複素ポテンシャル論とL^2上空移行の最近の相関

大沢健夫（名古屋大学大学院・多元数理）

序　あれは確か、筆者がまだ大学院生の頃だったと思う。とある夏の一日、先輩の赤堀隆夫氏らと中野茂男先生宅を訪問し、いろんな思い出話を伺った事がある。それらはみな、数学の研究者として駆け出し以前の身にとっては大いに珍らしく、有益で面白い話だった。中でも中野先生が秋月先生に計算結果を早く見せるようにせがまれて、名古屋駅のホームで落ち合い、列車の停車中に計算を説明して得心してもらった話は痛快だった。これは有名な秋月・中野の消滅定理にまつわる話なのだが、その時どちらが列車に乗って旅行中だったかはうかつにも憶えていない。いずれにせよ、中野先生が「これは岡さんから直に聞いたんだ」と断って、岡先生の言葉を紹介されたのはその時のことである。それは「全宇宙が自分を中心にずらっと一列に整列したような感じがした」という奇抜なもので、岡先生が第一論文の着想を得た瞬間の感慨であるとのことだった。

岡先生の発見の心理的側面については、それまでに有名な「春宵十話」等を読みかじってある程度知っていたが、この時聞いた「全宇宙が整列する」という一節は、筆者には格別の味わいが感じられた。

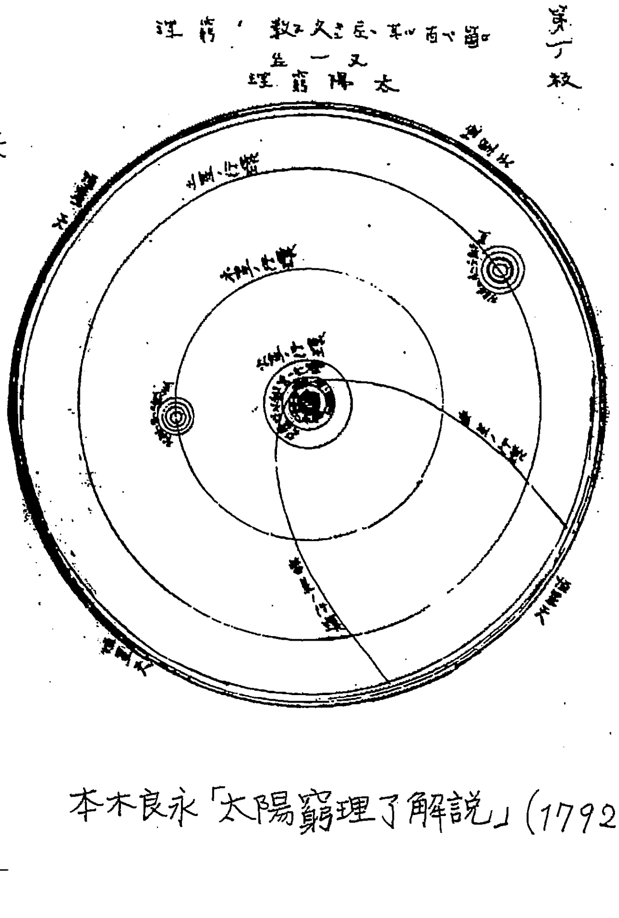
あの日から約３０年が過ぎた。その間、岡先生に何とか一歩でも近づきたいと思って努力したつもりだが、残念なことに筆者を中心として整列してくれるような優しい宇宙には出会えなかったようである。（互いに気付かずにすれ違った可能性はないとはいえないが。）それはともかく、その大発見の瞬間に岡先生の眼に映じたものは何であったかと、あれこれ想像をめぐらせるのは今でも楽しい。

この論説の目的は、表題の講演の内容に沿って岡・カルタン理論を復習し、その延長線上に筆者の仕事と複素ポテンシャル論の最近の動向を位置づけることである。これらの諸結果が岡の第一論文すなわち「上空移行の原理」(後で説明する)を中心として整列した姿をしているとすれば、それは岡理論の力であり、そうでないとすればそれは筆者の力不足によるものであろう。

§1. 割算問題と拡張問題

岡潔(以下敬称略)が第一論文(1936)の素志を貫いて第七論文(1950)で完成させた理論は、その一部を岡とは独立に得ていたカルタン(H. Cartan 1904-)にちなんで、岡・カルタン理論と呼ばれる。カルタンは後に、これを解析的連接層のコホモロジー理論として一般化した。その血肉である岡・カルタン理論は多変数の正則関数の基本的性質を解明したもので、具体的には割算問題と拡張問題を解いている。それを復習する前に、ひとまずこれらの問題の背景に触れておきたい。

割算問題が本格的に扱われ出したのは、高次の連立方程式から未知数の個数を減らす手続き(消去法)に関連してであったようだ。日本にコペルニクスの地動説がはじめて紹介されたのは1774年(本木良永「天地二球用法」)のことだったそうだが、この頃ベズー(E. Bézout, 1730-83)は終結式を発見し、オイラー(L. Euler 1707-83)が示唆した方法を基礎づけた(cf. [B-1,2], [E])。その結果、次の問題が残された。



本木良永「太陽窮理了解説」(1792)

i)　n変数の多項式 $f_1, f_2, \cdots, f_m$, h が与えられたとき、等式

$$h = \sum_{i=1}^{m} g_i f_i \quad \text{---- (1)}$$

をみたす多項式 $g_1, \cdots, g_m$ が存在するための条件を求めよ。

ii)　その条件がみたされるとき、$g_1, \cdots, g_m$ は $f_1, \cdots, f_m$, h からどのような手続きで決定されるか。

(1)はベズーの方程式とも呼ばれている（cf. [B-C-V-Y]）。

ちなみに、ベズーは少年時代に読んだオイラーの著書の影響を受けて数学者になったのだそうだ。ベズーが書いた本も好評だったらしく、T. ジェファーソン（USA憲法の起草で有名）が、パリから大学入学前の息子宛にその一冊を送ったことなどが知られている。

Euler's assertion

Given any 'general' $f_1, f_2 \in \mathbb{R}[x,y]$ there exist $g_1, g_2 \in \mathbb{R}[x,y]$ s.t. $f_1 g_1 + f_2 g_2 \in \mathbb{R}[x] \setminus \{0\}$.

Bézout's theorem

For the general f_1, f_2 with $\deg f_1 = m_1$; $\deg f_2 = m_2$, there exists $r \in \mathbb{R}[x]$ s.t. $\deg r = m_1 m_2$ and

$$f_1(a,b) = f_2(a,b) = 0 \Rightarrow r(a) = 0$$

Problem : Find $g_1, g_2 \in \mathbb{R}[x,y]$ s.t. $f_1 g_1 + f_2 g_2 = r$

$\Rightarrow$

Division Problem (= DP)

Given $f_1, \cdots, f_m \in R = \mathbb{C}[z_1, \cdots, z_n]$, etc. and $h \in R$,

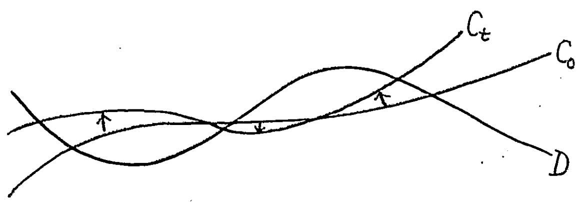
1) Decide whether or not $h \in \sum_{k=1}^{m} f_k R$.

2) If $h \in \sum f_k R$, find $g_1, \cdots, g_m$ s.t. $h = \sum f_k g_k$ (Bézout's equation)

大数学者アーベル(N. H. Abel 1802－29)も、オイラーの影響を強く受けている。代数幾何学の源泉ともいわれるアーベルの定理(1829)は、一つの平面代数曲線と助変数つきの代数曲線族との交点の追跡であって、オイラーの解析幾何[E]の精神を忠実に受け継いでいるように思われる。定理の内容を現代風に(あるいは科研費の研究課題風に)言えば、「周期行列を用いた線形系の特徴付け」とでもなるだろうが、平たく言えばこれによってアーベルは代数曲線上で極と零点を与えて関数を作る問題を解いたのである。したがって、べき級数の収束条件にも名を残すアーベルの眼が次の問題をとらえていたとしても何の不思議もないだろう。

問. n次元複素射影空間 $\mathbb{P}^n$ 内の代数的閉部分集合X上の関数fが次をみたすとする:

> Xの各点のまわりでfは$\mathbb{P}^n$の局所座標に関する正則関数の比として書ける。(つまりfはX上の有理型関数である。)



$C_t \cap D$ の追跡

⇒ Abel の定理 (1829)

(零点と極を与えて関数を作る)

局所理論(平面領域で)

零点を与えて … : Weierstrass

極(主要部)を与えて … : Mittag-Leffler

W + M ⇒ 補間定理

(拡張問題の局所解)

SS

Cousinの定理 ⇒ $\mathbb{C}^2$上の補間定理

上空移行原理

I Domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles.

Posons

$$\varphi((x), y_\nu)=G((x), y_\nu)[Q((x))y_\nu-P((x))].$$

Pour la fonction φ ainsi acquise, il est immédiatement verifié qu'elle est holomorphe dans D', et de plus que

$$\varphi[(x), R_\nu((x))]=f((x)),$$

pour tout point sur S, dans D'.(1)

(1) Je dois l'idée à M. H. Cartan pour ce mode d'application du théorème de M. Cousin. Voir: Sur les fonctions de deux variables complexes. Bull. Sci. Math. 1930.

(Kiyoshi Oka, 1936)

このときfは$\mathbb{P}^n$の同次座標に関する多項式の比として書けるか。(つまりfは有理関数として$\mathbb{P}^n$上に拡張できるか。)

よく知られているように、この問題は岡・カルタンの仕事をへてセール(J.-P. Serre 1926-)の論文[FAC]ではじめて解決された(1955)。

§2. 岡・カルタン理論

ベズーの方程式やアーベルの定理から岡・カルタン理論への道をたどってみると、まず目につくのは平面領域におけるワイアシュトラス(K. Weierstrass 1815-97)の乗積定理と、ミッタク・レフラー(G. Mittag-Leffler 1846-1927)の部分分数分解定理である。これらと関数を作る問題を解いているが、一旦は零点の分布と極の分布を別々に考えることにより、問題を幾分簡易化している。まずこれらの結果を多変数へと一般化しようというのがクザン(P. Cousin 1863-1933)の問題であり、

Abel (1829) → { Riemann / Poincaré, Lefschetz / Hodge, Kodaira / Weil, Narasimhan-Seshadri }

↓

local (Mittag-Leffler / Weierstrass) → Cousin → Oka-Cartan (coherent analytic sheaves)

Cousinの問題

極(主要部)または零点を与えて関数が作れるか

幾何　　代数

↘　↙

方程式

↙　↘

割算問題　　拡張問題

ここを一つの突破口として本格的な多変数関数論が展開することになった。

岡・カルタンの定理の復習を始めよう。解析接続によって生ずる関数の多価性を解消するため、「$\mathbb{C}^n$上の領域」$\mathcal{D}$を考え、そこを定義域とする正則関数の集合$\mathcal{O}(\mathcal{D})$において以下の問題を考える。

割算問題： $f_1, \cdots, f_m, h$を$\mathcal{O}(\mathcal{D})$の元とする。$\mathcal{D}$のすべての点pに対し、pの近傍Uと$g_1^U, \cdots g_m^U \in \mathcal{O}(U)$が存在して

$$h = \sum_{i=1}^{m} g_i^U f_i$$

がU上で成り立つならば、$\mathcal{O}(\mathcal{D})$の元$g_1, \cdots, g_m$でベズーの方程式

$$h = \sum_{i=1}^{m} g_i f_i$$

をみたすものが存在するか。

この答えがすべての$f_1, \cdots, f_m$, hに対して肯定的なとき、

「$\mathcal{D}$上で割算問題が解ける」

ということにする。

$D \underset{open}{\subset} \mathbb{C}^n$

$\mathcal{O}(D) := \{ f \mid f \text{は} D \text{上正則} \}$

$\forall p \in D \quad f(z) = \sum_I c_I (z-p)^I$

$c_I \in \mathbb{C}$, $I = (i_1, \cdots, i_n)$, $z^I = z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n}$

解析接続 $\Longrightarrow$ 多価性

定義. $\mathcal{D} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}^n$ が $\mathbb{C}^n$上の領域

$:\Longleftrightarrow$ 1) πは局所同相 (i.e. $\forall p \in \mathcal{D}$ $\exists_{nbd}\, U \ni p$ s.t. $\pi|U : U \xrightarrow{\sim} \pi(U)$)

2) $\mathcal{D}$は連結

$(\mathcal{D}_1, \pi_1)$, $(\mathcal{D}_2, \pi_2)$ $/\mathbb{C}^n$ に対し

$(\mathcal{D}_1, \pi_1) \le (\mathcal{D}_2, \pi_2)$

$$:\Longleftrightarrow \exists \iota : \begin{tikzcd} \mathcal{D}_1 \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi_1"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \mathcal{D}_2 \arrow[dl, "\pi_2"] \\ & \mathbb{C}^n & \end{tikzcd}$$

s.t. $\mathcal{O}(\mathcal{D}_1) = \{ f \circ \iota \mid f \in \mathcal{O}(\mathcal{D}_2) \}$

$(:= \iota^* \mathcal{O}(\mathcal{D}_2))$

定義 $(\mathcal{D}, \pi)$ が正則領域

$:\Longleftrightarrow$ $(\mathcal{D}, \pi) \le (\mathcal{D}', \pi')$ ならば

$(\mathcal{D}', \pi') \le (\mathcal{D}, \pi)$

定理 (Hartogs 1906)

$\mathcal{D} = \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathbb{C}^n$ かつ $n \ge 2$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{O}(\mathcal{D}) = \iota^* \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$

(ハルトークス (F. Hartogs 1874-43) の接続定理)

例．$\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ 上では割算問題は解けない。実際、$f_1 = z_1,\ f_2 = z_2,\ h = 1$ に対してはベズーの方程式は局所解 g_i^U をもつが、大域解 g_i をもたない。

拡張問題：$\mathbb{C}^n$ 上の領域 $\mathcal{D}$ の閉部分集合 A が解析的、つまり各点 $p \in A$ に対し、p のまわりで A が有限個の正則関数の共通零点集合として書けるとする。このとき、A 上の関数 f が A のどの点 p においても $\mathcal{D}$ における p のある近傍上の正則関数へと拡張できるならば、f は $\mathcal{D}$ 上へも正則に拡張できるか。

A や f のとり方によらずにこの答えがいつも肯定的なとき、「$\mathcal{D}$ 上で拡張問題が解ける」という。

例．$\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ 上では拡張問題は解けない。（ハルトークスの接続定理による）

岡・カルタンの定理は、「すべての正則領域上で割算問題と拡張問題は可解」というものである。この主張の逆については、「拡張問題が解ける領域は正則領域に限る」は正しい。割算問題については同様の主張は偽である。

岡・カルタンの定理

正則領域上で割算問題と拡張問題が解ける．（逆も真）

$\Uparrow$

上空移行の原理

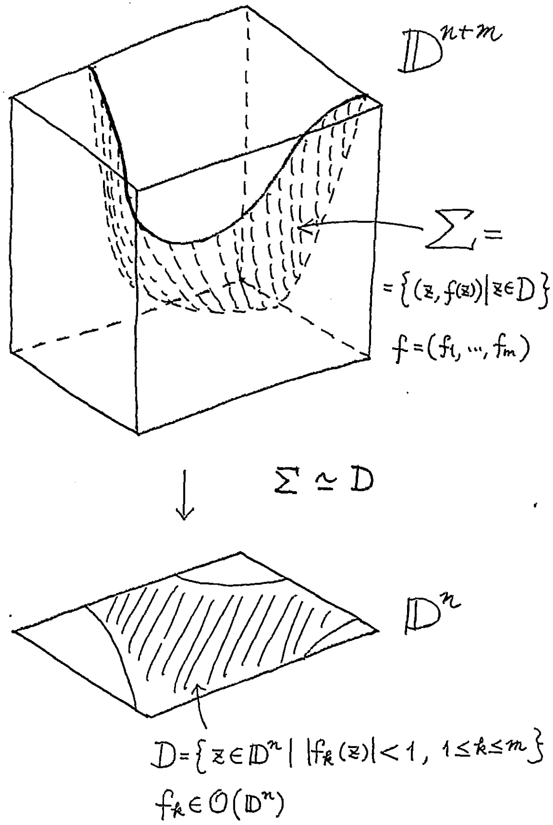
§3．上空移行の原理

上空移行の原理とは、一般領域上の問題をより次元の高い単純な形の領域上の問題に帰着させて解こうという、岡の第一論文の着想をいう。

普通、複数の未知数を含む方程式を解こうというとき、オイラーの提案のようにまず未知数の数を減らそうと考えるから、問題を高次元化して逆に未知数を増やすというのは不自然に思えるかもしれない。しかし問題の線形化の観点からはこれは自然な発想であり、タルタリア(N. Tartaglia 1500?–57)の3次方程式の解法もこれと通じる所がある。

これによって多面体領域上のクザンの問題と近似問題が簡単に解けてしまった。鍵になったのは正則写像のグラフ Σ からの拡張定理であり(近似定理はその系)、第一論文ではこれと加法的クザン分布の可解性が二重帰納法で証明されている。第七論文が書かれた主目的は、この拡張定理を正則領域内の任意の解析的部分集合からのものへと一般化することであった(cf. [T])。そこでは不定域イデアル $I(\Sigma)$ が導入され、その局所的性質である連接性定理に基いて一般的な拡張定理が示されたのだった。さらにこの続篇である第八論文では正規化定理が示されている。第七論文のスケールは実に雄大であり、セールの[FAC]などは実質的に

上空移行



ただし $\mathbb{D} = \{ s \in \mathbb{C} \mid |s| < 1 \}$.

$$\mathcal{O}(\Sigma) := \{ g \mid g : \Sigma \to \mathbb{C} \ \text{s.t.}\ \forall p \in \Sigma \ \ \exists\, \text{nbd}\ U \ni p \ \text{in}\ \mathbb{C}^{n+m} \ \ \exists\, \tilde{g} \in \mathcal{O}(U) \ \text{s.t.}\ \tilde{g}|_{U \cap \Sigma} = g|_{U \cap \Sigma} \}$$

$\Rightarrow$

制限写像

$$\mathcal{O}(\mathbb{D}^{n+m}) \longrightarrow \mathcal{O}(\Sigma)$$

は全射である.

($m = 1$ のときは $\mathbb{D}^{n+1}$ 上の Cousinの定理から従う.)

はこれに含まれてしまうと言っても過言ではない位だが、それでも岡の意中の会心作はやはり第一論文なのだった。確かにその地点に戻って現在の多変数関数論を眺めると、一つの整然とした風景が見渡せるような気がしてくる。

(一般)拡張問題：Σに特異点を許す.

$\Rightarrow$ 不定域イデアルの考察

$$I(\Sigma) := \bigcup_{\underset{\text{open}}{\delta \subset D}} \{(f,\delta) \mid f\in\mathcal{O}(\delta),\ f|\delta\cap\Sigma = 0\}$$
$$= \bigcup_{\delta\subset D} I_{\Sigma,\delta}$$

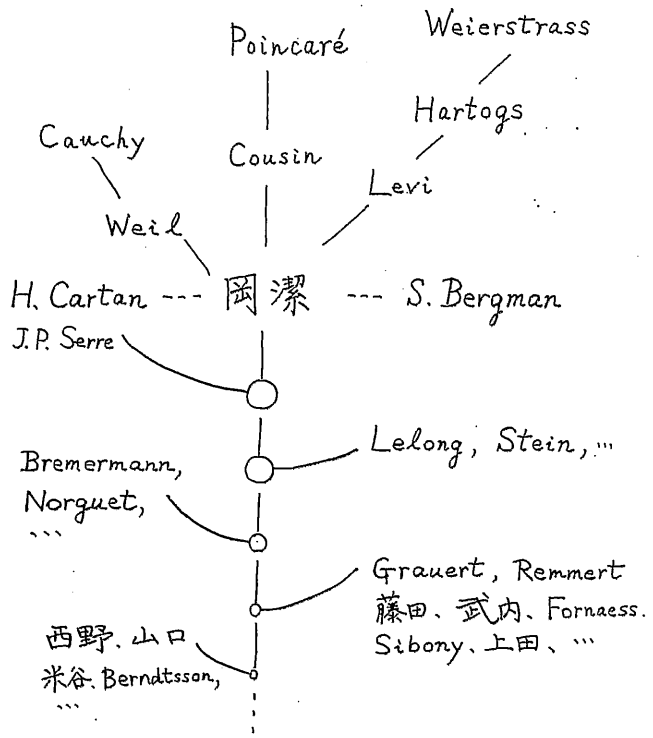
有限性定理

- $\forall p\in D\ \exists \text{nbd}\ U\ni p\ \exists f_1,\cdots,f_m \in I_{\Sigma,U}$ s.t. $\forall q\in U\ \exists \text{nbd}\ V\ni q$ s.t. $I_{\Sigma,V} = \sum_{k=1}^{m} f_k\cdot\mathcal{O}(V)$.
- $\alpha : \mathcal{O}(V)^m \longrightarrow I_{\Sigma,V}$, $\ (g_1,\cdots,g_m) \longmapsto \sum f_k g_k$ $\Rightarrow$ Kerαも上と同様(局所有限)

イデアル層：$\tilde{I}(\Sigma) := \bigcup_{p\in D} \{(f,\delta,p) \mid (f,\delta)\in I(\Sigma),\ p\in\delta\}$

$\tilde{I}(\Sigma) \ni (f,\delta,p) \sim (f',\delta',p') :\Leftrightarrow p=p'$ かつ $\delta\cap\delta' \supset {}^{\exists}V \ni p=p'$ s.t. $f|V = f'|V$

$\tilde{I}(\Sigma)/\sim =: \mathcal{I}_\Sigma \longleftrightarrow I(\Sigma)$



§4. L^2 理論への道

「春宵十話」には、第一論文についてこんな記述がある。

“それまでも、またそれ以後も発見の喜びは何度かあったが、こんなに大仕掛なのは初めてだった。私はこの翌年から「多変数解析函数論」という標題で二年に一つぐらいの割合で論文を発表することになるが、第五番目の論文まではこのとき見えたものを元にして書いたものである。”

筆者がこれを読んだのは高校生の時であり：「一回のひらめきで五本の論文が書けるとは！」と単純に感心したものだった。しかし後に多変数関数論を専攻するようになってから、その「一回のひらめき」のすごさは実はそれどころではなく、「第五番目の論文まで」というのはむしろ控え目な表現なのだと悟った。なぜならこれが、その前の文章に出て来た「どこをどうやればよいかがすっかりわかった」範囲を指すことが、岡理論を知ることにより納得できたからである。実際、第七、第八論文は上に述べたように第一論文の延長であり、第六、第九論文はやや趣きが異なるとはいえ、その中核をなす‘岡のはり合せ定理（Oka's

岡潔頌

中野茂男先生遺詠

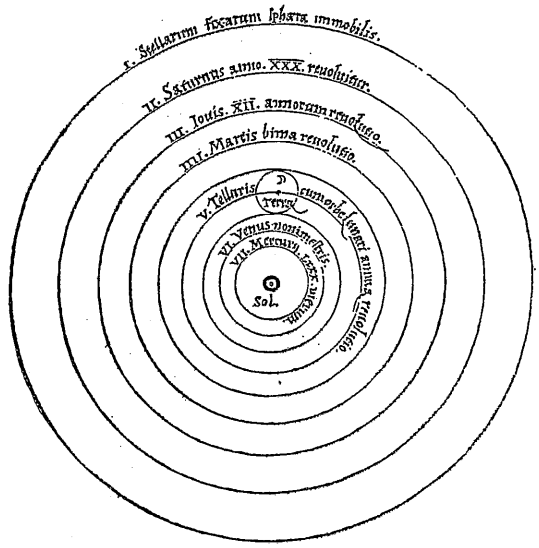
数学の 道攻めんと 岡教授 えらびし分野は 多変数
複素函数 先達の 手がけ初めにし 荒くれの 野をひらかんと
茨切り 石とり除き 木の根ほり 巖をうがつ 三十年の 辛苦の果の
十篇の 主なる著作 それぞれに 重き問かけ 遂げしわざ
珠と輝やく そが中に 世の人挙り 優秀と 推すをば措きて
最先に 我が意えたるは 第一の 作なりけりと 高らかに 述べてけりとは
我師なる 秋月大人の 伝へたる 言にてありけり 自らも 直に聞きえし
岡大人の 感憶一言「第一の 作成りしとき 天地の 我を最中と
一列に 整ひ並びき」感激を 今に伝へて 思ひ出づる 言にてありけり
宜なりや 論理の道を 辿りえて 心にかなふ わざを遂げ
宇宙の秩序を あるままに その身につけて 感ぜしは 自然の法を
数学に 求めんとする 岡大人の いとも気にそふ いさをなり
続く 我等の しるべなり 我人ともに 後の世に 言ひつぎ行かむ
岡の心を

反歌

数学は 自然を 描写するものと
先師の 言の 偲ばるるかな

Heftungssatz)’は上空移行の原理なしには到達できない命題だからである。つまり岡理論全体が、炳乎たる第一論文を中心として整列していると言ってよい。これは決して誇張などではない。早い話が、天文学者のうちで、コペルニクスの地動説が単に五つの惑星の運行を説明する為にだけ生まれたと考える者が一体何人いるだろうか。

ところで第八論文の冒頭で、岡は‘第一論文以来の主要な問題は、クザンの問題、展開の問題、および凸性の問題である’と述べている。この三つの問題は、岡がベンケ・ツーレン(H. Behnke 1898-79, P. Thullen 1907-92)の総合報告[B-T]を精読して選び出したもので、その解決が周囲の風景を一変させる位の大問題であった。数論で有名なクネーザー(M. Kneser 1928-)が若い頃、父クネーザー(H. Kneser 1898-73)に、‘多変数関数論の重要な問題は岡が全部解いてしまったので、お前は別のことをやれ’と忠告されたという話もある。しかし実際には、残った問題の中にはベルグマン核の境界挙動のように、重要であるにもか



Copernicus, Nicholas (1473 - 1543)

De revolutionibus (天球の回転について) より

S. Bergman 1895−1977

かわらず、道具が不足していた為に誰も歯が立たなかった問題が含まれていた。ベルグマン核の研究を岡が決して軽視していなかったことは、岡が所蔵していた本の余白に見られる書き込みからも明白であろう。

Also ist die Kernfunktion unabhängig von der Auswahl des vollständigen, normierten Orthogonalsystems und somit eine durch den Bereich 𝔅 bestimmte Funktion.

BERGMANN untersucht vor allem das Verhalten von $K(w, z)$ bei Annäherung an den Rand. Er findet dabei eine gewisse Beziehung zwischen dem LEVIschen Differentialausdruck $L(\varphi)$ und $K(w, z)$: Ist ein Randstück $\varphi(u, v, x, y) = 0$ eines Bereiches 𝔅 zweimal stetig differentiierbar und dort $L(\varphi) < 0$, so bleibt $K(w, z)$ bei Annäherung an einen Punkt auf $\varphi = 0$ beschränkt. Ist dagegen $L(\varphi) \geqq 0$, so wird $K(w, z)$ im allgemeinen von 2. oder 3. Ordnung unendlich.

Mit Hilfe der Kernfunktion stellt BERGMANN ferner eine gegenüber analytischen Abbildungen invariante Metrik auf.

Literatur.

ABRAMESCO, N.: [1]: Sur les séries de polynomes à deux variables complexes. C. R. Acad. Sci., Paris Bd. 175 (1922); [2]: Sur les développements en séries à deux var. compl. suivant les inverses de polyn. donnés. C. R. Acad. Sci., Paris Bd. 175 (1922); [3]: Les séries de polyn. à deux var. compl. Ann. Mat. pura appl. (4) Bd. 8 (1930).

ALMER, B.: Sur quelques problèmes de la théorie des fonct. anal. de deux var. compl. Ark. Mat. Astron. Fys. Bd. 17 (1922).

ANDREOLI, G. u. P. NALLI: La formula di Green nel campo compl. e l'estensione del teorema di Cauchy alle funz. di due var. compl. Atti Accad. naz. Linc., Rend. VI Bd. 6 (1927).

BEHNKE, H. [1]: Die Kanten singulärer Mannigfaltigkeiten. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. Bd. 4 (1926); [2]: Natürliche Grenzen. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. Bd. 5 (1927); [3]: Die Abbildungen der Kreiskörper. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. Bd. 7 (1929); [4]: Analytische Abbildungen im Raume zweier kompl. Veränd. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. Bd. 40 (1931); [5]: Vorlesungen über Funktionenth. mehrerer Veränd. (ausgearb. von P. THULLEN), hektogr. Math. Semin. Münster 1930/31.

BEHNKE-THULLEN [1]: Das Konvergenzproblem der Regularitätshüllen. Math. Ann. Bd. 108 (1933); [2]: Bemerkungen zu einer Arbeit von CARATHÉODORY. Math. Z. Bd. 37 (1933); [3]: Die Theorie der Regularitätsbereiche. Sem.-B. Bonn-Münster Hft. 2 (1932); [4]: Über die Verallgemeinerung des WEIERSTRASSschen Produktsatzes. Math. Ann. Bd. 109 (1934); [5]: Der WEIERSTRASSsche Produktsatz bei Funkt. einer und zweier kompl. Veränd. Sem.-B. Bonn-Münster Heft 5 (1933).

BERGMANN, STEFAN [1]: Zwei Sätze über Funktionen von zwei kompl. Veränd. Math. Ann. Bd. 100 (1928); [2]: Über HERMITEsche endliche Formen, die zu einem Bereich gehören, nebst Anwendung auf Fragen der Abbild. durch Funkt. von zwei kompl. Veränd. Math. Z. Bd. 29 (1929); [3]: Anwendung eines KOEBEschen Satzes auf eine Klasse von Funkt. von zwei kompl. Veränd. Jber. Deutsch. Math. Vereinig. Bd. 38 (1929); [4]: Über die Existenz von Repräsentantenbereichen in der Theorie der Abbild. durch Paare von Funkt. zweier kompl. Veränd. Math. Ann. Bd. 102 (1930); [5]: Anwendung des SCHWARZschen Lemmas auf eine Klasse von Funkt. von zwei kompl. Veränd. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. Bd. 39 (1930); [6]: Über Funkt. zweier kompl. Veränd., die ebene Pol- und Nullflächen besitzen. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. Bd. 39 (1930); [7]: Über d. schlichten Bereiche in der Theorie der Funkt.

奈良女子大学図書館蔵「岡文庫」より

ともあれ、1950年頃からポテンシャル論に根差した直交射影の方法を本格的に多変数関数論に持ち込もうという気運が昂まり、その結果ベルグマン核を視野に入れた研究も動き始めた（cf. [G-S]）。モリー（C. Morrey 1907-84）がL^2評価式を用いてコンパクトな実解析的多様体を$\mathbb{R}^n$に実解析的に埋め込んだのを皮切りに、コーン（J. Kohn 1932－）が強擬凸領域上でL^2評価式を確立、ついでヘルマンダー（L. Hörmander 1931－）とアンドレオッチ・ヴェゼンティーニ（A. Andreotti 1924-80, E. Vesentini 1928-）が互いに独立に開複素多様体上の$\bar{\partial}$方程式の一般論を建設した（1965）。その結果、岡が解いた三つの問題に対して定量的なアプローチが可能になった。例えばヘルマンダー[H]は強擬凸領域上のベルグマン核の境界挙動を決定しているが、これはレビ問題（上記の凸性の問題）の一つの定量的な解である。

これを受けて岡の第七論文を発展させたのがスコダ（H. Skoda 1945－）である。スコダはL^2割算定理を示したが、

A. Andreotti

L^2割算定理

Theorem (Skoda 1972) $\Omega \overset{\psi c}{\subset} \mathbb{C}^n$, $\phi \in PSH(\Omega)$, $g = (g_1, \cdots, g_p) \in \mathcal{O}(\Omega)^p$, $q = \min(p-1, n)$, $k > q$.
$\Rightarrow \forall f \in \mathcal{O}(\Omega)$ s.t. $\int_\Omega |f|^2 |g|^{-2k-2} e^{-\phi} d\lambda < +\infty$,
$\exists h = (h_1, \cdots, h_p) \in \mathcal{O}(\Omega)^p$ s.t.

$$f = \sum_{i=1}^{p} g_i h_i \quad \text{and}$$

$$\int_\Omega |h|^2 |g|^{-2k} e^{-\phi} d\lambda \leq \frac{k}{k-q} \int_\Omega |f|^2 |g|^{-2k-2} e^{-\phi} d\lambda$$

Theorem (2003) $\Omega \overset{\psi c}{\Subset} \mathbb{C}^n \Rightarrow \exists C > 0$
s.t. $\forall \phi \in PSH(\Omega)$, $\forall f \in \mathcal{O}(\Omega)$ s.t.

$$\int_\Omega |f(z)|^2 e^{-\phi(z)} |z|^{-2n} d\lambda < \infty$$

$\exists g = (g_1, \cdots, g_n) \in \mathcal{O}(\Omega)^n$ s.t.

$$f(z) = \sum_{i=1}^{n} z_i g_i \quad \text{and}$$

$$\int_\Omega |g|^2 e^{-\phi(z)} |z|^{-2n+2} d\lambda \leq C \int_\Omega |f|^2 e^{-\phi(z)} |z|^{-2n} d\lambda$$

ただしψcは擬凸、PSHは多重劣調和を表す。

これは深い結果であり、ベズーの方程式を通して可換環論や代数幾何に応用された(cf. [Sk], [B-S], [Bw], [S-2])。

2003年の筆者の論文は、スコダの定理を非常に特殊な場合にやや改良したものである。これ自体にはめぼしい応用もなく、取り上げるほどの事はないが、その証明方法に多少面白い点があるかと思うので以下にその要点を記す。

Mは(パラコンパクトかつ連結な)複素多様体、EとQはM上の正則ベクトル束であり、全射束写像 $\beta : E \longrightarrow Q$ が与えられているとする。このとき双対束 E^*, Q^* の射影化 $P(E^*)$, $P(Q^*)$ の上の直線束 $L(E)$, $L(Q)$ と、βによって誘導される単射 $\beta^* : P(Q^*) \longrightarrow P(E^*)$、および標準的な同型 $\beta^*L(E) \simeq L(Q)$ が存在する。これによって制限準同型

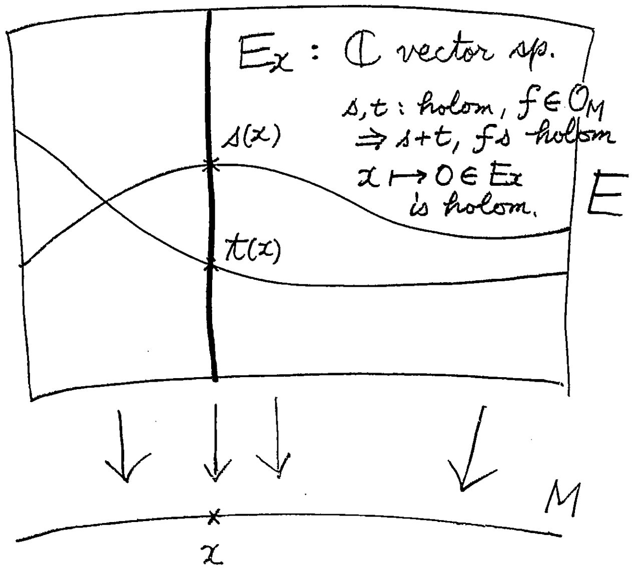
$$H^0(P(E^*), L(E)) \xrightarrow{\rho} H^0(P(Q^*), L(Q))$$

が生ずるが、ρはβによって誘導された準同型

$$H^0(M, E) \xrightarrow{\beta_*} H^0(M, Q)$$

と同一視できる。従って β_* の像を特徴

Holomorphic vector bundles



$$E \to M \qquad E = \bigcup_{x\in M} E_x$$

$$E^* = \bigcup_{x\in M} E_x^*$$

$$P(E^*) = E^* \setminus 0\text{-section} / \mathbb{C}^*$$

$$= \bigcup_{x\in M} \{ \ell^{-1}(0) \mid \ell \in E_x^* \setminus \{0\} \}$$

$$\begin{array}{ccc} L(E) & \supset & E_x/\ell^{-1}(0) \ (= L(E)_y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ P(E^*) & \ni & \ell^{-1}(0) = y \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} p^*E \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & E \arrow[d] \\ P(E^*) \arrow[r, "p"] & M \end{tikzcd}$$

fiber product

付ける問題(一般割算問題)は、ρの像を特徴付ける問題(制限拡張問題)と同等である。このことは問題をL^2正則断面に限っても同じだから、一つのL^2拡張定理の系としてL^2割算定理が得られることになる。

$$E \xrightarrow{\beta} Q$$

$$\Downarrow$$

$$P(E^*) \hookleftarrow P(Q^*)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{ccc} H^0(P(E^*), L(E)) & \xrightarrow[\text{restriction}]{} & H^0(P(Q^*), L(Q)) \\ \wr\| & & \wr\| \\ H^0(M, E) & \xrightarrow{\beta_*} & H^0(M, Q) \end{array}$$

§5. L^2拡張定理(またはL^2上空移行)

L^2拡張問題を筆者は長年に亘って研究して来たが、最近はこれを次のように定式化して考えている。

"体積要素つきの複素多様体(M, dV)、ファイバー計量つきのM上の正則ベクトル束(E, h)、およびM内の閉解析的部分集合Sが与えられたとする。このときS上の(なるべく小さい)測度$d\mu$を見つけて$(h\otimes(dV)^{-1}, d\mu)$に関して2乗可積分な$E\otimes K_M|S$のすべての正則断面が$(h\otimes(dV)^{-1}, dV)$に関して2乗可積分な$E\otimes K_M$の正則断面として拡張できるようにせよ。"

この問に対する一つの答を要約したのがThm 0である。

Let
M : a cx mfd of dim n
$E \to M$: a holo. v. bdle
h : a fiber metric of E
K_M : the canonical bdle of M
dV : a volume form on M
(= a fiber metric of K_M^*)
$S \subset M$: a closed cx anal. set

L^2 extension problem
Find a (nontrivial) class of measures on S for which L^2 holomorphic sections of $E\otimes K_M$ over S are extendable to those on M.

この定理における測度$d\mu$，関数φ，および定数Cが具体的な形で与えられる場合が面白いわけだが、いわゆる大沢・竹腰の定理は有界擬凸領域に対してそれを行なっている（cf.［O-T］）。筆者がこの定理の証明をめざした理由は、ベルグマン核の境界挙動を次元に関する帰納法で出してみたかったからである。科研費の研究課題としては、

「ベルグマン核の境界挙動への
上空移行的アプローチ」

とでもいったところか。後で気付いたのだが、岡の第一論文における展開定理は、'L^2上空移行'による'L^2展開定理'へと精密化される（2003，未発表）。対数容量のパラメータ依存性への応用もある（下記参照）。

$X \underset{\text{closed}}{\subsetneq} \mathbb{D}^n$，$\mathbb{D}^n \setminus X$は正則領域

$z = (z_1, \cdots, z_n) = (z', z_n)$

$X_{z'} = \{ z_n \mid (z', z_n) \in X \} \subset \mathbb{C}$

定理　$X_0 \neq \mathbb{D}$であり、かつ

X_0の対数容量が0でなければ

$\lambda\left(\{ z' \in \mathbb{D}^{n-1} \mid X_{z'}\text{の対数容量} = 0 \}\right) = 0$

<u>Thm 0.</u> If M is a Stein mfd, then $\exists \varphi : M \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$, $\exists C > 0$,

$\exists$ a measure $d\mu$ on S s.t.

$\mu(K) < \infty$ for $\forall K \Subset S_{reg}$

s.t.

$\forall \psi \in PSH(M)$, $\forall f \in H^0(S, E \otimes K_M)$

s.t.

$$\|f\|^2 := \int_S e^{-\varphi-\psi} |f|^2_{h \otimes (dV)^{-1}} d\mu < \infty$$

$\exists \tilde{f} \in H^0(M, E \otimes K_M)$ s.t.

$\tilde{f}|S = f$ and

$$\int_M e^{-\varphi-\psi} |\tilde{f}|^2_{h \otimes (dV)^{-1}} dV$$

$$\leq C \|f\|^2$$

ただしS_{reg}はSの正則点の集合を表す。

大沢・竹腰の定理（1987）

In case

M = a bdd psd-convex dom $\subset \mathbb{C}^n$

$E = \mathbb{1}_M$ $(:= M \times \mathbb{C})$

$S = \{z_n = 0\} \cap M$

$dV = d\lambda_{\mathbb{C}^n}$ and

$h = 1$,

one may put

$\varphi = 0$

$C = 1720\pi \cdot \mathrm{diam}(M)^2$ and

$d\mu = d\lambda_{\{z_n=0\}} | S$

L^2拡張問題をさらに掘り下げるきっかけを与えてくれたのはザイプ（K.Seip 196?-）の仕事（cf. [Sp-1, 2, S-W]）であった。ザイプが解いたのは$\mathbb{C}$上のBargmann-Fock空間と$\mathbb{D}$上のBergman空間に対する補間問題であったが、これを多変数でやるにはどうすればよいかと考えるうち、上記の定式化にたどり着いた（1993）。問題をこの視点で捉えることにより大沢・竹腰の定理を幾分か改良することができ、応用としてベルグマン核の新しい評価式も得られた（cf. [O-1, 2, 3]）。[O-3]の主結果は複素多様体上のL^2拡張定理（Thm 3、後出）なのだが、対象を$M=\mathbb{C}^n$などに限定して述べるとThm 1のようになる。（Thm 0の文脈では$d\mu = |ds|^{-2}d\mu_S$.）Sの無限遠での‘込み工合’が$|ds|$の挙動に反映されるので、そこでは$|ds|^{-2}$は落とせない。

In case

$M=\mathbb{C}^n$

$E=\mathbb{1}_M$

$S=s^{-1}(0)\ (\neq \phi)$ with $s\in\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ s.t. $(ds)^{-1}(0)\cap S$ is nowhere dense in S, one has

<u>Thm 1.</u>

Let $\delta>0$, $\omega=\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial|z|^2$, $\varphi\in PSH(\mathbb{C}^n)+(1+\delta)\log(|s|^2+1)$, and $d\mu_S := \omega^{n-1}|S$. Then $\exists C=C_\delta>0$ s.t. $\forall\psi\in PSH(\mathbb{C}^n)$ and $\forall f\in\mathcal{O}(S)$ s.t. $\int_S |ds|^{-2}e^{-\varphi-\psi}|f|^2 d\mu_S<\infty$ $\exists\tilde f\in\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ s.t.

$\tilde f|S=f$ and

$$\int_{\mathbb{C}^n} e^{-\varphi-\psi}|\tilde f|^2 d\lambda \le C\int_S |ds|^{-2}e^{-\varphi-\psi}|f|^2 d\mu_S$$

しかしThm1におけるSが特異点をもつ場合、ds の零点の位数によっては可積分条件から f のそこでの零点の位数にも条件がついてくる。これはいかにも拡張定理としては不格好で、第一このままでは岡・カルタンの定理の精密化にさえなっていない。そこで無限遠における挙動だけを条件にしたL^2拡張定理を作りたいと思ってThm3をさらに拡張した（Thm4. 後出）。その特別な場合がThm2である。

これで一応は S の特異点のまわりでの関数の挙動に制約をつけることなしにL^2拡張定理が得られたわけだが、その代償として次元と負荷関数の方に条件がついてしまった。しかしここをいじると反例があったりするので仕方がない。ちなみに ψ に関する条件が落とせないのは明白（右の反例）だが、多分'$n\geq 3$'も落とせない。

Thm 2 (a special case of the newly revised L^2 extension theorem)
Let φ, S and $d\mu_S$ be as in Thm 1. Assume moreover that

$$n\geq 3 \quad \text{and} \quad \varphi \in C^2.$$

Then, $\forall$ nbd $U\ni 0$ and $\forall \psi\in PSH(\mathbb{C}^n)$ satisfying $\psi|U\equiv 0$, $\exists$ a nbd $V\ni 0$ with $V\Subset U$ and $\exists C=C_{\varphi,S,V}$ s.t.

$\forall f\in\mathcal{O}(S)$ s.t. $\int_{S\setminus V}|ds|^{-2}e^{-\varphi-\psi}|f|^2 d\mu_S<\infty$

$\exists \tilde{f}\in\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ s.t. $\tilde{f}|S=f$ and

$$\int_{\mathbb{C}^n} e^{-\varphi-\psi}|\tilde{f}|^2 d\lambda \leq C\int_{S\setminus V}|ds|^{-2}e^{-\varphi-\psi}|f|^2 d\mu_S$$

Note. Thm 2 becomes false if '$\psi|U\equiv 0$' is removed from the assumption.

Counterexample: $n\geq 2$, $s\in\mathbb{C}[z]$, $s(\lambda z)=\lambda^d s(z)$, $d\geq 2$ s.t. $(ds)^{-1}(0)=\{0\}$.
$\exists v_1,\cdots,v_n\in\mathbb{C}^n$ linearly indep. s.t.
$v_1,\cdots,v_{n-1}\in s^{-1}(0)$, $v_n\notin s^{-1}(0)$
$\exists w_1,\cdots,w_n\in(\mathbb{C}^n)^*$ s.t.
$w_k(v_n)=0$ $(1\leq k\leq n-1)$ $w_n(v_n)=1$
$w_n(v_k)=0$ $(1\leq k\leq n-1)$
Put $\psi(z)=(n-1)\log\sum_{k=1}^{n-1}|w_k|^2+|z|^2$.
Then

$$\int_S e^{-\psi}|w_n|^2 d\mu_S<\infty.$$

However, any extension $\widetilde{w_n}$ of w_n with $\int e^{-\psi}|\widetilde{w_n}|^2 d\lambda<\infty$ would satisfy $\mathrm{ord}_0\,\widetilde{w_n}\geq 2$.

Thm 3についてだが、ここでは $d\mu$ に関する条件を述べるために「Sに極をもつ」関数 Φ を導入し、$d\mu$ と (dV, h) の関係を Φ を介在させて記述した。それが 1), 2), 3) である。Mがスタイン多様体であることを仮定する代りに条件 4) を考えたのは、Thm 3の系として L^2 割算定理を得たかったからである。

関数 Φ にさらに条件 (k-admissibility) をつけると Thm 4 が得られる。Thm 2の状況では $\log|s|^2$ はSの各点において 1-admissible になるが、これはどの点 x に対してもその近傍に含まれる完全交差複素曲面で、x 以外ではSと横断的に交わり、しかも x における重複度がいくらでも高いものが作れるからである。

こういう自明の理を $\bar\partial$ 方程式の解法マニュアルに組み込むことによって以下の議論が可能になった。

Thm 4の証明のスケッチ（詳細は [O-4] を参照）：簡単のため $X=\phi$ とする。このとき

$$f \in A^2(S, E\otimes K_M, e^{-\psi}h\otimes(dV)^{-1}, d\mu_0)$$

に対し、スタイン多様体上のカルタンの

$A^2(M,E,h,dV) := \{L^2\text{ hol. sect. of } E \text{ w.r.t. } (h,dV)\}$

K_M : the canonical line bundle

$S\subset M$, $\Phi : M \xrightarrow[\text{cont.}]{} [-\infty, 0)$ s.t.

- $\Phi^{-1}(-\infty)=S$, $\Phi|M\setminus S \in C^\infty$, $e^{-\Phi}$ is nowhere integrable along S $:\Longleftrightarrow$ Φ poles S
- A measure $d\mu$ on S is said to be a residual majorant of (dV, Φ) if

$$\varlimsup_{R\to\infty} \int_{-R<\Phi<-R+1} f e^{-\Phi} dV \le \int_S f\, d\mu \quad {}^\forall f \in C_0^\infty(M)_{\ge 0}$$

- h is Φ-positive $:\Longleftrightarrow \exists \tau_0 > 0$ s.t.

$$\Theta_h + (1+\tau)\mathrm{Id}_E \otimes \partial\bar\partial\Phi \ge 0$$

for $0 \le {}^\forall\tau \le \tau_0$.

- $X\subset M$; X is L^2 negligible $:\Longleftrightarrow$ ${}^\forall$open $U\subset M$, $A^2(U\setminus X, K_M) \cong A^2(U, K_M)$

<u>Thm 3</u>. Suppose that

1) Φ poles S
2) $d\mu$ is a residual majorant of (dV, Φ)
3) h is Φ-positive

and

4) $\exists X \underset{L^2 \text{ negl.}}{\subset} M$ s.t. $M\setminus X$ is Stein and $S\cap X$ is nowhere dense in S.

Then

$$\exists I : A^2(S, E\otimes K_M, h\otimes(dV)^{-1}, d\mu) \xrightarrow{\text{bdd. linear}} A^2(M, E\otimes K_M, h\otimes(dV)^{-1}, dV)$$

s.t. $I(f)|S = f$ holds for ${}^\forall f$.

(NMJ 2001)

定理B（一般化された岡・カルタンの定理）より、M上の$E\otimes K_M$の正則断面$\tilde{f}$が存在して$\tilde{f}|S=f$となる。$\mathbb{R}$上のC^∞級関数κで$\kappa|(-\infty,1/3)=0$かつ$\kappa|(2/3,\infty)=1$をみたすものをとり、$R>0$に対して

$$v_R=\bar{\partial}(\kappa(-\Phi-R+1)\tilde{f})$$

とおく。DをM内の相対コンパクトな任意の擬凸領域としたとき、f、D、Rのとり方によらないΓの近傍Wと正数C_0が存在して、十分大きなRに対しては、D上の方程式‘$\bar{\partial}u=v_R$かつ$u|D\cap S=0$’の解として

$$\|u\|_D\leq C_0\|f\|_{S\setminus W}$$

をみたすものがとれることがいえれば十分である。（$\tilde{f}-u$がfのDへのL^2ノルム評価つきの拡張になるから、あとはDとRを動かして極限をとればよい。）

しかしこれを直接実行しようとすると困難にぶち当たる。なぜならΓの付近で$R\to\infty$のときv_Rのノルムが制御できないからである。そこで、Γの

Thm 4. Given $\Gamma\subset S$ with $\#\Gamma<\infty$, assume besides the conditions of Thm 3 that Φ is k-admissible at $\forall p\in\Gamma$ for some $k<n-1$. Then, $\exists$ a nbd $W\supset\Gamma$ (arbitrarily small) and $\exists C>0$ s.t.
$\forall$measure $d\mu_0$ on S s.t.
$$d\mu_0=d\mu \text{ on } S\setminus\overline{W}$$
$\forall\psi\in PSH(M)$ s.t. $\psi|W=0$,
$$\exists I: A^2(S,E\otimes K_M,e^{-\psi}h\otimes(dV)^{-1},d\mu_0)\longrightarrow A^2(M,E\otimes K_M,e^{-\psi}h\otimes(dV)^{-1},dV)$$
s.t.
$I(f)|S=f$ and $\|I(f)\|\leq C\|f\|_{S\setminus W}$
hold for all f.

十分小さなスタイン近傍 V をとり、Γ のある近傍で 0、$M \setminus V$ のある近傍で 1 になる C^∞ 級関数 χ をとって、$\bar\partial$ 方程式 $\bar\partial w = \bar\partial(\chi v_R)$ を、L^2 評価つきで、しかも台の条件

$$\operatorname{supp} w \Subset V$$

つきで解く。(ここで k-admissibility が必要.) このやり方で v_R を Γ の近傍で変形して、ノルムが制御可能な $\bar\partial$ 閉形式 $\tilde{v}_R$ を作ることができる。そこで改めて、方程式 '$\bar\partial u = \tilde{v}_R$ かつ $u|D \cap S = 0$' の解として

$$\|u\|_D \leq C_0 \|f\|_{S \setminus W}$$

($W \Subset V$) をみたすものをとり、

$$\hat{f}_R = \kappa(-\Phi - R + 1)\tilde{f} - u$$

($u = u(f, D, V, R)$) とおく。すると $\hat{f}_R$ は $D \setminus V$ 上で正則であるから、予め D と V を $D \Supset V$ であるようにとっておけば、その解析接続 $\tilde{f}_R$ が f の D への正則な拡張になる。この手続きは $R \to \infty$ のとき $\tilde{f}_R$ のノルムが $\|f\|_{S \setminus W}$ の定数倍で押さえられるように実行可

Definition. Let Φ pole S and $1 \leq k \leq n-1$.

Φ is k-admissible at $p \in S$

$\exists$ a nbd $W \ni p$ with a Kähler metric g

1) $\Phi \in PSH(W)$ and $e^{\Phi/k} \in C^\infty(W)$

2) $W \cap S$ is of pure dimension $n-k$

3) $\exists\, w : W \xrightarrow{\text{holo}} \mathbb{C}^{n-k-1}$, $\exists\, L > 0$ and $\exists$ a nbd $V \ni p$ with $V \Subset W$ s.t.

i) $w | W \cap S \setminus K$ is everywhere of maximal rank

and $\Phi_{k,\varepsilon} := \log(e^{\Phi/k} + \varepsilon)$, $\Upsilon_{\varepsilon'} := \log(|w|^2 + \varepsilon')$ satisfy

ii) $$L\varepsilon\varepsilon'\varepsilon'' e^{-(k+1)\Phi_{k,\varepsilon} + (k-n+1)\Upsilon_{\varepsilon'}} \omega_g^n > \left(\sqrt{-1}\partial\bar\partial(\Phi_{k,\varepsilon} + \Upsilon_{\varepsilon'}) + \varepsilon''\omega_g\right)^n \text{ on } W \setminus K$$

and
$$\varepsilon\varepsilon'\varepsilon'' e^{-(k+1)\Phi_{k,\varepsilon} + (k-n+\frac{3}{2})\Upsilon_{\varepsilon'}} \omega_g^n < \left(\sqrt{-1}\partial\bar\partial(\Phi_{k,\varepsilon} + \Upsilon_{\varepsilon'}) + \varepsilon''\omega_g\right)^n \text{ on } W$$

for all $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'' \in (0, 1)$.

能である。この部分を担うのが[O-T]で発見された捩れつき中野等式を組み込んだL^2理論であることは、Thm 3の場合と同様である。

Thm 4ではΓ（Thm 2の状況ではSing S）を有限集合に限っているが、プレプリントを読んだM. Păun (197?–)が codim $\Gamma \geq 3$ の場合も同様であろうと指摘してくれた。このことは確認もし、Diederich-Mazzilliの例と対比して面白いと思うので以下に記す。

Diederich-Mazzilliの例 (cf. [D-M])

$$D = \mathbb{B}^3 := \{ z \in \mathbb{C}^3 \mid |z| < 1 \}$$

$$S = \{ z \in \mathbb{C}^3 \mid z_1^2 + z_2^{g} = 0 \} \quad (g \in \mathbb{N})$$

とおく。このときgが十分大きければ、$S \cap D$上の有界正則関数fでD上にL^2正則拡張をもたないものが存在する。

Păunのコメント $\Longrightarrow$

$$\underset{\psi c}{D \Subset \mathbb{C}^n}, \quad \underset{\text{cx. anal.}}{S \subset \mathbb{C}^n}$$

codim Sing $S \geq 3$ ならば、

$\forall f \in A^2(S \cap D)$に対し、$\exists \tilde{f} \in A^2(D)$

s.t. $\tilde{f}|S \cap D = f$.

The curvature form of (E,h) is by definition the EndE-valued (1,1)-form Θ_h satisfying $(\bar\partial\partial_h + \partial_h\bar\partial)u = e(\Theta_h)u$ for any $u \in C_0^{p,q}(M,E)$.

From the Kähler identities

$$\vartheta_h = i[\partial_h, \Lambda] \quad \text{and} \quad \bar\vartheta = -i[\bar\partial, \Lambda],$$

we obtain the Nakano identity

$$(1.1) \qquad \bar\partial\vartheta_h + \vartheta_h\bar\partial - \bar\vartheta\partial_h - \partial_h\bar\vartheta = [ie(\Theta_h), \Lambda].$$

Let η be a positive C^∞ function on M. Then, combining (1.1) with the identities

$$e(\partial\eta)^* = i[e(\bar\partial\eta), \Lambda]$$

and

$$e(\bar\partial\eta)^* = -i[e(\partial\eta), \Lambda],$$

we obtain the twisted Nakano identity

$$\bar\partial e(\eta)\vartheta_h + \vartheta_h e(\eta)\bar\partial - \bar\vartheta e(\eta)\partial_h - \partial_h e(\eta)\bar\vartheta$$

$$= [ie(\eta\Theta_h - \mathrm{Id}_E \otimes \partial\bar\partial\eta), \Lambda] +$$

$$e(\bar\partial\eta)\vartheta_h + \bar\partial e(\bar\partial\eta)^* + e(\partial\eta)^*\partial_h + \bar\vartheta e(\partial\eta).$$

§6. 複素ポテンシャル論との相関

ハルトークスによって発見された正則領域の擬凸性は、レビ（E. Levi 1883−1917）をへて岡潔らによって $-\log\delta$（δは領域の境界までの距離）の多重劣調和性として幾何学的に同定された（1942, 53, 54）。多重劣調和関数の概念はルロン（P. Lelong）によっても岡とは独立に導入された。ルロンはさらに正カレントやLelong数による多重極状集合（*pluripolar set*）の研究を提唱した（cf. [L]）。ブレメルマン（H. Bremermann, 1926-96）は多重劣調和関数のペロン族からディリクレ条件をみたす極値的関数を構成し、その解が C^2 級なら複素モンジュ・アンペール方程式をみたすことを示した（cf. [Br]）。劣解の設定を工夫することによってディリクレ問題を解き、複素ポテンシャル論（または多重ポテンシャル論 = *pluripotential theory*）の発展の基礎を築いたのはベッドフォード・テイラー（E. Bedford 1947−, B.A. Taylor 1939−）の仕事である（cf. [B-T-1, 2]）。複素モンジュ・アンペール作用素 $(dd^c)^n$ の定義域をどこに設定するかがここでは重要で、特にその定義域内の単調族に対する作用素の連続性が要請される。基本は有界多重劣調和関数 u に対して $(dd^c u)^n$ が正規ボレル測度になることである（cf. [C-L-N]）。その後これを拡げる方向に話が進み、多重複素グリーン関数（＝ディラック測度に対するディリクレ問題の解）がレンペルト（L. Lempert 1952−）により狭義凸領域上で導入され（1981, 83）、その構成はクリメック（M. Klimek, 1954−）をへてドマイエ（J.-P. Demailly 1957−）によって超凸領域上へと一般化された（1987）。一般に、多様体 M 上に有界な多重劣調和関数 φ があり、それが皆既的（*exhaustive*）すなわち集合 $\{x \in M \mid \varphi(x) < c\}$ が φ の上限未満のすべての c に対して相対コンパクトになるとき、Mは超凸（*hyperconvex*）であるという。最近、陳伯勇（B.-Y. Chen 1971−）は超凸多

様体上のベルグマン計量が完備であることを示したが、その証明はL^2評価による$\bar{\partial}$方程式論と、ドマイエらによる多重複素グリーン関数の評価をふまえたものである（cf. [C]）。

この一方で、1992年、ドマイエは大沢・竹腰の定理を用いて多重劣調和関数に対する近似定理を示した。その一つの応用として、Lelong数に関する蕭蔭堂（Y.-T. Siu 1943－）の定理[S-1]の簡単な別証が得られる（cf. [Dm]）。それに先立って、田剛（G. Tian 1958－）は丘成桐（S.-T. Yau 1949－）のアイディアを実行することにより、コンパクト多様体上でこれに似た近似定理を得ていた（1990）。これは後にキャトリン（D. Catlin 1951－）とゼルディッチ（S. Zelditch 195?－）によって精密化され、現在多方面の注目を集めている。

2007年3月8日、筆者はクラクフ（Kraków）のJagiellonian大学数学科の談話会で講演し、これらを念頭に次の問題を提出した。

Demaillyの近似定理

Lelong数：$\psi \in PSH(\Omega)$, $x_0 \in \Omega$

$$\nu(\psi, x_0) := \liminf_{z \to x_0} \frac{\psi(z)}{\log|z - x_0|}$$

$f \in \mathcal{O}(\Omega) \Rightarrow$

$$\nu(\log|f|, x_0) = \sup\{k \in \mathbb{Z}_+ \mid |\alpha| < k \Rightarrow f^{(\alpha)}(x_0) = 0\}$$

$$A^2_{m\psi}(\Omega) = \left\{f \in \mathcal{O}(\Omega) \,\middle|\, \int_\Omega |f|^2 e^{-m\psi} d\lambda < \infty\right\}$$

$$\{\sigma_\ell\}_{\ell=1}^{\infty} \underset{\text{CONS}}{\subset} A^2_{m\psi}(\Omega),\ \psi_m := \frac{1}{m} \log \sum_{\ell=1}^{\infty} |\sigma_\ell|^2$$

Theorem (Demailly 1992) $\exists C_1, C_2$ s.t.

(a) $\psi(z) - \frac{C_1}{m} \leq \psi_m(z) \leq \sup_{|\zeta - z| < r} \psi(\zeta) + \frac{1}{m} \log \frac{C_2}{r^{2n}}$

$(z \in \Omega,\ r < \delta_\Omega(z))$

(b) $\nu(\psi, z) - \frac{2n}{m} \leq \nu(\psi_m, z) \leq \nu(\psi, z)$, $z \in \Omega$.

Corollary (Siu 1974)

$\forall c > 0$ $E_c(\psi) = \{z \in \Omega \mid \nu(\psi, z) \geq c\}$ は解析集合

$\mathbb{C}^n$ のコンパクト集合 E に対して、
条件

$$u|E \le 0 \text{ かつ } \sup(u - \log|z|) < \infty$$

をみたす $\mathbb{C}^n$ 上の多重劣調和関数の集合を $\mathcal{S}_E$ とする。$\mathcal{S}_E$ の上限が存在するとき、その上包（＝上半連続化）を φ_E とおく。

問．φ_E は $\frac{1}{m}\log(|f_1|^2+\cdots+|f_{N_m}|^2)$ なる形の関数でどれだけ‘良く’近似できるか。

ただし $f_1, \cdots f_{N_m}$ はヒルベルト空間

$$\mathcal{F}_m := \left\{ f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n) \,\middle|\, \int e^{-m\varphi_E}|f|^2 d\lambda < \infty \right\}$$

の正規直交基底とする。

ちなみに φ_E はシチアック（J. Siciak 1931－, Jagiellonian大学名誉教授）の極値的多重劣調和関数と呼ばれ、解析接続の問題を発端として考案されたそうだが、複素力学系で応用されるなど、最近とみにその重要性が増している。

講演終了後、ブウォツキ（Z. Błocki,

Question. Is there any good approximation of Siciak's extremal function

$$\varphi_E := \left(\sup\left\{u \in PSH(\mathbb{C}^n) \,\middle|\, u|E \le 0,\ u \le const + \log(1+|z|)\right\}\right)^*$$

$(E \Subset \mathbb{C}^n)$

by functions of the form

$$\frac{1}{2m}\log(|f_1|^2 + \cdots + |f_{N_m}|^2) \quad (m \to \infty)?$$

(Perhaps already solved)

1968－）氏にベルマン（R.Berman 197?－）氏の論文を教えてもらった。そこでは上の問と似た問題が解かれているので、これを読むなどしてこれからも鋭意勉強を続け、できるだけ長い間「一列の天地」の末席に連なっていたいと思う。

R. Berman

Bergman kernels and weighted equilibrium measures of $\mathbb{C}^n$

2007/Feb/13

$\varphi \in C^2(\mathbb{C}^n)$ s.t. $\exists\, \varepsilon > 0$

$$\varphi(z) \geq (1+\varepsilon)\log|z|^2 \quad (|z| \gg 1)$$

$$\varphi_e = \sup\{\tilde{\varphi} \in \mathcal{L} \mid \tilde{\varphi} \leq \varphi \text{ on } \mathbb{C}^n\}$$

$$\mathcal{L} := \{\psi \mid dd^c\psi \geq 0,\ \psi(z) \leq \log^+|z|^2 + C\}$$

Prop. $\varphi_e \in C^{1,1}$

Thm. Let K_k be the Bergman kernel of $A^2(\mathbb{C}^n, e^{-k\varphi}d\lambda)$. Then

$$k^{-1}\log K_k(z,z) \xrightarrow[\text{on } \mathbb{C}^n]{\text{unif.}} \varphi_e(z)$$

謝辞．岡シンポジウムで講演する機会が与えられたことは筆者にとって本当に光栄なことでした。お世話頂いた組織委員の方々に深く感謝します。

References

[B-T-1] Bedford,E. and Taylor,B.A., The Dirichlet problem for the complex Monge-Ampere operator, Invent. Math. 37 (1976), 1-44.

[B-T-2] ————, A new capacity for plurisubharmonic functions, Acta Math. 149 (1982), 1-40.

[B-T] Behnke,H. and Thullen,P., Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, Erg. d. Math., III, 3, Springer, 1934.

[B-G-V-Y] Berenstein,C.A., Gay,R., Vidras,A. and Ygèr,A., Residue currents and Bezout identities, Progress in Math. 114 Birkhäuser, 1993, pp.158.

[B-1] Bêzout,E., Recherches sur le degré des equations resultantes de l'evanouissement des inconnues et sur le moyen qu'il convient d'employer pour trouver les equations, Mem. Acad, Paris, (1764), 288-338.

[B-2] ———, Theorie generale des equations algebriques, Paris, 1779, 471pp.

[Br] Bremermann,H., On generalized Dirichlet problem for plurisubharmonic functions and pseudoconvex domains, Characterization of Silov boundaries, Trans. Amer. Math. Soc. 91 (1959), 246-276.

[B-S] Briançon,J. and Skoda,H., Sur la clôture intégrale d'un idéal de germes de fonctions holomorphes en un point de $\mathbb{C}^n$, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A 278 (1974), 949-951.

[Bw] Brownawell,W.D. Bounds for the degrees in the Nullstellensatz, Ann. of Math. 126 (1987), 577-591.

[C] Chen,B.-Y., Bergman completeness of hyperconvex manifolds, Nagoya Math. J. 175 (2004), 165-170.

[C-L-N] Cherm,S.S., Levine,H.I. and Nirenberg,L., Intrinsic norms on a complex manifold, Global Analysis (Papers in Honor of K.Kodaira), University of Tokyo Press, 1969, pp. 119-139.

[Dm] Demailly,J.-P., Regularization of closed positive currents and intersection theory, J.Alg.Geom. 1 (1992),361-409.

[D-M] Diederich,K. and Mazzili, A remark on the theorem of Ohsawa-Takegoshi, Nagoya Math. J. 158 (2000), 185-189.

[E] Euler,L., Introductio in analysin infinitorium, II, 1748, オイラーの解析幾何（高瀬正仁訳）海鳴社, 2005

[FAC] Serre,J.-P., Faisceaux algébrique coherents, Ann. Math. 61 (1955), 197-278.

[G-S] Garabedian,P.R. and Spencer,D.C., Complex boundary value problems, Trans. Am. Math. Soc. 73 (1952), 223-242.

[H] Hörmander,L., L^2 estimates and existence theorems for the operator, Acta Math. 113 (1965), 89-152.

[L] Lelong,P., Plurisubharmonic functions and positive differential forms, Gordon and Breach, 1969.

[O-1] Ohsawa,T., On the extension of L^2 holomorphic functions III —— negligible weights, Math. Z. 219 (1995), 215-225.

[O-2] ———, On the extension of L^2 holomorphic functions IV —— a new density concept, Geometry and Analysis on Complex Manifolds, Festschrift for Professor S.Kobayashi's 60th birthday, ed. Mabuchi et al., 1994, pp.157-170.

[O-3] ———, On the extension of L^2 holomorphic functions V ——effects of generalization, Nagoya Math. J. 161 (2001), 1-21. (See also Erratum: Nagoya Math. J. 163 (2001), 229.)

[O-4] ———, On the extension of L^2 holomorphic functions VII —— application of Hartogs type continuation, preprint.

[O-T] Ohsawa,T. and Takegoshi,K., On the extension of L^2 holomorphic functions, Math. Z. 195 (1987), 197-204.

[S-1] Siu,Y.-T., Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents, Invent. Math. 27 (1974), 53-156.

[S-2] ———, Invariance of plurigenera, Invent. Math. 134 (1998), 661-673.

[Sk] Skoda,H., Application des techniques L^2 à l'étude des idéaux d'une algèbre de fonctions holomorphes avec poids, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 5 (1972), 545-579.

[T] 高瀬正仁， 評伝 岡潔（花の章）海鳴社 2004, pp.548.