式論だけでなく，幾何や解析に影響を及ぼしたのがそれから 20〜30 年後であった．1870 年代のパリで，Klein，Lie といった人たちが群の概念を幾何学に応用することを思いつき，幾何構造を不変にする変換たちのなす変換群を研究し始めた．そして，逆に変換群で不変なものを研究するのが幾何学であるという思想が誕生した．この考えは Klein の有名なエルランゲンプログラムとして発表された．(これは Lie の思想でもあった)．



ガロア　E. Galois
(1811〜1832　フランス)
代数方程式の根の置換の群
積と逆元をもつ体系

クライン　F. Klein
(1849〜1925　ドイツ)
幾何的図型の変換の群
⇒ 不変式論
保型形式

リー　M. S. Lie
(1842〜1899　ノルウェー)
微分方程式の無限小変換
⇒ Lie 環 $\mathfrak{g}$
$X, Y \in \mathfrak{g} \longmapsto [X, Y] \in \mathfrak{g}$

その後，Klein は不連続群の，Lie は連続群の研究へと，それぞれ別々の流れを生み出す．Klein は正多面体の合同変換群の理論から「5 次方程式と正 20 面体群」([15]) に書かれるような研究および保型形式の研究に進む．一方，Lie は連続群を取り扱い，有名な transformation groups (1888)([18]) を著す．また，連続群を微分することにより，今日，リー環とよばれる概念に到達した．1888 年に Killing が有限次元の半単純 Lie 環を調べ始める．この Killing の仕事が完成するのは，その後の Cartan などの人々によるが，Killing のアイデアの帰結として，ルート系というもので半単純 Lie 環が分類されるということになった．このルート系の研究の流れがその後 Cartan，Weyl などの表現論となって行くのである．

一方 Klein の研究の流れは，Du Val による Klein 特異点の解消という形で発展した．この Lie と Klein による研究の流れのなかで，同一のダイアグラムが現れるという不思議な結果が，後で述べるように 1930 年代のケンブリッジで観察されたのである．それらは，さらに下って 1970 年，Brieskorn-Grothendieck 理論として結実するのである．第 3〜5 節で，そこまでを紹介し，プラトンに端を発する対称性が，どのようなものだったか

Lie : Theorie der Transformationsgrupp.

1888

Allgemeinerer Natur waren meine ebenfalls 1869 begonnenen Untersuchungen über Differentialgleichungen, die eine continuirliche Gruppe gestatten.

Ich bemerkte, *dass die meisten gewöhnlichen Differentialgleichungen, deren Integration durch die älteren Integrationsmethoden geleistet wird, bei gewissen leicht angebbaren Schaaren von Transformationen invariant bleiben, und dass jene Integrationsmethoden in der Verwerthung dieser Eigenschaft der betreffenden Differentialgleichungen bestehen.* Mit anderen Worten: ich sah, dass der Begriff der Differentialinvariante einer endlichen continuirlichen Gruppe im Grunde, wenn auch nur *implicite* und *in specieller Form*, in jedem Lehrbuche über die gewöhnlichen Differentialgleichungen vorkommt. Nachdem ich so eine Reihe von älteren Integrationsmethoden unter einen allgemeinen Gesichtspunkt gebracht hatte, stellte ich mir naturgemäss die Aufgabe, für alle gewöhnlichen Differentialgleichungen, die bekannte endliche oder infinitesimale Transformationen zulassen, eine allgemeine Integrationstheorie zu entwickeln. Dabei war es von vornherein klar, dass die betreffenden Transformationen in jedem einzelnen Falle eine Gruppe erzeugen mussten.

Die eben gekennzeichnete Aufgabe habe ich mir selbständig gestellt und habe sie selbständig erledigt. Während ich damit beschäftigt war, stand ich in einem lebhaften Verkehr mit meinem Freunde Herrn Professor *Felix Klein*. Dieser hatte sich seinerseits eine Aufgabe gestellt, welche allerdings von der meinigen verschieden war, aber doch wesentliche Analogien mit derselben darbot. Er betrachtete nämlich überhaupt geometrische und analytische Gebilde, die eine *discontinuirliche* Gruppe gestatten und wollte insbesondere die Theorie der discontinuirlichen Gruppen von *linearen* Transformationen für die Gleichungstheorie verwerthen. So sicher es nun auch ist, dass unsere eingehenden mündlichen und brieflichen Aussprachen über die uns beschäftigenden verwandten Gegenstände auf uns, beide von Einfluss gewesen sind, so bin ich doch ausser Stande, den Umfang dieser gegenseitigen Einflüsse genauer festzustellen; denn bei unserem Verkehr handelte es sich weniger um bestimmte Sätze als um allgemeine Gesichtspunkte.

In den Jahren 1872 und 1873 beschäftigte ich mich mit partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Dabei bemerkte ich, dass die

正多面体と5次方程式 序 1884

vi　序

これはいままで，専門的な講義でしたがってきたのと同じ原則である．(実際には，普通の講義でもそのようにしてきた.) この意味で，私のつけた章や節の題名を理解してほしい．

この短い前置きを終える前に，いろいろな示唆と助言にを与えてくれた，尊敬する友人であるクリスチナ大学のリー教授およびエルランゲン大学のゴルダン教授に特別なる感謝を表明しなければならない．リー教授への恩はわたしたちが学生生活の最終年を親密な友愛の下にベルリンとパリで過ごした1869年–1870年までさかのぼれる．当時，座標変換の群によって変換できる幾何的あるいは解析的な対象を共に思い抱いていた．これらのアイデアはばらばらのように見えるが，引き続く仕事に直接影響する．著者は主として離散作用の群に注目しやがて正多面体と代数方程式との関係の研究に導かれたが，リー教授は連続変換群を伴う微分方程式のより深遠な理論に取り掛かった．— 著者がゴルダン教授と親しく付き合うようになったのは1874年の秋であった．その時にはすでに正20面体の研究を始めていた (しばしば引用する機会のある，私より以前に開始していたシュワルツ氏の研究を知らずに)．しかし，最初のうちはただ練習問題として，問題の定式化のためのあらゆる手段を考えていた．今でははるかに進展した理論が当時始めた2人の議論から生まれたことに対して，まずゴルダン教授に感謝したい．これから本文の中でも詳しく報告する教授の労力をここではことさら取りあげることはしない．ここでは，引用することでは表現できないことを記しておかなければならない．すなわち，ゴルダン教授は著者が苦しんで弱気になった時に激励してくれ，またひとりでは決して打ち勝つことができなかったであろう多くの困難を私心なく手助けしてくれたことである．

ライプチヒ，1884年5月24日

F. クライン

図２　左：Lie の論文「Theorie der Transformatrions gruppen」(1888) の序文：Klein の仕事との交流も書かれている．右：５次方程式と正２０面体の本（１８６９～７０）の序文：Lie との交流が書かれている．

を探る．第6節でこの２つを同一視するというマッカイ対応を紹介し，それを詳しく分析する過程で，ウェイト系の概念が登場することを説明する（第7，8節)．そして，ウェイト系を通じて，ここに登場するいくつかの理論を，もう一つ別のカテゴリーに拡張していくという手段が見つかり，その流れから新しい無限次元のリー理論が生まれる仕組みについて，第9節以降で紹介する．

3　Klein の不変式論から Du Val, Coxeter へ

正多面体の中心から，正多面体を球面に射影をすると，球面の３角形分割が得られる．球面を球面に写す回転は，球面をリーマン球とみなすと，複素平面の自己同型とみなせ，また別の見方をすれば，メビウス変換ともみなせる．

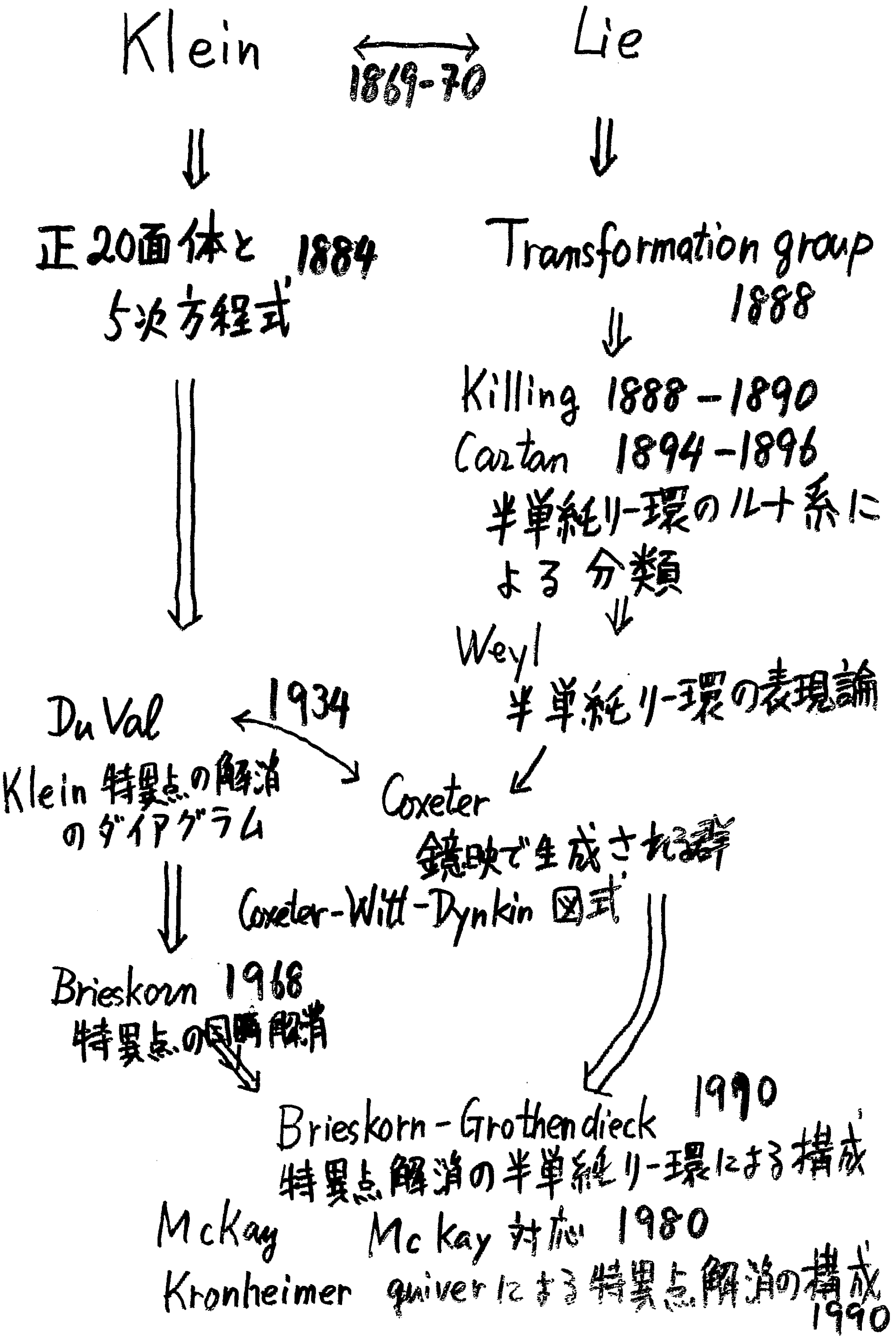
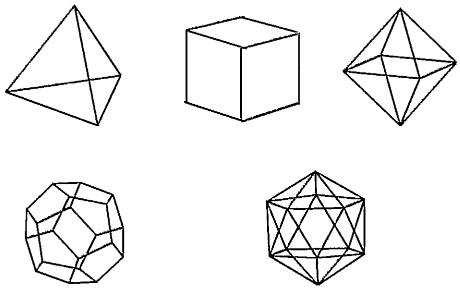


図3　プラトンの対称性：Klein と Lie からの流れ



正多面体群をメビウス変換群とみなして $SL(2,\mathbf{C})$ へリフトすると，$SL(2,\mathbf{C})$ の中の有限部分群が得られる．これを２項正多面体群と呼ぶ（この名称は，正多面体群の２重被覆群になっていることから来ている）．

Klein のしたことは以下の事である．２項正多面体群 $\widetilde{\Gamma}$ の元は $SL(2,\mathbf{C})$ の元であるので，これを２次元のベクトル空間 $\mathbf{C}^2$ に作用させ，さらにこの作用を通じて，２変数多項式環に作用させる．すると，$\widetilde{\Gamma}$ の作用による不変式全体のなす環

$$\mathbf{C}[u,v]^{\widetilde{\Gamma}}$$

は，環として３つの元 X,Y,Z から生成され，それらの間には，ある従属関係があることがわかる．別の見方をすれば，３変数多項式環を，ある多項式 f で割ったものと同型になる．以上が Klein の主張である（この結果は，Schwarz に依るところが大きい）．

例　Klein の特異点

$$\begin{array}{rl}
\text{２項巡回群} & \widetilde{C_n} : f = X^n - YZ \\
\text{２項正２面体群} & \widetilde{D}_{2m} : f = 4X^{m+1} + XY^2 + Z^2 \\
\text{２項正４面体群} & \widetilde{T} : f = 432X^4 - 4Y^3 + Z^2 \\
\text{２項正８面体群} & \widetilde{O} : f = 108X^3 - XY^3 + Z^2 \\
\text{２項正20面体群} & \widetilde{I} : f = 1728X^5 - Y^3 - Z^2
\end{array}$$

３変数の多項式が与えられれば，それらを自然に $\mathbf{C}^3$ 上の複素数値関数と思って，その零面を考えることができる．このように定まる２次元の曲面は，原点のみに特異点（孤立特異点）を持つ曲面となることがわかる．Du Val はその特異点の解消というものを考えた（[12]）．

多項式系の零面として代数多様体 X_0 が与えられたとき，その特異点の解消とは，非特異代数多様体 $\widetilde{X}_0$ と，X_0 への射

$$\widetilde{X}_0 \longrightarrow X_0$$

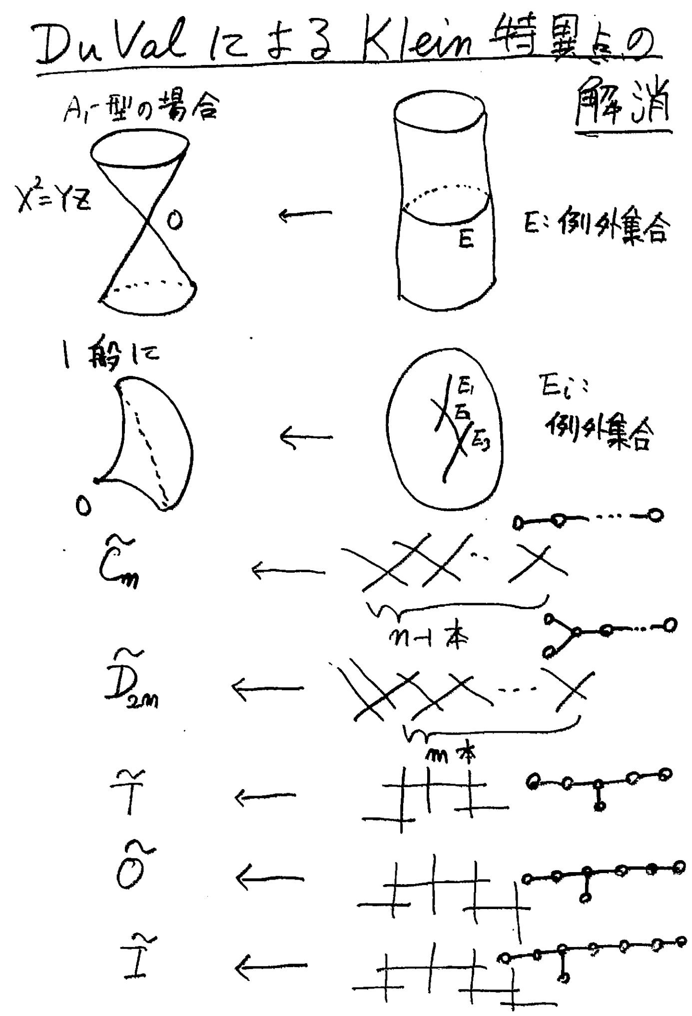


図 4　Du Val による特異点解消とダイアグラム

であって，適当な良い条件をみたすものである．ナイーブな絵を描くと，コーン状の曲面の一点 O（特異点）を膨らませて，シリンダー状にすると特異点が無くなる．この場合，コーンに対してシリンダーが特異点解消を与える (図 4)．

特異点 O をシリンダーに引き戻すと曲線になっている．一般に，特異点の引き戻しは，いくつかの曲線の和になる．これを例外集合と呼ぶ．Du Val は 1934 年の Cambridge の Journal に載せた論文 [12] で，Klein がリストアップした特異点に対して，その特異点解消を与えた．例えば，2 項正 20 面体群 $\widetilde{I}$ に対して，その特異点解消の例外集合は，8 つの射影直線が図 5 のように交叉したものとなる（図の直線は射影直線を表している)．

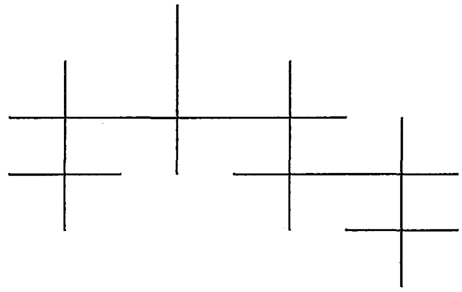


図 5　E_8 型 Klein 特異点の例外集合の交叉の様子

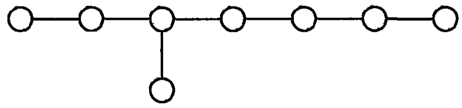


図 6　E_8 型 Coxeter-Killing 図形

このような曲線の交叉に対して，各成分に頂点を対応させ，2 つの成分が交叉するとき，それらの頂点を結ぶと図 6 のようなダイアグラムが得られる．これらのダイアグラムは，第 4 節，図 10 に示されるダイアグラムの集合の一部になっている（それらは，辺が一本線のダイアグラムとして特徴付けられる）．図 10 のダイアグラムには，A から G までのアルファベットが割り当てられていて，ダイアグラムの頂点の数をアルファベットの添え字として書き，これをダイアグラムの型と呼ぶ．また，このようなダイアグラムを与える特異点の型ともいう．

Du Val は，論文の序文の中で次のように述べている．

"It may be noted that the "trees" of curves which we have had to consider bear a strict formal resemblance to the spherical simplexes whose angles are submultiples of π, considered by Coxeter. ...."([12]).

つまり，ここで出てきたダイアグラムが，Coxeter の研究したある種のダイアグラムと非常に似ているということを主張しているのである．Du Val が得たダイアグラムの図を示す（図 7)..

Du Val の論文が掲載されたと同じ雑誌の巻に Coxeter が論文を載せている．その序文には，

"In connection with his work on singularities of surfaces, Du Val asked me to enumerate certain subgroups in the symmetry groups of the "pure Archimedean" polytopes $n_{21}(n < 5)$, namely those subgroups which are generated by reflections.

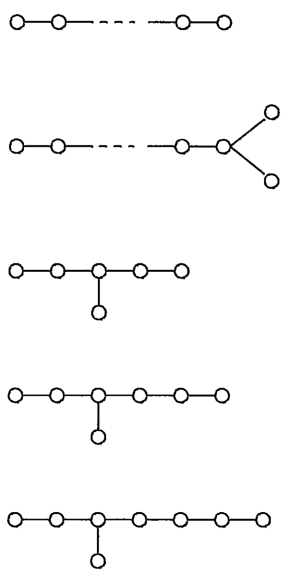


図 7　ADE 型 Coxeter-Killing 図形

....”([11]).

とある．Coxeter は Du Val から問題提起されてこの研究を始め，ある種の鏡映群の生成元と関係式をダイアグラム表示し，そのリストを論文としてまとめたのである．その図（図 8）の中に，まさに Du Val が挙げたダイアグラムが現れるのである．

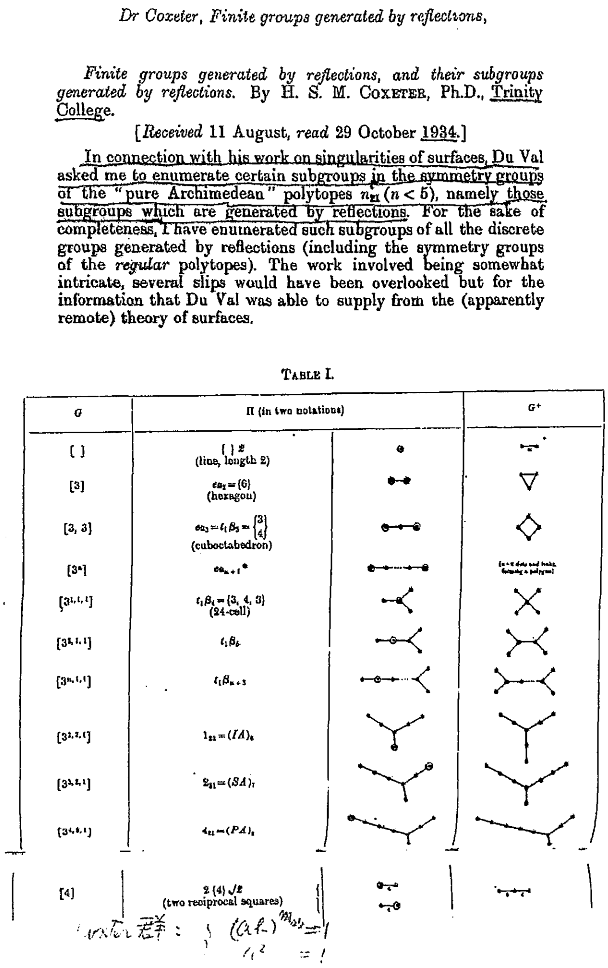
Du Val の立場は，特異点解消という幾何学的なものであるが，Coxeter の方法は純粋に群論的なアプローチである．しかしながら，それらの結果は同一のダイアグラムにたどり着いている．この発見は，二人が，1934 年に同じ Cambridge trinity college にいたという幸運から生まれたものである．

この話題は，その後リー環の話につながり，さらにカテゴリカルにこれらの理論をどうやって作るかという我々の研究に発展していくのである．

4　Killing の思想

次に Lie から始まる流れに移る．1888 年から 1890 年にかけて Killing は一連の論文を発表する ([14])．これらは，有限次元半単純リー環の分類論である．ここで半単純リー環とは，単純リー環の直和となるリー環であり，単純リー環とは，0 か自分自身以外にイデアルを持たぬリー環のことである．このような分類を系統的に研究しはじめたのが Killing である．ここが，我々の研究の源流となっている．

Killing の考えは次のようなものである．$\mathfrak{g}$ をリー環とする．すなわち $\mathfrak{g}$ は $\mathbf{C}$ 上のベク



Dr Coxeter, Finite groups generated by reflections,

Finite groups generated by reflections, and their subgroups generated by reflections. By H. S. M. Coxeter, Ph.D., Trinity College.

[*Received* 11 August, *read* 29 October 1934.]

In connection with his work on singularities of surfaces, Du Val asked me to enumerate certain subgroups in the symmetry groups of the "pure Archimedean" polytopes n_{21} ($n < 5$), namely those subgroups which are generated by reflections. For the sake of completeness, I have enumerated such subgroups of all the discrete groups generated by reflections (including the symmetry groups of the *regular* polytopes). The work involved being somewhat intricate, several slips would have been overlooked but for the information that Du Val was able to supply from the (apparently remote) theory of surfaces.

Table I.

G	Π (in two notations)		G^+
[ ]	{ } 2 (line, length 2)		
[3]	$ea_2 = \{6\}$ (hexagon)		
[3, 3]	$ea_3 = t_1\beta_3 = \begin{Bmatrix}3\\4\end{Bmatrix}$ (cuboctahedron)		
$[3^n]$	ea_{n+1}*		
$[3^{1,1,1}]$	$t_1\beta_4 = \{3, 4, 3\}$ (24-cell)		
$[3^{2,1,1}]$	$t_1\beta_5$		
$[3^{n,1,1}]$	$t_1\beta_{n+3}$		
$[3^{2,2,1}]$	$1_{21} = (IA)_6$		
$[3^{3,2,1}]$	$2_{31} = (SA)_7$		
$[3^{4,2,1}]$	$4_{21} = (PA)_8$		
[4]	2 {4} $\sqrt{2}$ (two reciprocal squares)		

Coxeter 群：$(a_i a_j)^{m_{ij}} = 1$, $a_i^2 = 1$

図 8　Coxeter のリストアップしたダイアグラム

トル空間であって，ヤコビ恒等式等の公理をみたすようなブラケット積 $[X, Y] = -[Y, X]$ が定まっているとする．特に，$[X, Y] = 0, \forall X, Y \in \mathfrak{g}$ のとき，$\mathfrak{g}$ は可換であるという．$\mathfrak{g}$ の極大可換部分環 $\mathfrak{h}$ を考える（今日いう Cartan subalgebra であるが，本当は Killing subalgebra とよぶほうが妥当だと思う）．

$$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{g} & \times & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g} & \\ (A & , & B) & \longmapsto & [A, B] & \text{bilinear} \\ & \cup & & & & \\ \mathfrak{h} & \times & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g} & \end{array}$$

$A \in \mathfrak{g}$ を固定するごとに $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}$ への線形変換 $B \mapsto [A, B]$ が定まる．これを adjoint

作用といい $ad(A)B$ と書く．この変換の行列表示を考える．$\mathfrak{h}$ は可換なので，$\mathfrak{h}$ の元のadjoint 作用は同時対角化ができる．こうして得られた固有値によってリー環の構造がわかるというのが Killing の主張である．

$\mathfrak{h}$ の adjoint 作用を同時対角化して得られた固有値 $\alpha(h)$ $(h \in \mathfrak{h})$ は，$\mathfrak{h}$ 上の線形関数を与えるが，これらは adjoint 作用の固有方程式

$$\det(ad(h) - xI) = 0$$

の根であることから，ルート (Wurzel) と呼ばれる（これが今日いわれるところのルート系の起源である）．$\mathfrak{h}$ の adjoint 作用の固有方程式の根の全体は，$\mathfrak{h}$ 上の線形形式の集合，つまり $\mathfrak{h}^*$ の部分集合 R を定め，ルート系と呼ばれる．ルート $\alpha \in R$ に対して，その固有空間を $\mathfrak{g}_\alpha$ とすると，$\mathfrak{g}$ は次のように固有空間分解する．

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha$$

$\mathfrak{h}^*$ にはルート系が定まるだけでなく，Killing 形式とよばれる内積が入る（今日唯一Killing の名が残っているものである）．Killing は内積が入ることを示しただけでなく，ルート系の基底を研究した（Killing は，これらの構造を全て決定した創始者の一人であるにもかかわらず，Lie があまり評価しなかったせいか，批判的に取り扱われて無視され，Cartan の仕事の方が世に知られている）．これについては，後に Weyl が表現論の立場から Weyl chamber という概念を導入し，その chamber の壁を与えるベクトルとしてルート系の基底を特徴付けた（それ以後，ルート系の基底は単純ルートとよばれることになるが，それよりずっと以前に，何故 Killing がルートの基底という概念に到達したのかということにも興味がある）．今では Cartan の分類定理として知られているが，KIlling はこのルートの基底の分類によって，半単純リー環が分類されることを示したのである．

Weyl によって研究された　Weyl　chamber という重要な概念を説明する．ルート系の基底 $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ に対して定まる鏡映変換 w_{α_i}（$\mathfrak{h}$ に入っている Killing 形式に関して，α_i に直交する超平面に関する $\mathfrak{h}$ の鏡映変換）で生成される群 $\langle w_{\alpha_1}, \ldots, w_{\alpha_l} \rangle$ を Weyl 群という．Weyl 群の基本領域を Weyl chamber とよぶ．これは Weyl が表現論で使った道具である．この Weyl chamber の概念が，我々の研究で重要な役割を果たすことになる．ルート系の基底から決まる鏡映変換の積

$$C = w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_l}$$

を Coxeter 変換という．Coxeter 変換は有限位数であって，その位数 h を Coxeter 数という．

Coeter 変換が有限位数となるような鏡映群を体系的に調べ，鏡映群の基本領域（これは simplicial cone になる）の壁に対応する鏡映を $w_1, \ldots, w_l$ とし，それらに頂点を対応させ，w_i と w_j が可換なら，対応する頂点間には線を引かず，braid relation

$$w_i w_j w_i = w_j w_i w_j$$

が成り立つときは，一本線で結ぶ．このような方針でダイアグラムを描いたものが Coxeter のリスト（図 8）である．

Killng が研究し，Cartan が完成させた半単純リー環の分類に対応して，Coxeter が作った Weyl 群のダイアグラムのリストを見ると，Du Val がリストアップした図形（図 7）と一致することがわかる．これが，1934 年に Cambridge で起きた研究交流である．

ここでルート系の抽象的な定義をしておこう．

ルート系の公理　内積 $\langle , \rangle$ の入った有限次元ユークリッド空間 E の有限部分集合 $R \neq \emptyset$ が既約ルート系であるとは，次がみたされることである．

1. $\forall \alpha \in R$ に対して，直交鏡映
$$s_\alpha : x \mapsto x - \frac{2\langle x, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\alpha$$
は R の元を R の元に移す．
2. (結晶条件)
$$\frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \in \mathbf{Z}, \forall \alpha, \forall \beta \in R$$
3. (既約性)
$$R = R_1 \sqcup R_2, R_1 \perp R_2 \Rightarrow R_1 = \emptyset \quad \text{or} \quad R_2 = \emptyset$$

例：2 次元のルート系

このような公理系を満たすものを分類することが単純リー環の分類となる．

ルート系の基底は次のように特徴付けられる．$l = \dim_{\mathbf{R}} E$ とするとき，R の l 個の元からなる部分集合 $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ で次の性質を持つものが（同型を除いて）唯一つある：

任意のルート $\alpha \in R$ は $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ のすべて非負，またはすべて非正の整数係数の一次結合で表せる

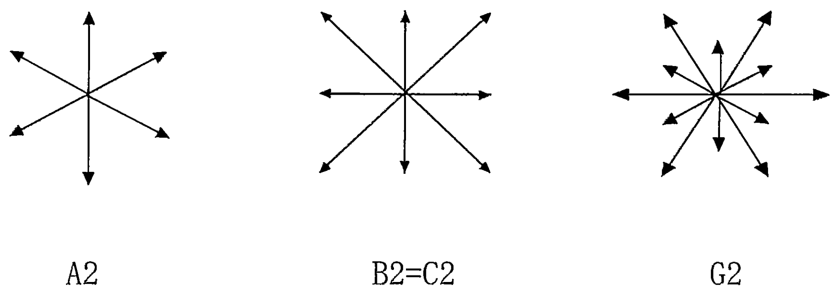


図 9　2 次元のルート系

このようにルート系に対して決まる基底に，次のようにしてダイアグラムを対応させる．

$$C_{ij} = \frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle}$$

とし，基底 Π の各元 α_i に頂点を対応させる．$|C_{ij}| \geq |C_{ji}|$ のとき，頂点 i と頂点 j を $|C_{ij}|$ 本の線で結び，$|\alpha_i| < |\alpha_j|$ ならば j から i へ向かう矢印をつける．

こうしてできた図形を Coxeter-Killing 図形または Dynkin 図形という．また行列 C_{ij} を Cartan 行列という．既約ルート系から決まる Coxeter-Killing 図形は全部で 7 種類あり，それらは図 10 に示されたものである（[4]）．図の左側に示された記号は，単純リー環の型と呼ばれる．

5　Brieskorn-Slodowy 理論

Klein と Lie の二つの流れをつなぐ Brieskorn-Slodowy 理論（1970 年代）を簡単に紹介する（cf. [19]）．

$\mathfrak{g}$ を単純リー環とし対応するリー群を G とする．ただし，その型は A_l, D_l, E_6, E_7, E_8 型とする．$g \in G$ に対して定まる随伴作用 $Ad(g) : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}$ による商写像 π を考える．この商空間は Cartan 部分環の Weyl 群による商と同型になる（Chevalley の定理）．

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{g} & \stackrel{\pi}{\longrightarrow} & \mathfrak{g}//Ad(G) & \simeq & \mathfrak{h}/W \\ \cup & & & & \Cup \\ N = \pi^{-1}(0) & & \longrightarrow & & 0 \end{array}$$

この写像において，原点の逆像 $N = \pi^{-1}(0)$ は nilpotent な元からなり，特異点を大量に持つ空間である．この特異点集合 $Sing(N)$ の中で一般的な点 x をとる．

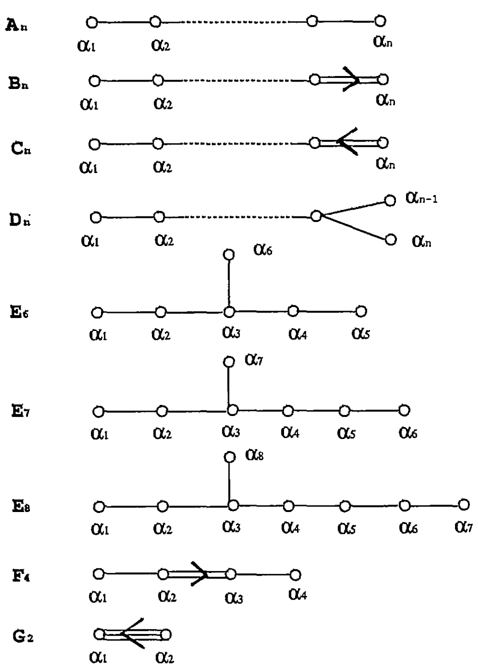


図 10　Coxeter-Killing 図形

定理 ([8, 30])

点 x を含み，$Sing(N)$ に横断的に交わる部分多様体 X をとると，$X \cap N$ はリー環の型に対応する Klein 特異点をもつ曲面になる．すなわち，単純リー環に対応する Coxeter-Killing 図形と，$X \cap N$ の特異点解消から得られる図形は一致する．

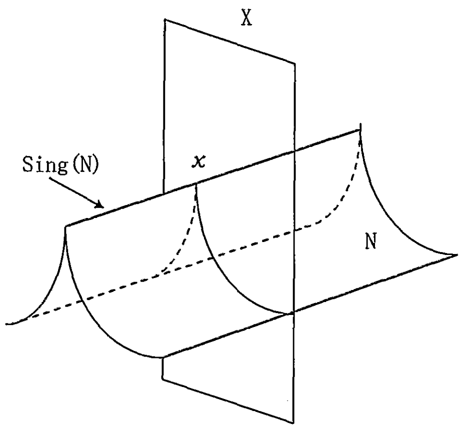


図 11　$X \cap N$

この定理により，Klein 特異点と単純リー環との直接的な関係がついたことになる．

6 Mckay 対応

この節では Mckay の発見（[20]）の紹介をする．2 項正多面体群 $\widetilde{\Gamma}$ が与えられたとき，Mckay は次のようなことを考えた．$\widetilde{\Gamma}$ の既約表現 $\rho_i\,(0 \le i \le l)$ を考える．つまり，有限次元複素ベクトル空間 V と群準同型 $\widetilde{\Gamma} \to GL(V)$ であって，V は $\widetilde{\Gamma}$ 加群として直和分解しないとする．ただし，ρ_0 は単位表現とする．$\widetilde{\Gamma}$ は $\mathbf{C}^2$ に作用しているので，表現

$$\rho : \widetilde{\Gamma} \to GL(\mathbf{C}^2)$$

がある．ρ_i と ρ のテンソル積

$$\rho_i \otimes \rho : \widetilde{\Gamma} \to V \otimes \mathbf{C}^2$$

を考える．

注　この操作は，当時は代数的な操作に過ぎなかったが，これらはもっとアブストラクトに triangulated category における Auslander-Reiten sequence（または cone construction）の言葉に持ち上げることができ，もっと広いコンテクストで理解することができる（[17] 参照）．

$V \otimes \mathbf{C}^2$ は既約な表現に分解される．これを

$$\rho_i \otimes \rho = \bigoplus n_{ij}\rho_j, \quad 0 \le i, j \le l$$

と書く．ルートをルート系の基底 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ の一次結合で書いたとき，係数の和が最大のもの ψ を最大ルートとよぶ．$\alpha_0 = -\psi$ とし，Cartan 行列と同様に，$\{\alpha_0, \ldots, \alpha_l\}$ に対して，

$$\widetilde{C}_{ij} = \frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle}$$

として行列 $\widetilde{C} = (\widetilde{C}_{ij})$ を定義する．これを拡大 Cartan 行列という．このとき

$$\widetilde{C}_{ij} = 2\delta_{ij} - n_{ij}$$

が成り立つ．拡大 Cartan 行列から，前節で述べた規則に従って得られるダイアグラムを拡大 Coxeter-Killing 図形とよぶ．この図形から α_0 に対応する頂点を除くと Coxeter-Killing 図形が得られる．このようにして 2 項正多面体群 $\widetilde{\Gamma}$ に対して Coxeter-Killing 図形が決まる．

$$
\begin{array}{ccc}
\text{巡回群} & \longleftrightarrow & A_l \\
2\text{ 項正 }2\text{ 面体群} & \longleftrightarrow & D_l \\
2\text{ 項正 }4\text{ 面体群} & \longleftrightarrow & E_6 \\
2\text{ 項正 }(6)8\text{ 面体群} & \longleftrightarrow & E_7 \\
2\text{ 項正 }(12)20\text{ 面体群} & \longleftrightarrow & E_8
\end{array}
$$

この対応を Mckay 対応と呼ぶ.

7 ウェイト系の理論

McKay 対応の逆対応，すなわち Coxeter-Killing 図形に対して，2 項正多面体群を与える対応を考える．前節までの内容を逆に辿ると，途中で特異点や単純リー環の分類の結果を使うことになる．分類を使わずに原理的にこの逆対応を辿れないか．つまり，2 項正多面体群から Coxeter-Killing 図形を与える McKay 対応の逆対応を自然な形で作れないか，という問題が残る．ここから私が，1980 年代から考えてきた話につながってくる([25, 26, 27]).

Coxeter-Killing 図形から加群を作る.

$$
\bigoplus_{i=1}^{l} \mathbf{Z}\alpha_i, \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_l \text{はルート系の基底})
$$

(C_{ij}) を Cartan 行列とし，この加群に内積を次のように入れる.

$$
\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = -C_{ij}
$$
$$
\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 2
$$

(ただし，Coxeter-Killing 図形に多重線があるときは修正が必要である)．単純ルート α_i に関する鏡映を w_{α_i} とし，鏡映の積

$$
C = \prod_{i=1}^{l} w_{\alpha_i}
$$

を考える．これを Coxeter 変換という．Coxeter 変換は有限位数である.

$$
C^h = 1, \quad h \text{ は Coxeter 数}
$$

C の固有値は 1 のベキ根で

$$
\exp\left(\frac{\pi\sqrt{-1}m_i}{h}\right), \qquad 1 \le i \le l
$$

と書ける．ここで，$0 < m_i < h$ となるように m_i を選び，これをリー環の exponents とよぶ．

注　ここの議論は，ブリッジランドによる stability という概念に関係する．詳しくは [5, 6] を参照のこと．

次に exponents の母関数を作る（ここでは，$0 < m_i < h$ という選択をした上であることに注意．この選択をしなければ，一般にいろいろ妙なものが出てくる．）

$$\chi(T) = T^{m_1} + \cdots + T^{m_l}$$

これを特性多項式とよぶ．すると重要な observation として，この特性多項式は，ある整数 $a, b, c \in \mathbf{Z}_{>0}$ があって次のように分解することがわかる．

$$\chi(T) = T^{-h}\frac{(T^h - T^a)(T^h - T^b)(T^h - T^c)}{(T^a - 1)(T^b - 1)(T^c - 1)}$$

こうして，ダイアグラムから始めて a, b, c という数が定まる．これらをまとめて

$$W = (a, b, c; h)$$

と書き，ウェイト系と呼ぶことにする．ウェイト系 W に対して上の式で与えられる有理式を χ_W と書くことにする．

ここまでの流れをまとめてみると，次のようになる．

2 項正多面体群 $\rightarrow$ Coxeter-Killing 図形 $\rightarrow$ ルート系・Weyl 群
$\rightarrow$exponents $\rightarrow$weight 系

ウェイト系からは，もとの正多面体群が次のようにして復元できる．Klein 特異点の定義式 $f(X, Y, Z) = 0$ について次が成り立つ．

Observation　$W = (a, b, c; h)$ は Klein 特異点の weight を与える．すなわち $f(X, Y, Z)$ は　$\deg X = a, \deg Y = b, \deg Z = c$ として，total degree が h となる重み付き斉次多項式となる．

逆にウェイト $W = (a, b, c; h)$ が与えられれば，それを重みとして持つような重み付き斉次多項式が，本質的に座標変換を除いて唯一つに定まる．一方，Klein 特異点の定義式も座標変換を除いて唯一つに定まるので，ウェイト系から Klein の多項式が復元できるの

である．Klein の多項式を与えることと，正多面体群を与えることとは等価である．例えば，特異点を持つ曲面から特異点を除いた曲面の基本群は 2 項正多面体群になるからである．このようにして，正多面体群から Coxeter-Killing 図形を対応させるという Mckay 対応の逆対応が得られた．

以上の流れの中で出てきたウェイト系の概念の枠を広げて考えると，ルート系の概念も広がり，無限次元半単純リー環とも言うべきものが次々と登場してくるのである．

8 正規ウェイト系

前節でみたように，正多面体から，Klein 特異点を経由して，リー環，ルート系にいたる流れは，ウェイト系の導入により，逆に辿ることができる．これに McKay 対応を付け加えると流れの輪が閉じて，ある特別な体系—これを私はプラトンの対称性と呼んでいる—正多面体の対称性と単純リー環の対称性が，ある意味で同一のカテゴリーになっていることがわかる（図 12）．

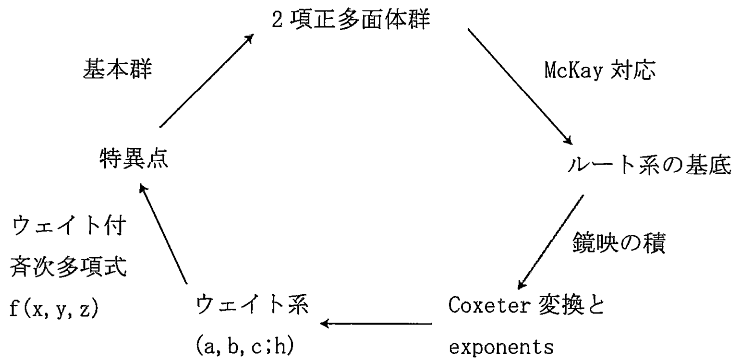


図 12　プラトンの対称性の輪

この体系の中に出てきた同値関係をよく見ると，ルート系やリー環の一般化の方向が見えてくる．これはまだ発展途上で，結論に至っていないが，いろいろ面白い断片的な結果が出始めている．

さて，プラトンの対称性の一般化のために，プラトンの対称性をウェイト系の概念で捉えなおす所をもう一度復習する．プラトンの対称性から得られるウェイト系に対しては，その特性多項式 χ_W は $\mathbf{Z}[T]$ の元であった．実は，この逆が成立する．

定理

$$\chi_W(T) \in \mathbf{Z}[Y] \Longleftrightarrow W \text{ は } A, D, E \text{ 型のルート系から決まるウェイト系である.}$$

つまり，プラトンの対称性を特徴付けるウェイト系 W は，$\chi_W(T) \in \mathbf{Z}[T]$ となることである．このとき，$\chi_W(T)$ は monomial の和になって，その係数は正の整数，その指数は exponents を与える．

ここで，視点を変えて，$\chi_W(T)$ が多項式であることを放棄する．つまり exponents $m_1, \ldots, m_l$ が正の整数であるとの仮定（これは自明なことではなっかったことに注意）をやめて，負であることも許して定義を変える．

定義 ([27])　　$W = (a, b, c; h)$ が次をみたすとき正規ウェイト系という．

$$\chi_W(T) \in \mathbf{Z}[T, T^{-1}]$$

これは次に見るように，ウェイト系の望ましい一般化を与えていることがわかる．

定理　次は同値である．

1. $W = (a, b, c; h)$ は正規ウェイト系
2. 整数 $m_1, \ldots, m_\mu$ があって

$$\chi_W(T) = T^{m_1} + \cdots + T^{m_\mu}$$

が成り立つ．

3.

$$f_W(x, y, z) = \sum_{ai+bj+ck=h} c_{ijk} x^i y^j z^k$$

の零面 $X_0 \subset \mathbf{C}^3$ は原点のみに孤立特異点を持つ．

注　これまで述べてきたプラトンの対称性において，いろいろな同値性を示す各ステップに対応する操作を，この正規ウェイト系の場合にも考えることができる．

上記定理に出てくる整数 $m_1, \ldots, m_\mu$ を正規ウェイト系の exponents と呼ぶ．exponents $m_1 \leq m_2 \leq \cdots \leq m_\mu$ は次の対称性を持っている．

$$m_i + m_{\mu-i+1} = h.$$

正規ウェイト系に対して，その最小 exponents は次で与えられる．

$$\epsilon = m_1 = a + b + c - h$$

正規ウェイト系 W に対してきまる多項式 f_W は写像

$$f : \mathbf{C}^3 \longrightarrow \mathbf{C}$$

を定める．この写像の制限

$$f|_{\mathbf{C}^3 - f^{-1}(0)} : \mathbf{C}^3 - f^{-1}(0) \longrightarrow \mathbf{C} - \{0\}$$

は局所自明なファイバー束となり，Milnor fibration と呼ばれる．また，この一般ファイバー $X_1 = f^{-1}(1)$ は Milnor ファイバーとよばれ，単連結複素 2 次元の曲面であって，その 2 次元ホモロジー $H_2(X_1, \mathbf{Z})$ は階数 $\mu = (h-a)(h-b)(h-c)/(abc)$ の自由化群である．$H_2(X_1, \mathbf{Z})$ に入る交叉形式を I とする．特に，$\epsilon > 0$ の場合には，I は負定値であって，この交叉形式に関して $H_2(X_1, \mathbf{Z})$ は，前節で述べたような対応によって得られるルート格子に同型になる．

$H_2(X_1, \mathbf{Z})$ には，消滅サイクル (vanishing cycle) と呼ばれる特別な基底 $e_1, \ldots, e_\mu$ が存在する．この基底に対して，交叉グラフを次の規則によって定義する：

1. 各 e_i に対して頂点を対応させる．
2. $I(e_i, e_j) > 0$ のとき，対応する頂点間を $I(e_i, e_j) > 0$ 本の辺（実線）で結ぶ．
3. $I(e_i, e_j) < 0\,(i \neq j)$ のとき，対応する頂点間を $I(e_1, e_j) > 0$ 本の辺（点線）で結ぶ．
4. $I(e_i, e_j) = 0$ のときは，辺を書かない．

$\epsilon > 0$ のときは，この様にして得られた交叉グラフは図 7 となり，$\epsilon = -1$ のときは，第 1 節で示した図 1 となる．

正規ウェイト系は，その最小 exponents の値によって，次のように分類される（図 15, 16)．

1. $\epsilon > 0$ の時はプラトンの対称性，すなわち，A,D,E 型の場合に対応する．

2. $\epsilon = 0$ の時は，3 種類の楕円型と呼ばれる対称性がある．これらは幾何的には楕円型特異点 $\widetilde{E}_6, \widetilde{E}_7, \widetilde{E}_8$ ([23]) に対応し，今日では，楕円型リー環，楕円型ルート系，楕円型 Coxeter 変換の理論などを含む理論に対応している．

注　$\epsilon = 0$ のとき，$f(x, y, z) = 0$ で定義される曲面の特異点の変形理論で決まる diagram は，ちょうど affine diagram が対応していた．　つまり，変形で出現する特異点からきまるディンキン図形を部分図形として持つダイアグラムの記号が $\widetilde{E}_6, \widetilde{E}_7, \widetilde{E}_8$ であった．これは，ブルバキの「リー環とリー環」にあるアフィンワイル群の解説に出てくる拡大ディンキン図形の記号である．

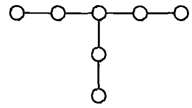


図 13　$\widetilde{E}_6$ の daigram

$\widetilde{E}_6$ を例にとると，$\epsilon = 0$ に対応する曲面 $f(x, y, z) = 0$ の特異点が，別の特異点に変形できるための必要十分条件は，変形された特異点に対応するルート系が A, D, E 型のいずれかであって，そのディンキン図形が $\widetilde{E}_6$ の部分図形になっていることである．つまり，楕円型特異点 $\widetilde{E}_6$ は，$\widetilde{E}_6$ の部分図形に対応する特異点に変形できる．
このような変形理論の立場から，特異点の記号を考えたのだが，今となっては，これは中途半端な記号のつけ方であった．現在では，これらの特異点に対応するルート系の理論があって，その diagram は，次のようなものである．

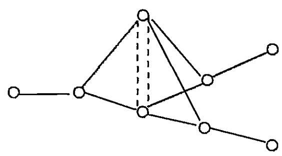


図 14　$E_6^{(1,1)}$ の daigram

これらには別の記号 $E_6^{(1,1)}, E_7^{(1,1)}, E_8^{(1,1)}$ がつけられている ([25])．これはルート系の分類から決まる記号であって，本来こちらに統一すべきとこであるが，先の記号とこの記号とが文献で混在していて注意を要する．

3. $\epsilon \leq -1$ の時は，ϵ の値ごとに有限種類の正規ウェイト系が出てくる．$\epsilon = -1$ の時は 14+8+9 種類の正規ウェイト系がある．

Table 1 (*Case* $\varepsilon > 0$)

Notation	μ	a	b	c	h	exponents	h/abc
$A_l\ (l \geq 1)$	l	a	b	c	h	$1c, 2c, 3c, \cdots, lc$	$(l+1)/ab$
Here $h := a+b$ s.t. $c \mid h$ and $l := h/c - 1$. (cf. Note 1)							
$D_l\ (l \geq 4)$	l	2	$l-2$	$l-1$	$2(l-1)$	$1, 3, 5, \cdots, l-1, \cdots, 2l-3$ ($l-1$ twice for l even)	$1/(l-2)$
E_6	6	3	4	6	12	1, 3, 5, 7, 8, 11	1/6
E_7	7	4	6	9	18	1, 5, 7, 9, 11, 13, 17	1/12
E_8	8	6	10	15	30	1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29	1/30

Table 2 (*Case* $\varepsilon = 0$)

Notation	μ	a	b	c	h	exponents	h/abc
$\tilde{E}_6$	8	1	1	1	3	0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3	3
$\tilde{E}_7$	9	1	1	2	4	0, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4	2
$\tilde{E}_8$	10	1	2	3	6	0, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 6	1

Table 3 (*Case* $\varepsilon = -1$)

Notation	μ	a	b	c	h	exponents	h/abc
E_{12}	12	6	14	21	42	-1, 5, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 37, 43	1/42
E_{13}	13	4	10	15	30	-1, 3, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 27, 31	1/20
E_{14}	14	3	8	12	24	-1, 2, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 22, 25	1/12
Z_{11}	11	6	8	15	30	-1, 5, 7, 11, 13, 15, 17, 19, 23, 25, 31	1/24
Z_{12}	12	4	6	11	22	-1, 3, 5, 7, 9, 11, 11, 13, 15, 19, 23	1/12
Z_{13}	13	3	5	9	18	-1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 16, 19	2/15
W_{12}	12	4	5	10	20	-1, 3, 4, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 16, 17, 21	1/10
W_{13}	13	3	4	8	16	-1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 17	1/6
Q_{10}	10	6	8	9	24	-1, 5, 7, 8, 11, 13, 16, 17, 19, 25	1/18
Q_{11}	11	4	6	7	18	-1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 19	3/28
Q_{12}	12	3	5	6	15	-1, 2, 4, 5, 5, 7, 8, 10, 10, 11, 13, 16	1/6
S_{11}	11	4	5	6	16	-1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 17	2/15
S_{12}	12	3	4	5	13	-1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 11, 14	13/60
U_{12}	12	3	4	4	12	-1, 2, 3, 3, 5, 6, 6, 7, 9, 9, 10, 13	1/4

図 15　正規ウェイト系-1

$R_{269}(J_{3,0})$	16	2	6	9	18	−1, 1, 3, 5, 5, 7, 7, 9, 9, 11, 11, 13, 13, 15, 17, 19	1/6
$R_{247}(Z_{1,0})$	15	2	4	7	14	−1, 1, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 7, 9, 9, 11, 11, 13, 15	1/4
$R_{245}(Q_{2,0})$	14	2	4	5	12	−1, 1, 3, 3, 4, 5, 5, 7, 7, 8, 9, 9, 11, 13	3/10
$R_{236}(W_{1,0})$	15	2	3	6	12	−1, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 8, 9, 10, 11, 13	1/3
$R_{234}(S_{1,0})$	14	2	3	4	10	−1, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 8, 9, 11	5/12
$R_{233}(U_{1,0})$	14	2	3	3	9	−1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 8, 10	1/2
$R_{223}(V_{1,0})$	15	2	2	3	8	−1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 7, 7, 9	2/3

$R_{225}(N_{16})$	16	2	2	5	10	−1, 1, 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 3, 3, 3, 9, 9, 11	1/2
R_{146}	22	1	4	6	12	−1, 0, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 10, 11, 12, 13	1/2
R_{135}	21	1	3	5	10	−1, 0, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 10, 11	2/3
R_{134}	20	1	3	4	9	−1, 0, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 9, 10	3/4
R_{124}	21	1	2	4	8	−1, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 9	1
R_{123}	20	1	2	3	7	−1, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 8	7/6
R_{122}	20	1	2	2	6	−1, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 7	3/2
R_{113}	25	1	1	3	6	−1, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7	2
R_{112}	24	1	1	2	5	−1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6	5/2
R_{111}	27	1	1	1	4	−1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5	4

図 16　正規ウェイト系-2

9 triangulated category

正規ウェイト系に対してリー環を構成することが最終目標であるが，そのための途中ステップとしてカテゴリーの理論を使う． 具体的には，正規ウェイト系から決まる特異点 $f_W = 0$ の幾何学を使って，triangulated category $\mathcal{T}_W$ を作り，そこからリー環のデータを読み取ることを目標にする．現段階では，望ましき性質を持つ triangulated category $\mathcal{T}_W$ を構成し，そこからルート系のデータを与えることまでができている．この節では，正規ウェイト系から，いかなる triangulated category が構成されるのか，ということを説明し，次節で $\mathcal{T}_W$ の構成法を解説する．詳細については [28, 29] を参照いただきたい．

まず主張を示し，追って言葉の説明をしていこう．

定理 1 (梶浦-斎藤-高橋 [17])
最小 exponents $\epsilon_W = -1$ であるような 14+8 個の正規ウェイト系 W（exponents に 0 が含まれないもの）の各々に対して，$\mathbf{C}$ 上の triangulated category $\mathcal{T}_W$ であって，W の符号の集合 $A_W = \{p_1, \ldots, p_r\}$ から決まるダイアグラム（図 1）を与えるような full strongly exceptional collections を持つものが存在する．

まず，triangulated category の定義を述べる（cf. [13]）．

定義 (triangulated category) カテゴリー $\mathcal{T}$ が triangulated であるとは，次の諸条件をみたすこととする．$Ob(\mathcal{T}), Hom(\mathcal{T})$ を，それぞれ $\mathcal{T}$ の object および射の集合とする．また，$Hom(X,Y)\ (X, Y \in Ob(\mathcal{T}))$ が $\mathbf{C}$ 上のベクトル空間となっているとき，$\mathcal{T}$ は $\mathbf{C}$ 上のカテゴリーであるということにする．

1. $\mathcal{T}$ は additive category である．すなわち $X, Y \in Ob(\mathcal{T})$ に対して，$X \oplus Y \in Ob(\mathcal{T})$ が定まり，しかるべき条件をみたす．
2. shift functor と呼ばれる self equivalent な functor $T : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$ がある．
3. triangle (X, Y, Z, u, v, w) と呼ばれる射の系列

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X)$$

があって，以下の公理をみたす．

(a) 2 つの系列の間に射があるとき，一方が triangle ならば，他方も triangle となる．

(b) 任意の射 $X \to Y$ は，triangle $X \to Y \to Z \to T(X)$ にのばせる．

(c) $\forall X \in Ob(\mathcal{T})$ に対して　$X \xrightarrow{id_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow T(X)$ は triangle である．

(d) triangle $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X)$ に対して，$Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X) \longrightarrow T(Y)$ も triangle である．

(e) 2 つの triangle 間の射は，

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & T(X) \\ f\downarrow & & g\downarrow & & h\downarrow & & \downarrow \\ X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & T(X) \end{array}$$

f, g, h のうちの 2 つで決まる．

(f) (octahedral axiom)　3 つの triangles $X \overset{u}{\to} Y \to Z' \to T(X), Y \overset{v}{\to} Z \to X' \to T(Y), X \overset{v \circ u}{\to} Z \to Y' \to T(X)$ に対して，triangle $Z' \to Y' \to Z' \to T(Z')$ が存在して，しかるべき可換図式が成り立つ．

triangulated category はいろいろなところに登場する．例えば，環 A に対して A 加群全体は abelian category であるが，triangulated category にはならない．しかしその derived category $D^b(A\text{-mod})$ は triangulated category となる．

定理の主張の中で，"full strongly exceptional collections" とあるところが，Killing によるルート系の基底を見つけることに対応している．これを次に説明する．

定義

1. $E \in Ob(\mathcal{T})$ が exceptional であるとは，次をみたすこと．

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(E, T^p E) = \begin{cases} \mathbf{C} & p = 0 \\ 0 & p \neq 0 \end{cases}$$

2. $(E_1, \ldots, E_\mu)$ が exceptional collection であるとは，E_i は excetional boject であって，次をみたすことである．

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(E_i, T^p E_j) = 0 \quad \forall p, \forall i > \forall j$$

注

1. exceptional object は　Killing の考えたルートに対応している．これは，リー環の可換部分代数の随伴作用の特性多項式の根として定義されたものであるが，カテゴリーレベルでは，exceptional object として現れる．

2. 元来，ルート系の基底の概念には番号付けはない．しかし，そのカテゴリー版である exceptional object には順序が入っていて，$\epsilon > 0$ の時には，Cartan 行列，Coxeter-Killing 変換と次の関係を持つ．行列 X を

$$X_{ij} = \dim \mathrm{Hom}(E_i, E_j)$$

で与えると，上記の定義より X は上半三角行列である．このとき，$X + {}^tX$ は Cartan 行列を与え，$-{}^tX^{-1}X$ は Coxeter 変換を与える．

定義

1. triangulated category $\mathcal{T}$ の部分集合が $\mathcal{T}$ を生成するとは，その部分集合を含む最小の triangulated category が $\mathcal{T}$ に一致することである．
2. exceptional collection $E_1, \ldots, E_\mu$ が full であるとは，$E_1, \ldots, E_\mu$ が triangulated category を生成することである．つまり，これを含むような最小の triangulated category は全体と一致する．

正規ウェイト系に対して，その符号の集合（multiset）$A(W) = \{p_1, \ldots, p_r\}$ が定まる（[27] 定理 6 (5,3,2) p511）．これは，$f_W = 0$ に入る $\mathbf{C}^\times$ 作用の固定化群の位数の集合である．$A(W)$ から或る手続きでダイアグラムが定義される（[28] 第 18 節，定義，p44）．一方，strongly full exceptional collection $(E_1, \ldots, E_\mu)$ に対しても，ダイアグラムを与える手続きが定まっていて（[28]　第 16 節 6, p41），定理の主張は次のようになる．ある特別なカテゴリー $\mathcal{T}_W$ が，正規ウェイト系 W に対して定まり，そのカテゴリーに strongly full exceptional collection $(E_1, \ldots, E_\mu)$ が存在する．この $(E_1, \ldots, E_\mu)$ は全体をカテゴリーとして生成する．また，exceptional collection $(E_1, \ldots, E_\mu)$ に対して定まるダイアグラムは，W の符号の集合 $A(W)$ の与えるダイアグラム（図 1 ）と一致する．

このダイアグラムから，もとのカテゴリーが本質的に復元できる．これは Killing の主張，すなわち，ルート系の基底と，その交叉関係（Cartan 行列）から，リー環が復元できることのカテゴリー版である．

ここでは $\epsilon = -1$ の場合の議論であるが，$\epsilon > 0$ のときは Coxeter-Killing 図形（図 7）が，この構成から得られる．

定理（梶浦-斎藤-高橋 [16]）

$\epsilon > 0$ の時に，定理 1 と同じ事が成立する．ダイアグラムは，ウェイト系に対応する単純リー環の Coxeter-Killing 図形に一致する．

注　$\epsilon = 0$ の時には，デリケートな部分があり，群作用込みで考えなければならない．

定理１の系 (Bondal)

$$\mathcal{T}_W \simeq D^b(\text{mod-}\bigoplus_{i,j} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(E_i, E_j))$$

この系によれば，strongly exceptional collection がわかると，それらの間の射の直和（これは有限次元代数になる）の derived category が $\mathcal{T}_W$ と equivalent なカテゴリーになる．これは Bondal([1, 2]) による一般論の結果である．つまり，$\mathcal{T}_W$ は，有限的なものから構成することができる．これは有限個のデータであるルート系の基底から単純リー環が構成できることに対応している．

10　カテゴリー $\mathcal{T}_W$ の３通りの構成法

最後に，カテゴリー $\mathcal{T}_W$ の構成法を述べる．これには３通りの方法がある．詳しくは [29] を参照いただきたい．

第１の方法

ウェイト系に対応した特異点の定義方程式を $f_W = 0$ とし，

$$R_W = \mathbf{C}[x, y, z]/(f_W)$$

とする．ただし，$A_W = \mathbf{C}[x, y, z]$ には，ウェイトから決まる grading が入っているものとする．graded R_W-module のカテゴリーを gr-R_W とし，graded projective module のなす category を gr-proj-R_W) としたとき，

$$D^{gr}_{Sg} = D^b(\text{gr-}R_W)/D^b(\text{gr-proj-}R_W)$$

は triangulated category を与える．

第２の方法

gr-R_W の元 M が Maximal Cohen-Macaulay module であるとは，次が成り立つことである．

$$\mathrm{Ext}^i_{R_W}(R_W/\mathfrak{m}, M) = 0, \qquad i < \dim R_W, \quad \mathfrak{m} \text{ は } R_W \text{ の極大イデアル}$$

R_W 上の加群の代わりに graded maximal Cohen-Macaulay module 全体のなす subcategory $CM^{gr}(R_W)$ を考える．このままでは stable ではないので，これを stabilize するために，次のように射の集合の商をとる．つまり，カテゴリーの object はそのままで，射の集合は次で与える．

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{gr}\text{-}R_W}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}\text{-}R_W}(X,Y)/P(X,Y),$$

ただし，$P(X,Y)$ は projective module を factorize する射全体のなす部分加群．このとき，$\underline{CM^{gr}}(R_W)$ は triangulated category となる．

<u>第 3 の方法</u>　P_0, P_1 を有限階数の次数付き A_W 自由加群とする．A_W 準同型 $p_0 : P_0 \to P_1$ と，次数 2 の A_W 準同型 $p_1 : P_1 \to P_0$ であって，$p_0 p_1 = f_W \cdot id_{P_1}, p_1 p_0 = f_W \cdot id_{P_0}$ をみたすものが与えられたとき，これらのなす系

$$M := \left(P_0 \underset{p_1}{\overset{p_0}{\rightleftarrows}} P_1 \right)$$

を f_W の graded matrix factorization とよぶ．graded matrix factorizations を object とし，これらの間の射を考えることにより，カテゴリーが定まる．このカテゴリーの射の集合を　homotopy equivalence という関係で割ったものを射の集合としたカテゴリーを $\mathrm{HMF}^{gr}(f_W)$ と書く．

定理　上に述べた 3 つの構成で得られるカテゴリーは互いに同値である．

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_W &:= HMF^{gr}(f_W) \\ &\simeq CM^{gr}(R_W) \\ &\simeq D^b(\mathrm{gr}\text{-}R_W)/D^b(\mathrm{gr}\text{-proj-}R_W) \end{aligned}$$

この定理の第 1 と第 2 の同値性は可換環論の一般論から従う（cf. [33]）．第 2 と第 3 の同値性は [10, 21] による．

この定理によれば，カテゴリーの構成は完全に代数的である．この同型定理より，例えば Serre duality など，いろいろな構造定理が従う．

11　リー環の構成に向けて

次に，ここまでの議論と，古典的なリー環論との接点となるところを説明する．

triangularated categry $\mathcal{T}$ に対して，$K_0(\mathcal{T})$ を Grothendieck 群（または　K-群）とする．すなわち，$Ob(\mathcal{T})$ によって生成される自由加群を，次の関係で割った商群である：

$$[X]+[Z]-[Y]\sim 0,$$

ただし，

$$X\longrightarrow Y\longrightarrow Z\longrightarrow TX\longrightarrow\cdots$$

は全ての triangle をわたる．

すると，次が成り立つ．

$$K_0(\mathcal{T})\simeq\bigoplus_i \mathbf{Z}[E_i].$$

$\epsilon>0$ のときは，これはルート格子となる．つまり，$\mathcal{T}_W$ を Grothendieck 群に落とすと，ルート格子が復元できる．つまり，第 7 節で述べたような，ウェイト系からルート系を復元することの，カテゴリー版である．

Grothendieck 群

$$K_0(\mathcal{T})\simeq\bigoplus_i \mathbf{Z}[E_i]$$

において，各 $[E_i]$ に対応する鏡映変換が定義でき（[28] 第 16 節 5)，それらを $E_1,\dots,E_\mu$ の順に積をとったものを Coxeter 変換と呼ぶ．これは有限位数となるが，この性質はルート系が決まるための，非常に重要な条件である．

$S:\mathcal{T}\longrightarrow\mathcal{T}$ を Serre functor とする．すなわち functor S は次をみたす．

$$Hom(X,Y)^*\simeq Hom(SY,SX).$$

shift functor T と Serre functor S とから，

$$\tau_{AR}=T^{-1}S$$

で定義される Auslander-Reiten translation τ_{AR} は $K_0(\mathcal{T})$ の自己同型 $[\tau_{AR}]$ を引き起こす．このとき Coxeter-Killing 変換は，$[\tau_{AR}]$ と一致する．

exceptional object から決まる元 $[E_i]\in K_0(\mathcal{T}_W\ (i=1,\dots,\mu)$ をルート系の基底と見做すと，$\epsilon=-1$ の場合，これらのデータから次のような工程によりリー環がつくれる．

1. 格子，すなわち加群に内積が与えられたものに対して，Lattice vertex operator algebra が作れる（Borcherds [3]）．$K_0(\mathcal{T})$ に対して，それを $V_{K_0(\mathcal{T})}$ とする．格子

の元 $[E_i]$ に対して，exponential と呼ばれる元 $e^{[E_i]}$ が定まり，これらで生成される環（これは無限次元になる）が定義できる（[3, 31]）．

$$\mathfrak{g}_W = \left\langle e^{[E_i]}; i = 1, \ldots, \mu \right\rangle$$

このリー環の real root 系は $[E_i]$ で生成される．このようにして，与えられたルート系をもつリー環が作れる．

2. 符号の集合 $A(W)$ から決まるダイアグラム（図 1）に対応する Cartan 行列から，Chevalley 基底と Serre 関係式で決まるリー環が与えられる（[31]）．
3. strongly exceptional collection から得られる quiver の表現から定まるリー環（Ringel-Hall construction）（[24, 32]）．

これら 3 種類のリー環が同型であるのか否か，現在のところまだわかっていない．今後，これらのリー環の関係を明らかにし，どのリー環がプラトンの対称性の良い一般化を与えるのか，などの問題を解明することを今後の課題として提起したい．

注

1. ここでの構成の説明は，$\epsilon = -1$ の場合であって，$\epsilon = 0$ の場合の説明は省略する．$\epsilon > 0$ の場合には，この構成によって，有限次元半単純リー環が構成できる．
2. これらのリー環の構成は，幾何学的な動機からきている．このシンポジウムの濵田先生の講演で，微分方程式は正則であるにもかかわらず，その解が無限遠から来る特異点をもつことがあるという話があった．実は，20 年ほど前に，$\epsilon = -1$ の時の 14+8 個の場合の特異点の変形理論の研究において，ある種の微分方程式系の理論を研究していたとき，解を作ろうとすると，どうしても特異点が出てきてしまう困難に直面した．結局方針を変えて，微分方程式の代わりに，ある種の無限次元リー環を作り，そのリー環が，ある種の積分条件をみたしているために自動的に大局的な解を作れる，という議論展開をしようと考えた（原始形式の理論）．この講義で紹介したリー環が，この目的を果たしているのではないか，という期待を持っている．

参考文献

[1] Bondal, A. and Kapranov, M. : Representable functors, Serre functors and Mutations, IZv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **53** (1989), 1183–1205: English transl.

in Math. USSR Izv. **35** (1990), 519–541.

[2] Bondal, A. and Kapranov, M. : Enhanced triangulated categories, Math. USSR Sbornik, **70** (1991) no. 1, 93–107.

[3] Borcherds, R. E.:Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster, Prc. Nat'l. Acad. Sci. U.S.A., **83** (1986), 3068–3071.

[4] ブルバキ数学原論，リー群とリー環，第 4，5，6 章，東京図書，1970.

[5] Bridgeland,T.,:Stability conditions on triangulated category, math. AG/0212237.

[6] Bridgeland,T.,:Stability conditions and Kleinian singularities, math. AG/0508257.

[7] Bridgeland,T.,:Stability conditions on K3 surfaces, math. AG/0307164.

[8] Brieskorn, E. : Singular elements of semisimple algebraic groups, Actes Congrès Intrern. Math., **2**, 279–284, 1970.

[9] Bridgeland, T., King, A., and Reid, M.: McKay correspondence as an equivalence of derived categories, J. Amer. Math. Soc., **14**(3) (2001), 535–554(electonic).

[10] Buchweitz, R.-O. : Maximal Cohen-Macaulay modules and Tate-cohomology over Gorenstein rings, preprint (1987?).

[11] Coxeter, H. S. M. : Finite groups generated by reflections, and their subgroups generated by reflections.

[12] Du Val, P: On isolated singularities of surfaces which do not affect the conditions of adjunction. (Part I), Proc. Cambridge Phil. Soc., **30**, 453–465, 1934.

[13] Keller, B. : Derived categories and their uses, Chapter of the Handbook of algebra, Vol. 1, edited by M. Hazewinkel, Elsevier (1996).

[14] Killing, W. : Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen, I, II, III, IV. Math. Ann. **31**(1888), 252–290; **33**(1889), 1–48;**34**(1889), 57–122; **36**(1890), 161–189.

[15] Klein, F.:正多面体と 5 次方程式，関口次郎訳，シュプリンガー・フェアラーク東京，1993.

[16] Kajiura, H., Saito, K., and Takahashi, A. :Matrix factorizations and representations of quivers II:type ADE case, math. AG/0511155.

[17] Kajiura, H., Saito, K., and Takahashi, A. :Category of matrix factorizations for exceptional singularities, preprint, RIMS-1600.

[18] Lie, S.:Theorie der Transformationsgruppen I,II,III, Unter Mitwirkung von F. Engel, Leipzig, 1888, 1890, 1893.

[19] 松澤淳一，特異点とルート系，朝倉書店，2002.

[20] McKay, J.: Graphs, singularities, and finite groups, Proceedings of Simposia in Pure mathematics, **37**, 183–186, 1980.

[21] Orlov, D. : derived categories of coherent sheaves and triangulated categories of singularities, math. AG/0503632.

[22] プラトン，チマイオス，プラトン全集 12，岩波書店.

[23] Saito, K.: Einfach elliptische Singularitaten, Invent. Math., **23**(1974), 289–325.

[24] Peng, L. and Xiao, J.: Triangulated categories and Kac-Moody algebras, Invent. Math. **140** (2000), 563–603.

[25] Saito, K.:Extended affine root systems I,II,III,IV, Publ. RIMS, Kyoto Univ.,**21**(1985),75–179;**21**(1985),75–179;**26**(1990),15–75;**33**(1997),301–329;**36**(2000),385–421

[26] 斎藤恭司：一般 weight 系の理論とその周辺 I,II，数学，**38**，日本数学会，97–115, 202–217, 1986.

[27] Saito, K.:Regular system of weithts and associated singularities, Advanced Studies in Pure Mathematics, **8** , 479–526, 1986

[28] Saito, K. : Towards a Categorical Construction of Lie Algebras, RIMS preprint, **1611** (2007).

[29] Saito, K. : Towards a categorical construction of Lie algebras, Advanced Studies in Pure Mathematics **50**, (2008), Algebraic Geometry in East Asia–Hanoi 2005, pp. 101–175.

[30] Slodowy, P. : Simple singularities and simple algebraic groups, Springer Lecture Notes in Math., **815**, 1980.

[31] Saito, K. and Yoshii, D. : Extended affine root systems IV (Elliptic Lie Algebras), Publ. Res. Inst. Math. Sci. **36** (2000), 385–421.

[32] Töen, B. :Derived Hall algebras, Duke Math. J. ,**135** (2006), no.3, 587–615.

[33] Yoshino, Y. : Cohen-Macaulay modules over Cohen-Macaulay rings, London Math. Soc. Lect. Note Ser., **146**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.