不変式論と非可換特殊多項式

梅田 亨　(京都大学 理学部)

本稿では2006年3月18日の講演の主旨を敷衍・補足しつつ，筆者が関心をもって研究している Capelli 恒等式を通じて，不変式論・表現論・特殊函数論の三者をつなぐ或る見方を説明したい．

0: 序

実は，中心テーマである「不変式と双対性」という講演題目を選ぼうとしたが，調べてみると既に同じタイトルで話したことも既に何度かあったので，今回は少し特殊化して「不変式論と非可換特殊多項式」とした．そう決めたときには自分以外の講演者を知らず，のちにプログラムで青本和彦氏と大森英樹氏という「その道」(不変式と特殊函数と非可換) の専門家の講演の間に挟まれているのを見て，余りにうますぎる配列に仰天し，かつ戸惑った．この講演記録で，その有機的つながりを充分述べることはできないが，内在する関係と発展性を少しでも感じていただければ幸いである．

話はまず「不変式論」というのはどういうものか，それ自体が広い分野なので，何を中心に捉えているかということから始める．上にも述べたように，結論を言えば「双対性」が「不変式論」として強調したい視点である．その流れの中で非可換の面白い対象 (特殊多項式) が自然に現われるということが講演の主旨である．できればその理由についても，不完全ながら考察してみたい．

ここで「不変式論」と「特殊函数論」を仲介するものとして「表現論」を加え

$$\text{不変式論} \longleftrightarrow \text{表現論} \longleftrightarrow \text{特殊函数論}$$

と書いてみると，自然に (幾分陳腐に) 連想される内容がある．しかし今回の主眼はその解説ではなく，同じ不変式論・表現論・特殊函数論をつなぐ道でも，少

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

し違う見方・別の側面があることを呈示したい，ということにある．

1: 不変式論とは — 歴史から —

まず「不変式論」について，やさしく振り返る.「群」概念の自立は，もちろん E. Galois によってであるが，それ以前にも対称性や変換の概念は存在していたから，不変量は大事なものとして認識されていた．その意味で「不変式論」の成立について言えば,「群」が自立している必要はなかった．この事情は，或いは「不変式論」の群論的視点からの整備があとになったことと関係しているかもしれない．現在「不変式論」と言えば，より限定的に「代数的不変式論」を指す．その誕生ははっきりしていて G. Boole (1841) によってである．彼は Lagrange の解析力学を独学するなかで，2 次形式の標準形の重要さを知り，それをより一般的な問題，つまり同次形式が線型変換でどのように移り変わるか，そしてそのとき不変なものにどのようなものがあるか，という問題に拡張して考察を始めた．そこで，彼は m 元 n 次形式の「判別式」を定義し，その相対不変性を示した．ついでながら注意すると，この「不変式論の起源」となる Boole の仕事について，しばしば「2 元 2 次形式」の判別式の相対不変性を示したかの如く紹介する「数学史」の書物は多い．言うまでもなく，甚だしい矮小化である．(因みに 2 元 2 次形式に関する判別式の相対不変性は，既に Gauss の Disquisitiones Arithmeticae (1801) の 157 条で，3 元 2 次形式については同 268 条で述べられている.)

念のため不変式論について簡単に解説をしておこう．しばしば Boole に帰せられる「2 元 2 次形式」は高校レベルで理解できるので，確かに説明にはうってつけである．2 変数の 2 次同次多項式 (2 元 2 次形式)

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

に対して，変数の線型変換を考える．その変換が 2×2 行列

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

で与えられるとして，

$$f(\alpha x + \gamma y, \beta x + \delta y) = a'x^2 + b'xy + c'y^2$$

となったとしよう．このとき変換された多項式の係数 a', b', c' はもとの係数 a, b, c の一次式 (その係数は $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の 2 次式) で書ける．具体的には

$$\begin{aligned} a' &= a\alpha^2 + b\alpha\beta + c\beta^2 \\ b' &= 2a\alpha\gamma + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2c\beta\delta \\ c' &= a\gamma^2 + b\gamma\delta + c\delta^2 \end{aligned}$$

である．変換を行列で

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \beta^2 \\ 2\alpha\gamma & \alpha\delta + \beta\gamma & 2\beta\delta \\ \gamma^2 & \gamma\delta & \delta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

と書いてみると a, b, c が線型変換を受けていること，及びその線型変換の行列が元の $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の斉 2 次式となっていることが，より見易いだろう．後との関係で少し細かいことをついでに言うと，変数 x, y を横ベクトルとして行列 g を右から掛けた形で変換したのに応じて，係数の方は縦ベクトルとして左から掛けて変換するのが自然だということがある．つまり x, y と a, b, c (より正確には x^2, xy, y^2 と a, b, c) の変換の種類が双対的であることに注意を払いたい．

ところで係数 a, b, c の多項式のうちには，簡単な変換を受けるものがある．例えば，高校以来つきあいの長い**判別式** $b^2 - 4ac$ をとると，対応する判別式 $b'^2 - 4a'c'$ との関係は

$$b'^2 - 4a'c' = (b^2 - 4ac)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2$$

となる．つまり，判別式は線型変換のあと，変換の係数のみを含む量 (今の場合は $(\alpha\delta - \beta\gamma)^2$) が掛かるだけである．このような性質をもつ係数 a, b, c の多項式のことを (2 元 2 次形式の) **相対不変式**と呼ぶ．もし線型変換の行列式 $\det(g) = \alpha\delta - \beta\gamma$ が 1 であるものに話を限れば，判別式は本当に不変で，そのときは (特殊線型群 $SL(2)$ に関して) **絶対不変式**になる．単に不変式と言えば絶対不変なものを指すのが自然であるが，歴史的な理由で相対不変式も不変式と呼ばれることがある．しかし，以下では不変式と言えば原則として絶対不変なものを指すことにしよう．

更に少し歴史を辿ってみよう．G. Boole の仕事に触発され A. Cayley が「不変式論」を数学の一つの分野として自立させた．Cayley はこのような相対不変

式一般について，どれだけあるか，どのように構成するか，等々の基本的問題を立て，系統的に研究をはじめたのである．相対不変式は，射影幾何学的な不変量という意味を担い，その研究は大きな流行を引き起こした．上で，2元2次形式の不変式の例として判別式を採りあげたが，その場合は不変式は判別式の多項式で尽きる．しかし一般に2元 n 次形式になると不変式は沢山存在する．

Cayley は「記号的方法」というものを編み出し，すべての不変式を組織的・原理的に書き下す方法を与えた．しかし，それには多くの重複もあるので，より効率的に，不変式 (絶対不変式と解釈すると環になる) の環としての生成系を数え尽くすことに問題が移った．表示法が複数あるため，必要な基本系 (つまり不変式環の生成系) がどのようなものか，或いはより根本的に，有限な基本系がとれるのか，は判らなかったのである．実際 Cayley 自身誤って $n=5$ で有限ではないと考えたほどで，問題は複雑である．

この不変式の基本系の有限性問題は，その後，一般の2元 n 次形式については P. Gordan が肯定的に解決し (1868)，その成果によって彼は「不変式の王」と呼ばれた．もっと一般の場合は更に困難な問題として立ちはだかる．Gordan の方法は具体的な構成によるものなので，状況はどんどん複雑になる．いくらやってもキリがない．そこに D. Hilbert が現われ，今日「基底定理」と呼ばれる一般的定理 (イデアルの生成系の有限性，より正確には，Noether 環上の多項式環が Noether 環になるという定理) を与え，それを用いて不変式環の有限性の問題を極めて一般的な形 ($G = GL(m), SL(m)$ で基礎にとる表現は任意) で解決した (1888)． 証明が非構成的であったため，Gordan は「それは数学ではない，神学である」と言ったと伝えられる．そしてその「神学」は不変式論のみならず，数学全体の様子を変え，現代数学の誕生をもたらした．

このようにして現代数学 (抽象代数) の幕開けと入れ替わるように「不変式論」は「死んだ」と看做されるまでに至った．このため，今は大学の普通の講義で習わない題目となっている．しかし実際は「不変式論」は何度か復活している．その中で特に重要なのは H. Weyl の “The Classical Groups” (初版 1939, 増補第二版 1946) である．Hilbert の神学の鮮やかさから，不変式論は「(可換) 環論」的な主題だと思われていたが，Weyl はもう一つの基礎である，群論的視点，乃至は「表現論」という主題を正面から採り上げたのである．但し，たしかに表現論自体 Weyl の影響でそれ以降発展したが，その成果が不変式論にまで大き

く及ぶところまではなかなか行かなかった．

歴史的に見ると「不変式論」という上部構造が二つの下部構造である「可換環論」と「表現論」を明らかにした点は教訓的で面白い．

$$\begin{array}{ccc} & \text{不変式論} & \\ \nearrow\!\!\swarrow & & \searrow\!\!\nwarrow \\ \text{可換環論} & & \text{表現論} \end{array}$$

但し「上部構造」「下部構造」と言う用語からは，一方が他方の基礎づけに奉仕するという一方向的関係のように思えるが，実際はそうではなくて，Weyl の本では，新しい表現論の定理を古い不変式論の道具 (例えば Capelli 恒等式) を用いて証明している部分もある．この相互関係は，単なる表面的・過渡的なものではなく，後に R. Howe によって明らかにされるように重要な「双対性」(duality) の潜んでいる場所でもあった．このテーマこそまず説明したい点の一つである．そして，それと通底する類似の相互関係が，不変式論をめぐる話には重層的に立ち現われる．以下で，それが少しでも明らかになればよいと思うが，すべてを明快にできるまでには至っていない．

2: 不変式論の定式化

以上は歴史的に「不変式論」を振り返ってみた．今度は数学的な観点から,「不変式論」とは何かについて現代用語を用いて述べよう．

不変式論とは群 G が環 R に環自己同型として働くとき，その不変元全体のなす部分環 R^G を研究するものである．ここで環 R は非可換でも構わない．特に，その (環としての) 生成系の記述と，それら生成系の間の (代数的) 関係の記述が，はじめに問われる中心的問題となる．それらが決定されたとき，それぞれを**第一基本定理**，**第二基本定理**と呼び慣わす．因みに第三基本定理とは生成系の高次の関係式 (syzygy) の記述である．Hilbert は 1890 年の大論文でこれらすべてについて (基礎体は複素数体 $\mathbb{C}$，群は GL)，その有限性を示した．またその中でもう一つの基礎的定理 Nullstellensatz も与えているが，それは不変式の構成的な手段として現われたのである．神学という「汚名」を雪ぐ意識もあったのだ．

上では一般的な枠組みを述べたが，より特別の状況を考える．群 G がベクトル空間 V に線型作用素として働いているとしよう．つまり，群 G の V 上の

線型表現を考えるのであるが，そのとき V 上の多項式環 $\mathcal{P}(V)$ にも G が自然に働き，その作用は環の自己同型となっている．この $R = \mathcal{P}(V)$ の場合が，しばしば現われる典型的な状況で，はじめに与えられるデータは群 G の表現である．群とその表現を用いて「量」の分類を考えることは重要で，Weyl はこれを不変式論の定式化の中で明確にしている．Weyl 流のエルランゲン・プログラム解釈というものである．

はじめに高校レベルの話として 2 元 2 次形式に関する不変式の説明をした．同様に，基礎にとる同次式を n 次にすれば 2 元 n 次形式に関する不変式が定義される．とは言うものの，その場合が今の枠組みになることの説明も必要であろう．この場合は表現はベクトル表現ではなく，ベクトル表現の n 階対称テンソル積になる．正確には $V_0 \simeq \mathbb{C}^2$ を $SL(2)$ の働く (自然な) ベクトル表現とすると，$V = S^n(V_0^*)$ とした場合が 2 元 n 次形式に関する不変式論の設定である．ここで V_0^* と双対になっているのは，先に説明したとおり，変数と係数が双対関係にあるからである．これに関する不変式 (より一般には共変式と呼ばれるものも含めて) が古典的不変式論に於ける一つの主要なテーマであった．

古典的不変式論で取り扱われたのは，群が一般線型群 $G = GL(m)$ 或いは特殊線型群 $G = SL(m)$ の場合である．まず基礎にとる G の表現としては n 次元の自然な表現 $V_0 \simeq \mathbb{C}^m$，或いはその双対 V_0^* であるが，上のような m 元 n 次形式の不変式論の設定は $V = S^n(V_0^*)$ である．この $V = S^n(V_0^*)$ は $G = GL(m)$ の既約表現ではあるが，不変式は複雑であり難しい．不変式論にとってより基本的な設定は $V_0 \simeq \mathbb{C}^m$ 或いは V_0^* そのもの，またはそれらのいくつかのコピーの直和である．これらは表現としては一般に既約ではないが，最も基礎的なものなのである．「量」の分類からいえば，これらは「ベクトル量」(共変，または反変) なので，この表現に対応する不変式は**ベクトル不変式**と呼ばれる．Weyl は "The Classical Groups" に於いて，一般に G が典型群 $(G = GL, O, Sp)$ の場合に，ベクトル不変式に関する，第一及び第二基本定理を具体的な形で完全に与えたのである．

ベクトル不変式がよく判るという第一基本定理は，先に述べた「より一般の場合の不変式を数え尽くすことができる」という背景 (理論的前提) となっているのである．そして「記号的方法」(symbolic method) はそれを実現する技法である．

3: 記号的方法

記号的方法の背景にベクトル不変式に関する第一基本定理があるとは言っても，各々は独立した別のものである．記号的方法は一種の「母函数」の方法である．あとで非可換の場合にも，その考え方が有効であることを説明するが，ここではまず簡単な場合に Cayley の記号的方法がどのようなものかを説明しておく．馴染みの 2 元 2 次形式の場合にやってみよう．

まず変数 x, y が受ける線型変換が，基本形式を通じて，係数 a, b, c に転換されることを反省してみる．これは x, y と双対的な変換 (反傾表現) を受ける変数 ξ, η を用意し，

$$a \longleftrightarrow \xi^2, \qquad b \longleftrightarrow 2\xi\eta, \qquad c \longleftrightarrow \eta^2$$

という (線型な) 対応を考えると理解が容易になる．実際，この置き換えで基本形式 $ax^2 + bxy + cy^2$ を書くと $(\xi x + \eta y)^2$ となるが，ここで線型形式 $\xi x + \eta y$ が線型変換で不変となるように，互いの変換性が定められているので，対応が確認できるだろう．(因みに上では高校に合わせて基本形式を $ax^2 + bxy + cy^2$ としたが， $ax^2 + 2bxy + cy^2$ とする方が対応がきれいである．一般に 2 元 n 次だと係数を書くとき二項係数を入れて書くのである.) この対応から a, b, c が受ける線型表現が ξ, η の 2 階の対称テンソル表現であることも納得できる．

さて，ここで ξ, η という変数のコピーを作る．例えば ξ_1, η_1 と ξ_2, η_2 を ξ, η と同じ変換を受ける二組の変数としよう．このとき

$$\det \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{pmatrix} = \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1$$

を考えると $SL(2)$ 不変な式となる．この自乗 $(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)^2$ も当然 $SL(2)$ 不変であるが，これを展開して

$$(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)^2 = \xi_1^2\eta_2^2 - 2\xi_1\xi_2\eta_1\eta_2 + \xi_2^2\eta_1^2$$

に上の基本形式の係数 a, b, c との対応を用いて

$$\xi_1^2,\ \xi_2^2 \longleftrightarrow a; \qquad \xi_1\eta_1,\ \xi_2\eta_2 \longleftrightarrow \frac{1}{2}\,b; \qquad \eta_1^2,\ \eta_2^2 \longleftrightarrow c$$

と置き換える．すると

$$\xi_1^2\eta_2^2 - 2\xi_1\eta_1\xi_2\eta_2 + \xi_2^2\eta_1^2 \longleftrightarrow ac - \frac{1}{2}\,b^2 + ac = \frac{1}{2}\,(4ac - b^2)$$

と $SL(2)$ 不変な式が得られる．今の場合得られたのは判別式である．

このように ξ,η というベクトル量の世界に存在する明らかな不変式から乗法的に不変式を生成し，それを群の作用で不変な線型変換で a,b,c の世界に移して不変式を作り出すというのが「記号的方法」なのである．このときベクトル不変式なら，明らさまな不変式 (typical invariants) から乗法的に生成すれば不変式がすべて書けるという第一基本定理がなりたつ．これが一般の不変式の数え尽くしの根拠になる．尤も，この数え尽くすという点はもちろん大事な点であるが,「記号的方法」自体にある，不変式を具体的に構成するという利点も忘れてはならない．

4: ベクトル不変式の第一基本定理

Weyl の "The Classical Groups" で扱っている不変式論の重要な結果は，典型群に関する第一・第二基本定理を具体的に書くというところにある．ここで典型群 (classical groups) とは，一般線型群 $GL(m)$，直交群 $O(m)$，シンプレックティック群 $Sp(m)$ のことを指す．直交群，及びシンプレックティック群はそれぞれ非退化な，対称双一次形式，交代双一次形式を不変にする群として定義される．ここで m は行列のサイズを表わす (従ってシンプレックティック群の場合に m は偶数でなければならない)．

ここで G として $GL(m)$， $O(m)$，$Sp(m)$ をとり，$V_0 \simeq \mathbb{C}^m$ を群を定義するベクトル表現とする．その双対を V_0^* と書けば，ここにも G は反傾表現で作用する．このとき $V_0 \otimes V_0^*$ には (定義によって) 明らかな $GL(m)$ 不変元 (従ってどんな $GL(m)$ の部分群でも不変) がある．具体的に書けば V_0 の基底 $e_1, e_2, \cdots, e_m$ を一組選び，対応する V_0^* の双対基底を $e_1^*, e_2^*, \cdots, e_m^*$ とすると

$$\theta = \sum_{k=1}^{m} e_k \otimes e_k^*$$

となる．これは基底の取り方によらない．非退化形式があるときは，それを通じて V_0^* は V_0 と同一視されるので，$O(m)$，$Sp(m)$ の場合には $V_0 \otimes V_0$ に対応する不変元がある．多項式環 $\mathcal{P}(V_0 \oplus V_0^*) \simeq S(V_0^* \oplus V_0)$ には $V_0^* \otimes V_0$ が部分空間として入っているので，上の不変元に対応する明らさまな不変多項式 (typical invariant) がある．群が $O(m)$ および $Sp(m)$ の場合には，双対空間との同一視を通じて typical invariant は $\mathcal{P}(V_0 \oplus V_0)$ にあると考えるが，$O(m)$ の場合に

は $\mathcal{P}(V_0)$ にもある．説明のために，座標で書いてみよう．上の基底，双対基底に関する 座標函数を $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 及び $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m$ と書くと

$$\theta^*_{11^*} = \sum_{k=1}^{m} x_k \xi_k$$

或いは，群が $O(m)$，$Sp(m)$ の場合には，対称または交代形式に関する双対を，添え字を上付きにして

$$\theta^*_{11} = \sum_{k=1}^{m} \underset{1}{x_k} \underset{1}{x^k}; \qquad \theta^*_{12} = \sum_{k=1}^{m} \underset{1}{x_k} \underset{2}{x^k}$$

但し，変数の下に書いた数字は $\mathcal{P}(V_0 \oplus V_0)$ の成分 (2 成分ある) のうちどちらに関するものかを示している．ちょっとした注意だが，対称形式であれば同じ成分でペアにしてよいが，交代形式の場合だとそれが消えて 0 になる．

これを基礎に，変数のコピーの数を増やすこともできる．一般に G の (反変，共変の混ざった) ベクトル作用 (ベクトル表現) とは，これら V_0 と V_0^* の 幾つかのコピーの直和を言う：

$$V = rV_0 \oplus sV_0^* \qquad (r \text{ 箇の } V_0 \text{ のコピーと } s \text{ 箇の } V_0^* \text{ のコピーの直和}).$$

但し，G が $O(m)$，$Sp(m)$ の場合は V_0 と V_0^* が同型となるので，V_0^* は必要でなく

$$V = rV_0 \qquad (V_0 \text{ の } r \text{ 箇の重複})$$

で考えればよい．すると，この $\mathcal{P}(V)$ には

$$\theta^*_{ij^*} = \sum_{k=1}^{m} \underset{i}{x_k} \underset{j}{\xi_k} \qquad (GL(m) \text{ の場合}; 1 \le i \le r,\ 1 \le j \le s),$$

$$\theta^*_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \underset{i}{x_k} \underset{j}{x^k} \qquad (O(m),\ Sp(m) \text{ の場合}; 1 \le i, j \le r)$$

という typical invariants が住んでいる．Weyl の The Classical Groups に述べられている**第一基本定理**とは，典型群 $G = GL(m), O(m), Sp(m)$ の場合，ベクトル不変式の環 $\mathcal{P}(V)^G$ は上の typical invariants で生成される，という言明である．単に有限生成であるというだけでなく，このように具体的に不変式の生成系が記述できるというのが著しい．

5: 第一基本定理の読み替え

ベクトル不変式の第一基本定理は $GL(m)$ の場合は Cayley によって既に知られており，それが記号的方法の基礎にあった訳である．また，その場合は，現在 Schur-Weyl duality と呼ばれる $GL(m)$ と対称群の双対性 (テンソル空間 $T^N(V_0)$ を対称群 $\mathfrak{S}_N$ によって既約分解する話：これは The Classical Groups の第 4 章にある内容で，非常に有名) によっても証明できる．しかし，直交群とシンプレクティック群の場合には，Weyl が Capelli 恒等式を援用してはじめて証明した．(現在では，Capelli 恒等式に頼らない，完全に表現論的な証明も知られている.) この証明のため，Weyl の本の不変式論の部分はとっつきにくい印象を与える． Capelli 恒等式については後で触れる．

さて，上の第一基本定理で不変式の生成系が具体的に書けるという以上に重要な点は，基本となる表現 (およびその双対) をコピーによっていくらでも増やしてもよいということである．より具体的には，ベクトル表現 V に対して $V \oplus V^*$ も上に述べた形のベクトル作用であり，従って不変式の生成系 $\mathcal{P}(V \oplus V^*)^G$ がよく判る．この「変数倍加」の操作 (doubling the variables) が可能なのが重要なのだ．そこまで判る群と表現はそんなに多くないのである．

「変数倍加」の操作が何故重要かを説明しよう．ここで，はじめに「不変式論の定式化」に於いて環 R として非可換なものも許すことを強調したこと，及び「不変式論」とその下部構造である「表現論」について，片方が他方の基礎であるという一方的関係でないということを言ったが，その理由がここで明らかになる.「表現論」は多様な表現を扱っているが，その立場からは「不変式論」はトリビアル表現というただ一つの表現を取り出している．随分差があるように見える．が，実際は，その差は思うほど大きくない．

今，群 G の表現 (簡単のため有限次元としよう) $\mathbb{V}$ を取る．このとき $\mathbb{V}$ の線型変換全体の環 $\mathrm{End}(\mathbb{V}) \simeq \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}^*$ には G が共軛

$$\alpha \mapsto g\,\alpha\,g^{-1} \qquad (\alpha \in \mathrm{End}(\mathbb{V}),\, g \in G)$$

で作用する．これはもちろん環自己同型としての作用である．この G 不変元全体 $\mathrm{End}(\mathbb{V})^G$ とは，群の作用と可換な線型変換全体のことであるから G 自己準同型環 $\mathrm{End}_G(\mathbb{V})$ に他ならない．これが「不変式論」の定式化で非可換環を取り込んでおくまず第一の「下心」であった．この自己準同型環 $\mathrm{End}_G(\mathbb{V})$ が判

るということは，表現 $\mathbb{V}$ の「既約分解」について大きな情報を与える．特に表現 $\mathbb{V}$ が完全可約であれば，既約分解とほぼ同等に近い情報を持つ．

これを基本に「変数倍加」の操作へと移行する．今，$\mathbb{V} = \mathcal{P}(V)$ だとしよう．すぐ上では有限次元としたから，ちょっとインチキだが，この場合は $\mathbb{V}$ は $\mathcal{P}(V)$ の同次成分という有限次元表現の直和に分かれるので，ひどく差があるわけではない．少しちゃんとすると，この $\mathbb{V} = \mathcal{P}(V)$ の双対についても，本当に線型形式全体をとるのではなく，各同次成分の双対の直和という「有限次元的部分」をとって $\mathbb{V}^*_{\text{有限}} = \mathcal{P}(V^*)$ を考える．これを「文字どおり」とって $\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}^*_{\text{有限}}$ をそのまま $\mathrm{End}(\mathbb{V}) \supset \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}^*$ の中に埋め込むとマズイので $\mathbb{V}^*_{\text{有限}} = \mathcal{P}(V^*)$ の代わりに，それを定数係数微分作用素の環 $\mathcal{D}(V)$ と読み替えてから，テンソル積をとる：つまり多項式係数の微分作用素の環 $\mathcal{PD}(V) \simeq \mathcal{P}(V) \otimes \mathcal{D}(V)$ という $\mathrm{End}(\mathcal{P}(V))$ の部分環を考える．これは「充分」大きな部分環で，例えば $\mathcal{P}(V)$ の有限次元部分に制限すると，すべての線型変換を与える．(今は詳述しないが，このあたりの操作は，根本的に考えると，少し面倒なところがある．それだけに重要な内容を担っている.)

多項式係数の微分作用素環 $\mathcal{PD}(V)$ にも G が共軛で働くが，その作用で不変なものとは，(多項式係数) G 不変微分作用素の環ということになる．これが判ると $\mathcal{P}(V)$ という表現の分解について大きな情報が得られる訳である．ところで，この多項式係数の微分作用素環 $\mathcal{PD}(V)$ は非可換ではあるが，可換な $\mathcal{P}(V \oplus V^*) \simeq \mathcal{P}(V) \otimes \mathcal{P}(V^*)$ と近い．正確に言えば後者 (graded algebra) は前者 (filtered algebra) から "gr" をとってできるものである．別のことばでは微分作用素のシンボル (表象) をとる，という可換化の標準的操作でもある．この可換化した $\mathcal{P}(V \oplus V^*)$ については，先ほどのような典型群のベクトル表現の場合，不変式の生成系が具体的にすべて判る．それを用いると G 不変微分作用素環 $\mathcal{PD}(V)^G$ もそれらの生成系を読み替えた微分作用素たちで生成されることが容易に判る (最高階でまず見て，低階のところは帰納法で処理すればよい)．以上が第一基本定理が「変数倍加」の操作を通じて，ベクトル表現の上の多項式環の既約分解をつかさどる仕組みである．

6: 双対定理としての第一基本定理

少し具体的に説明しよう．群として直交群をとる．複素数体上で考えればど

のような実現を考えても同じだが，例えば2次形式を与える対称行列が単位行列の場合，つまり，座標を $x_1, x_2, \cdots, x_m$ として2次形式が

$$(x,x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2$$

となる一番なじみのある形とする．但し対称双一次形式を $(\cdot,\cdot)$ であらわした．さて $V \simeq \mathbb{C}^m$ として $\mathcal{P}(V)$ の上の直交群 $O(m)$ の作用を考える．この既約分解については，倍に変数を増やした $\mathcal{P}(V \oplus V)^{O(m)}$ という不変式環が鍵を握り，それは上で見たように typical invariants で生成される．もう一組の (双対的な) 座標を $y_1, y_2, \cdots, y_m$ を導入して実際に書いてみると，

$$\begin{aligned}
(x,x) &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2, \\
(x,y) &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_m y_m, \\
(y,y) &= y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_m^2
\end{aligned}$$

が基本となる typical invariants である．

これを不変微分作用素に読み替える前に，この内容についてコメントする (Weyl の本にもそのような説明がある)．これを x と y が空間の2点の座標をあらわすとして，原点とあわせて，三角形をなすとする．その三角形が直交群で移り合う，つまり合同ということが，上の3つの量が等しいことと同等だと基本定理は読める．ここで (x,x) と (y,y) は辺の長さ，(x,y) がその間の角度をあらわしていることを思い出せば，この定理は「二辺狭角」の合同条件だと判る．実際は，もう少し微妙に厳密なことを言っているのだが，直観的には「二辺狭角の定理」だと知れば親しみが湧く．「群の作用で移り合う」ことを「不変式の系による数値的な相当」で判定するという，不変式論の幾何学的意味を端的に述べているのだ．

さて，$\mathcal{P}(V \oplus V)^{O(m)}$ を $\mathcal{PD}(V)^{O(m)}$ に読み替えるには変数 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ を座標 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ に関する偏微分だと読む．記号が面倒なので $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$ と書くことにする．すると上の3つの typical invariants は

$$\begin{aligned}
Q &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2, \\
E &= x_1 \partial_1 + x_2 \partial_2 + \cdots + x_m \partial_m, \\
\Delta &= \partial_1^2 + \partial_2^2 + \cdots + \partial_m^2
\end{aligned}$$

となる．少し補足すると，x の多項式は，掛け算作用素として理解する．また E は次数を数える Euler 作用素 (degree operator) であり，Δ はもちろん Laplacian である．これらが $O(m)$ 不変であることは見易いが,「二辺狭角の定理」は更に，これらが不変微分作用素環 $\mathcal{PD}(V)^{O(m)}$ を生成することを主張する．

ここまででも充分役に立つが，この 3 つの作用素について，一歩突っ込んでみる．交換関係を調べると，

$$[E, Q] = 2Q, \qquad [E, \Delta] = -2\Delta, \qquad [\Delta, Q] = 4E + 2m$$

が判る．従って，定数差をちょっと修正して

$$Q/2, \qquad -\Delta/2, \qquad E + \frac{m}{2}$$

を作ると，この三つ組みは，所謂 $\mathfrak{sl}(2)$-triplet となる．つまり $O(m)$ による分解をつかさどる対称性として，群 $SL(2) \simeq Sp(2)$ の Lie 環 $\mathfrak{sl}(2)$ が裏に潜んでいたのである：

$$O(m) \curvearrowright \mathcal{P}(\mathbb{C}^m) \curvearrowleft \mathfrak{sl}(2).$$

いま現われた $\mathfrak{sl}(2)$ が，やはり典型群 (の Lie 環) であることを思い出すと

$$V \oplus V = V \otimes \mathbb{C}^2 = m\,\mathbb{C}^2 = \underbrace{\mathbb{C}^2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}^2}_{m}$$

を通じて逆の $\mathcal{P}(V \oplus V)^{\mathfrak{sl}(2)}$ という不変式環も判る．つまり第一基本定理から，それは $SL(2) \simeq Sp(2)$ に関する typical invariants で生成される．その不変式を微分作用素に読み替えると

$$A_{ij} = x_i\,\partial_j - x_j\,\partial_i$$

がでてくるが，これらが $\mathcal{PD}(V)^{\mathfrak{sl}(2)}$ という $\mathfrak{sl}(2)$ の作用と可換な微分作用素全体を生成することになる．この A_{ij} は，もとの直交群 $O(m)$ の無限小作用 (微分表現) に他ならない．

今の場合，線型変換全体 $\mathrm{End}(\mathcal{P}(V))$ でなく，微分作用素環という，制限の入ったものの中で考えているので，やや正確ではないが，二つの $O(m)$ と $\mathfrak{sl}(2)$ は互いに交換団 (commutant) を生成する関係にあることが判る．正確ではない

というのは $O(m)$ の不連結性に起因する．但し，注意したいのは $O(m)$ は，その連結成分 $SO(m)$ で置き換えるべきでないということである．このような双対的な組を dual pair (好一対) と呼ぶ．Dual pair の理論は R. Howe によって 1976 年頃発見・提唱された．微分作用素の中の交換団という形では，少し中途半端に見えるが，表現の分解の形に述べれば，この双対性がより正確に言える．つまり $\mathcal{P}(V)$ は $O(m) \times \mathfrak{sl}(2)$ の働く空間として重複度なし (multiplicity-free) に既約分解され，そのテンソル積成分としてでてくる $O(m)$ と $\mathfrak{sl}(2)$ の表現は 1 対 1 に対応する．その時でてくる $\mathfrak{sl}(2)$ の表現は無限次元表現である (lowest weight 表現)．

土台のベクトル表現の重複を増やせば，同様なことが

$$O(m) \curvearrowright \mathcal{P}(r\mathbb{C}^m) = \mathcal{P}(\mathbb{C}^{mr}) = \mathcal{P}(m\mathbb{C}^r) \curvearrowleft \mathfrak{sp}(2r)$$

でも起こるし，Sp と O の役割を変えた

$$Sp(m) \curvearrowright \mathcal{P}(r\mathbb{C}^m) = \mathcal{P}(\mathbb{C}^{mr}) = \mathcal{P}(m\mathbb{C}^r) \curvearrowleft \mathfrak{o}(2r)$$

でも起こる．また出発点を，より基本的な GL にして

$$GL(m) \curvearrowright \mathcal{P}(r\mathbb{C}^m) = \mathcal{P}(\mathbb{C}^{mr}) = \mathcal{P}(m\mathbb{C}^r) \curvearrowleft \mathfrak{gl}(r)$$

というのもある．はじめの二つでは右辺の $\mathfrak{sp}(2r)$ や $\mathfrak{o}(2r)$ の作用は (代数的に) 群に持ち上がるものではない．だからやや奇異な感じがするかも知れないが，そのときは，先の $\mathfrak{sl}(2)$ の作用を思い出して欲しい．最後の分では右辺に来ている $\mathfrak{gl}(r)$ は Lie 環だけでなく，群 $GL(r)$ の普通の作用に持ち上がる．この $\mathfrak{gl}(r)$ は大きな $\mathfrak{sp}(2r)$ や $\mathfrak{o}(2r)$ の中でブロック対角に埋め込まれている部分である．これらの関係は次のようなシーソーの形をしている：

$$\begin{array}{ccc} & & \mathfrak{sp}(2r) \\ & \nearrow & \cup \\ GL(m) & \longleftrightarrow & \mathfrak{gl}(r) \\ \cup & \swarrow & \\ O(m) & & \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{ccc} & & \mathfrak{o}(2r) \\ & \nearrow & \cup \\ GL(m) & \longleftrightarrow & \mathfrak{gl}(r) \\ \cup & \swarrow & \\ Sp(m) & & \end{array}$$

今，上で右辺に書いた (2 次式で定義される) Lie 環の表現が，一般に対応する Lie 群 (代数群) に持ち上がらないと言ったが，ここは大森氏の講演と関係する．

(但し，筆者は大森氏の講演等を充分理解していないので，正確な関係は述べられない.) ところが一方，この双対性の組は群のレベルでも定式化される．それがむしろ本来の dual pair の理論というべきである．(上で述べたのは dual pair の無限小変換な部分.) それは Weil 表現 (oscillator 表現) というものを通じて述べられる．単純に指数函数の上に乗せようとする時は，複素数体ではなく，実数体上で考えて Lie 群の実形で考え，表現空間も適当な完備化 (シュワルツ空間とか L^2 とか) にする必要がある．その際，群は普通の Sp ではなくその二重被覆が一般に必要となる (メタプレクティック群). 更に言えば，体も p-進体とか有限体，或いはアデール環などを使っても定式化される．その時は，微分作用素の代替物はそれを群化した Heisenberg 群になる.「Heisenberg の交換関係の一意性」はむしろ群化したレベルの方が扱いやすく，無限次元既約ユニタリ表現が中心指標だけで決まるというように言える．そのとき dual pair とはメタプレクティック群の二つの部分群 (G, G') で，互いに他の commutant (centralizer) となっているとき言う．メタプレクティック群の oscillator 表現を $G \times G'$ に制限したとき G と G' の表現が，恰度 1 対 1 の組みになって表現の分解に現われるという現象が起こる (この説明は数学的に不正確な部分を含んでいる). この著しい対応はこれらは保型形式論の重要な舞台・道具となっており，その場合の dual pair (Howe 対応) の研究も今なお活発に行なわれている．

ここで何故このような双対性が「群」レベルで実現するのか (Lie 環は無限小群と看做せる) という疑問が当然起こってくる．つまり，群の対称性をつかさどっていた方の対称性が再び「群」で実現される (上で言えば，はじめの $O(m)$ は群でいいが，$\mathfrak{sl}(2)$ が無限小とはいえ「群」になる) 理由はあるのかということである．現象的には低階 (2 次) なので細工がしやすいということもあるのだろう．しかし内在的な理由は判らない．奇跡に近い幸運とも思えるが，深い理由がどこかにあるのかもしれない．しかし，一般に類似の状況で，或る場合には「群」とまではいかないが「半群」が現われることもある (oscillator semigroup と呼ばれるものがある). もっと原始的な例 (有限群の表現) で考えると，どのあたりが不思議な点かも少し見えてくるのだが，ここでは省略しよう．

ついでに言えば作用する空間を，多項式環 (対称代数) でなく，グラスマン環 (外積代数) としても同様の dual pair がある．物理で言えば恰度ボソンからフェルミオンへ移行といってよい．この場合は有限次元なので完全に代数の枠に入

る．そのとき，上の oscillator 表現と対応するのは spin 表現となる．今度はシンプレックティック群ではなく直交群の二重被覆が現われる．二重被覆が現われる点ではこちらの方が古くて馴染みがあるだろう．多項式係数の微分作用素 (Weyl 代数) の対応物は Clifford 代数である．その場合の dual pair (シーソー) は次のようになる：

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & & \mathfrak{o}(2r) \\
 & & & \nearrow & \cup \\
GL(m) & \longleftrightarrow & & & \mathfrak{gl}(r) \\
\cup & \swarrow & & & \\
O(m) & & & &
\end{array}
\quad ; \quad
\begin{array}{ccccc}
 & & & & \mathfrak{sp}(2r) \\
 & & & \nearrow & \cup \\
GL(m) & \longleftrightarrow & & & \mathfrak{gl}(r) \\
\cup & \swarrow & & & \\
Sp(m) & & & &
\end{array}
$$

ボソンであれ，フェルミオンであれ，これらの無限変数版は場の理論とも関わりが深い．保型形式とは違う由来であるが，同じ定式化に至る点はなかなか興味深い．少し注意しておくと，ボソンでもフェルミオンでも，同じように (GL, GL) duality が成り立っているが，表現の対応は違ってくる．例えば既約表現を Young 図形で書いたとすると，ボソンの方は同じ Young 図形が対応するが，フェルミオンの方は図形が転置して対応する．対応の精密版である Capelli 型恒等式もそれに伴って形が変わる．このあたりもなかなか味わいのある所である．

7: Capelli 恒等式

ようやくもう一つのテーマである非可換の特殊多項式に，話の核心が近づいてきた．Weyl にあっては不変式論の便利な形式的道具であった Capelli 恒等式というものが，どのような地位を占めるか，はじめに説明する．

上に登場した dual pair (無限小版) では，Lie 環の普遍包絡環の表現を見ると，微分作用素の中で互いに交換団となっている．Capelli 恒等式の見方は色々あるが，その重要な側面として dual pair 対応を具体的に書くということがある．それによって dual pair の記述はより精密なものとなる．実際 (GL, GL) pair で，それをきっちり書いたのが古典的な意味での Capelli 恒等式なのである．そのような意味づけは Weyl の本にはまるっきり述べられていないので，用いられ方が機械的な印象をもたらすのだろう．

まず (GL, GL) duality という最も基本的な pair を説明する．これは，上に

書いたように

$$GL(m) \curvearrowright \mathcal{P}(r\mathbb{C}^m) = \mathcal{P}(\mathbb{C}^{mr}) = \mathcal{P}(m\mathbb{C}^r) \curvearrowleft GL(r)$$

のことである (但し，右の方は群にした)．土台のベクトル空間 $\mathbb{C}^{mr}$ を $m \times r$ 行列の空間 $\mathrm{Mat}(m \times r)$ と同一視すると，それぞれ左右から $GL(m)$，$GL(r)$ が作用しているという状況となる．左右の作用はもちろん可換である (結合法則 !)．それだけでなく，互いが他の作用を規定するという双対性が生じている．古典的不変式論でいえば GL に関してのベクトル不変式の第一基本定理 (Cayley が既に利用したもの) である．また，にわかに関係は見えないが，テンソル空間の分解に関わる Schur-Weyl 相互律 (5 節の最初で触れた) と本質的に同じ内容でもある．或いはまた，より表現論的には，$GL(m, \mathbb{C})$ のコンパクト実形であるユニタリ群 $U(m)$ に対する Peter-Weyl の定理と言ってよいくらい密接につながるが，詳しく説明しだすと話が横へ逸れるので今は措く．

この作用の無限小変換 (Lie 環レベルの作用) を実際書いてみる．そのために，上のように行列空間で実現して，その座標を t_{ij} $(1 \le i \le m, 1 \le j \le r)$ とする．対応する偏微分作用素を ∂_{ij} と書く．また E_{ij} $(1 \le i, j \le r)$ を $GL(r)$ の Lie 環 $\mathfrak{gl}(r)$ の標準的基底 (行列単位に対応) とし，反対側の $\mathfrak{gl}(m)$ は E°_{ij} $(1 \le i, j \le m)$ と書くことにする．この時，Lie 環 $\mathfrak{gl}(r)$ (右) と $\mathfrak{gl}(m)$ (左) の作用は

$$\rho(E_{ij}) = \sum_{a=1}^{m} t_{ai}\partial_{aj}, \qquad \lambda(E^{\circ}_{ij}) = \sum_{b=1}^{r} t_{jb}\partial_{ib}$$

と書け，この関係は，これらの Lie 環の生成元，座標函数，偏微分作用素を行列の形にして

$$T = (t_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}, \qquad D = (\partial_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n},$$
$$\Pi = (\rho(E_{ij}))_{1 \le i, j \le n}, \qquad \Pi^{\circ} = (\lambda(E^{\circ}_{ij}))_{1 \le i, j \le m},$$

を導入すると

$$\Pi = {}^{t}TD, \qquad {}^{t}\Pi^{\circ} = T\,{}^{t}D$$

のようにコンパクトに書ける．但し ^{t} は行列の転置を表わす．ここで右と左が少しヤヤコシイが，右掛け算の方が自然な左作用なので，左掛け算の方に $^{\circ}$ を付けている．

この左右の Lie 環の作用はベクトル場 (1 階の微分作用素) として実現されているが，それを高階にして Lie 環の普遍包絡環 $U(\mathfrak{gl}(r))$ と $U(\mathfrak{gl}(m))$ の作用ができる．その普遍包絡環の中心は，両側不変な微分作用素に写される．一方，ベクトル不変式に関する第一基本定理を読み替えた「双対定理」からは，多項式係数の微分作用素環 $\mathcal{PD}(\mathrm{Mat}(m\times r))$ の中で，これらの像 $\rho(U(\mathfrak{gl}(r))$ と $\lambda(U(\mathfrak{gl}(m))$ は互いに交換団 (commutant) となることが判り，その結果，次の等式を得る．

$$\rho(ZU(\mathfrak{gl}(r))) = \rho(U(\mathfrak{gl}(r))) \cap \lambda(U(\mathfrak{gl}(m))) = \lambda(ZU(\mathfrak{gl}(m))).$$

但し $ZU(\mathfrak{gl}(r))$ と $ZU(\mathfrak{gl}(m))$ は各々 $U(\mathfrak{gl}(r))$ と $U(\mathfrak{gl}(m))$ の中心をあらわす．この集合はまた両側不変微分作用素全体 $\mathcal{PD}(\mathrm{Mat}(m\times r))^{\mathfrak{gl}(m)\times\mathfrak{gl}(r)}$ とも等しい．これが「双対定理」の帰結である．Capelli 恒等式とは，この関係を集合レベルでなく，個別の微分作用素の間の等式として与えるのもので，より精密なのである．

記号が煩雑になるのを避けるために，ここからは $r=m$ として，まず最高階 (Capelli 1887) の等式を説明する．上で行列形で書いた表示から $\det({}^tT)\det(D)$ が両側の作用 $GL(m)\times GL(m)$ について不変な微分作用素であることが判る．これを中心 $ZU(\mathfrak{gl}(m))$ の像として書くのが Capelli 恒等式である．まずその中心元 (Capelli element) を書こう．

$$\begin{aligned}C &= \det(\mathbb{E} + \mathrm{diag}(m-1, m-2, \cdots, 0)) \\ &= \det\begin{pmatrix} E_{11}+m-1 & E_{12} & \cdots & E_{1m} \\ E_{21} & E_{22}+m-2 & \cdots & E_{2m} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ E_{m1} & E_{2m} & \cdots & E_{mm}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

但し $\mathbb{E} = (E_{ij})_{1\le i,j\le m} \in \mathrm{Mat}(m, U(\mathfrak{gl}(m)))$．ここに現われた非可換成分の行列式は列行列式 (column determinant) と呼ばれ，次の交代和で定義される：

$$\det(\Phi) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_m} \mathrm{sgn}(\sigma)\, \Phi_{\sigma(1)1}\Phi_{\sigma(2)2}\cdots\Phi_{\sigma(m)m}.$$

これは積で左右の順を優先している．

以上の準備の下，Capelli 恒等式とは

$$\rho(C) = \det({}^tT)\det(D)$$

と書ける．同様に ρ を λ で置き換えられる．ここには非可換ではあるが，行列式の乗法公式が出現しているという点に注意したい．もちろん生のママでは成立していないが，対角の修正だけで実現している点は著しい．

この形の等式が，恰度 Hilbert の神学とほぼ同時に出現したのも因縁深い．今のは，一つだけの等式であるが，中心全体の対応を与える低階の Capelli 恒等式もあって，やや遅れた 1890 年に発表された．それは上の等式の小行列版で，書くのも難しくないが，少し記号の導入が必要なので，今は省略しよう．

8: 母函数の方法

上の Capelli 恒等式では非可換な $U(\mathfrak{gl}(m))$ という環の中心元を具体的に書く手段として，非可換な「行列式」が現われた．行列式は多変数の「特殊多項式」として，時にそうとは意識されないが，典型例の地位を占める．また何と言っても，最もよく知られた「(相対) 不変式」である．不変式論の定式化で非可換環を取り込んでおく第二の意味は，普遍包絡環の中心元とその表現という，Capelli 恒等式に始まる重要な問題が，不変式論の非可換版として位置づけられるという点に見いだせる．そして，Capelli 恒等式とその一般化は，一般論としての非可換化ではなく，具体的な問題として，特別な多項式の非可換版の研究へと我々を導く．

現在，私の研究テーマのなかで，Capelli 型恒等式の究極的な姿は何かということが一つの中心を占める．その問題はまだまだ途半ばであるし，既に紙数を相当使った (講演では時間を費やした) ので，深入りできないが，2005 年 9 月に数理研で行なった短期共同研究『Capelli 恒等式の新局面』についての数理研講究録 1508 に関連した論説・論文があるので，それを参考にしていただけると幸いである．ここでは，今までの話の流れが，どのように非可換特殊多項式と結びつくかという点に絞って，説明する．

まず Capelli 恒等式の証明について述べる．証明はいろいろあるが，現在は機械的計算で遂行可能で，それがおそらく最も単純なものである．少し上でも言及したように，Capelli 恒等式は非可換版の行列式の乗法公式の姿をしている．可換変数でも「行列式の乗法公式」は外積代数を用いると見通しよくできることを思い出せば，Capelli 恒等式の証明にも適用可能ではないかと想像できるだろう．実際それは可能である．これも一種の「母函数の方法」である．

外積代数 Λ_m を用意する．つまり m 箇の生成元 $e_1, e_2, \cdots, e_m$ から生成された環で，生成系の基本関係式は反可換な $e_ie_j + e_je_i = 0$ である．通常，外積代数の積は，特別に $e_i \wedge e_j$ のように書くが，煩わしいので普通の積の記号で間に合わせる．ここで，必ずしも可換でない環 $\mathcal{R}$ を係数に持つ行列の行列式を扱う枠組みとして，外積代数 Λ_m を $\mathcal{R}$ で係数拡大した環 $\Lambda_m \otimes \mathcal{R}$ を考える．但し，その中での積は，部分環 Λ_m と $\mathcal{R}$ は元別に可換として決める．外積代数は，行列式を扱うための (非可換) 形式変数で，それを用いて「母函数」を作ろうというのである．この枠組みで行列式は次のように扱える．成分を $\mathcal{R}$ にもつ行列 $\Phi = (\Phi_{ij})_{1 \le i,j \le m}$ に対し $\Lambda_m \otimes \mathcal{R}$ の元 $\eta_i = \sum_{a=1}^{m} e_a \Phi_{ai}$ を作る．この時，非可換成分でも「列行列式」が

$$\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_m = e_1 e_2 \cdots e_m \det(\Phi)$$

と現われることが容易に確かめられる．これは普通の (可換な場合の) 行列式を外積代数で書くのと同じ．行列式の乗法公式もこの枠組みの中で，機械的計算となるが，成分の非可換性に注意をする点が異なるのである．

さて Capelli 恒等式の場合には $\mathcal{R} = \mathrm{End}(\mathcal{P}(\mathrm{Mat}(m)))$ として，行列の積 $\Pi = {}^tTD$ に対応して

$$\xi_i = \sum_{a=1}^{n} e_a \, t_{ia} \quad (1 \le i \le m)$$
$$\zeta_j = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \, \partial_{ij} \quad (1 \le j \le m)$$

と置く．この二つと $\Pi = {}^tTD$ とから

$$\zeta_j = \sum_{a=1}^{n} e_a \, \rho(E_{aj})$$

も判る．座標函数 $\{t_{ij}\}$ は可換だからもとの交換関係 $e_ie_j + e_je_i = 0$ を反映して $\xi_i\xi_j + \xi_j\xi_i = 0$ である．問題なのは ξ_i と ∂_{pq} の交換関係なのであるが，その計算は基本的な交換関係 $\partial_{pq}t_{ij} - t_{ij}\partial_{pq} = \delta_{pi}\delta_{qj}$ を使えばすぐ判る．実際は積の行列式を操るのは ξ_i と ∂_{pq} の交換関係よりも，それから出てくる ξ_i と ζ_j の交換関係で，それは

$$\zeta_j(u) = \zeta_j + ue_j = \sum_{a=1}^{n} e_a \rho(E_{aj} + u\delta_{aj})$$

と対角線にパラメータ u でシフトを入れると

$$\zeta_j(u+1)\xi_i + \xi_i\zeta_j(u) = 0$$

というように簡潔に書ける．この関係式を用いて $\zeta_1(m-1)\zeta_2(m-2)\cdots\zeta_m(0)$ を計算すると，たちどころに

$$\det(\Pi + \mathrm{diag}(m-1, m-2, \cdots, 0)) = \det({}^tT)\det(D)$$

が得られる．

計算の手順はまず一番右の $\zeta_m = \zeta_m(0)$ を定義に従って $\zeta_n = \sum_{k=1}^{m} \xi_k \partial_{kj}$ とバラし，ξ_k を左までもってくる．その際，ξ_k が通過した影響で $\zeta_j(u)$ のパラメータが 1 づつ減る．結果，一番右は $\zeta_{m-1} = \zeta_{m-1}(0)$ と変わっているからさっきと同様にバラし ξ_k を左に移動させる．この操作を続ければ ξ_k たちの積を左に，∂_{kj} たちの積を右にと分離することができて，あとは $\xi_i\xi_j + \xi_j\xi_i = 0$ という交換関係と $\xi_1\xi_2\cdots\xi_m = e_1e_2\cdots e_m\det({}^tT)$ を見れば結論を得る．要点だけではあるが詳しく述べたので，実際やってみれば理解できるであろう．

今は，乗法公式の説明だが，類似の計算で，例えば Capelli element C が普遍包絡環の中心に属することなども示せる．上では形式的計算の側面だけを強調したが，環 $\mathcal{R}$ に群が作用しているとき，このような「母函数」を作ることは，外積代数にも或る種の標準的群作用を賦与して考えると，「基本不変式」乃至は「基本共変式」のを拡げた環の中で定義し，それを利用するという理論的背景が見えてくる．このように「母函数」の形式的変数に群作用を込め，さらに乗法的生成を用いる「非可換版記号的方法」は Capelli 型恒等式を巡る研究において極めて有用な道具で，Capelli 型恒等式の本質を明瞭にする上で欠かせない．

9: Capelli 問題と非可換特殊多項式

前節では「母函数の方法」に表現論的背景を加味した「記号的方法」という技術的な側面を垣間見た．ここでは，例えば何故「行列式」がでてきたのか，或いは Capelli 型恒等式に現われる (行列変数) 特殊多項式はどのようにして出てくるのか，という点について私見を述べる．

少し一般的に考えてみる．例えば Lie 環 $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の中心について，それを表現の上で不変微分作用素として書くこと (順問題)，或いはその逆

に或る表現の上で不変微分作用素が普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の中心の表現として書けるか (逆問題), の二つの方向がある. 後者は一般には肯定的に解決できない. その型の問題を Multiplicity-free action という設定で Capelli 恒等式の一般化として研究したのが R. Howe と筆者の Math. Ann. **290** (1991) の論文である. 順・逆のどちらの方向にせよ, 普遍包絡環の中心なり不変微分作用素なりを適切に選ぶ基準が必要である. 抽象的・一般的に言えば「順」問題は, 正規順序に書き直すという点で, Poincaré-Birkhoff-Witt の定理と似ているし,「逆」問題は, その反対にまとめ直すという点で, Baker-Campbell-Hausdorff 公式と (ちょっと) 似ている. これを単純化した模式図で書いてみると

$$\circ\bullet\circ\bullet\circ\bullet\circ\bullet\bullet\circ\bullet\circ\bullet \quad \underset{\text{逆}}{\overset{\text{順}}{\rightleftarrows}} \quad \circ\circ\circ\circ\circ\circ\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$$

のようになる. 但し $\circ$ は (函数による) 掛け算作用素, $\bullet$ は微分作用素のつもりである. 順・逆, つまり, 展開とまとめ (中学校的に言えば,「展開」と「因数分解」) のどちらにせよ, 非可換な世界だから勝手にもってきては綺麗に結果は書けない. 抽象的に「ともかく」できることが判っても, それでは満足しないで「具体的公式」まで求めることを目標としているのである. これが「具体的」問題 (ゲーム) に備わった実践的な「味わい」または「色合い」を生む.

これに対して古典的 Capelli 恒等式は, 申し分のないほどすべてが巧くいっている例であり, 他に替えがたい模範 (model) である. 上では「行列式」の乗法公式という点を強調したが, 実はそれにこだわると本質を見失う. 乗法公式は, むしろ「行列」レベルで考えるのがより一般の Capelli 型恒等式を広く説明する.「行列式」の場合はそれが 1 次元表現だったのである. 私自身このように考えを転換するのに 10 年近く掛かった. 現在では, Capelli 型恒等式の典型としては表現のトレース, つまり可換成分な場合であれば, 指標であるが, その非可換成分版 (標語的には「非可換指標公式」) を一種の「理想型」として考えている. (実はそれ以外の型の Capelli 型恒等式も存在するので, その解釈にはまだアタマを悩ませているが.)

この説明は言葉足らずだが, 詳述する余裕がない. 代わりに少し具体的な「特殊多項式」の例を挙げてみよう. 行列式や小行列式というのは, $GL(m)$ のベクトル表現から交代テンソル積表現を作るとき, その「行列要素」として現われ

る．低階の Capelli 恒等式は，したがって，そのような既約表現に付随したものであると考えられる．一方，行列式の定義 (交代和) で「符号」の部分を除いて "対称和" にしたものをパーマネントというが，そちらの系列 (重複を許した "小行列" のパーマネント) は，$GL(m)$ のベクトル表現の対称テンソルの「行列要素」である．その例は，はじめの節で 2 元 2 次形式の不変式のところにでてきた，係数 a,b,c の変換を表わす 3 $\times$ 3 行列を見ればよい．特に真ん中の $\alpha\delta+\beta\gamma$ に 2 $\times$ 2 行列のパーマネントの典型的な姿が見られる．

これらを使った Capelli 型恒等式も存在し，それは対称テンソルに付随した中心元の表現という訳である．いろいろな表現に付随して中心元があることになる．不変式論自体が「表現」を決めて定式化されるというのにも，少し似ている．実はこれらを反省することで，「非可換指標公式」としての Capelli 恒等式という視点に至ったのである．このあたりのより詳しい説明は『跡公式としての Capelli 恒等式』(「数理科学」1999 年 3 月号) に書いたので，参照していただけると有り難い．(注：この論説を含む「別冊・数理科学」が 2007 年 4 月に刊行予定となっているので，そちらの方が便利かもしれない.)

今の場合「特殊多項式」は $GL(m)$ の「表現の行列要素」として現われる行列函数であったが，別の系統で有名なものに，パフィアン (Pfaffian) やハフニアン (Hafnian) がある．パフィアンは偶数次交代行列に対し，ハフニアンは偶数次対称行列に対し定義される (細かいことを言えば定義だけなら一般の偶数次正方行列でもできるが，実際はその交代化や対称化のそれと一致する)．パフィアンは比較的よく知られているが，念のため一つの定義を書くと

$$\mathrm{Pf}(\Phi)=\frac{1}{2^m m!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{2m}}\mathrm{sgn}(\sigma)\,\Phi_{\sigma(1)\sigma(2)}\Phi_{\sigma(3)\sigma(4)}\cdots\Phi_{\sigma(2m-1)\sigma(2m)}$$

となる．ハフニアンはこの定義でやはり符号を除いたものである．ハフニアンはパフィアンほど有名ではないが，ボソンとフェルミオンの対比を考えれば当然でてくるものである．誕生ははっきりしていて E.R. Caianiello という物理学者が On quantum field theoy I, Nuovo Cimento (9) **10** (1953), 1634 – 1652 で導入した．名前はコペンハーゲンのラテン古名 Hafnia に因む．(直接は関係ないが，この Hafnia に因むもうひとつのものにハフニウムという元素名があることもついでにメモしておく．ハフニウムは仁科芳雄とも縁が深く，"仁科会館" (笠岡市・里庄西公民館) にはその大きな原子模型があるらしい.)

これらは $GL(m)$ から見れば「表現の行列要素」でなく,「表現空間に住むベクトル」である.「行列要素」こそが Capelli 型恒等式の基となるべきだとの理想からすれば,パフィアンやハフニアンも表現の行列要素となってもらいたい.そのためには群を拡大して考える必要がある.パフィアンの場合は直交群 $O(2m)$ の 2 重被覆である spin 群が,ハフニアンの場合は,文字どおりという訳にはいかないが $Sp(2m)$ の「2 重被覆」である metaplectic 群が,考察すべきものである.これは恰度 dual pair の舞台として,上に説明した設定である.但し,状況は複雑なところがあって,現在すべてが明瞭に見えている訳ではない.

ともかく,「よい中心元」という「非可換版不変式」を記述する「非可換特殊多項式」は「表現の行列要素」を基礎に構成する,という指導原理が現在の大きな指針である.そして技術的な面では「非可換版の記号的方法」という「母函数の方法」が有効な手段として働く.これが「不変式論」を非可換にする動機である.同時に,群による統制という「表現論的」思想は,不変式論で有効だった「記号的方法」を非可換な場面に適用する際に自然に現われる導きの糸でもあった.「特殊函数論」は「よい函数」としての「不変式」を「行列要素」で書くという「表現論」の王道である.従ってまた「不変式」間の関係は,その構図に従って,同値性を与える intertwiner を具体的に書くことで達成されるという筋が描ける.これは可換の場合と同じだが,非可換の場合に同じ原理で物事を見るのは案外難しい.実は,更にもう一つ duality によって,対称性をつかさどる方の「群」(もしくは Lie 環) につながる現象もあって,この二重性の解明が,最も興味深いところである.この duality 自体が不変式論の第一基本定理に基づくということを思せば,関係は幾重にも折り返され重層的になっていることが判るだろう.これらが講演で説明したかった主旨である.この最後のところはまだ端緒しか見えていないが,それを説明して締め括りとしよう.

10: $\mathfrak{sl}(2)$ が支配する対称性と超幾何型多項式

「表現論」と「特殊函数論」のつながりは,表現の具体的構成がはじまった頃,つまり Gelfand や Bargmann のユニタリ表現論として最初期 (1947 年頃) の研究,もしくはそれより以前に既に気づかれていて, $SL(2)$ の既約表現の行列要素として超幾何函数が現われることが一つの典型例である.この機構がどれくらい明瞭に判っているのか,余りよく知らない (或る程度はっきりしている

ことは知っている)が，いつの時代にあっても興味深い関係であることは確かである．ここではそれが，上の「非可換版不変式論」の中にも自然な形で現われることを指摘したい．

前節で触れたパフィアンもいろいろな場面で登場する．古典的に一番有名な事実は，交代行列に関して，その行列式がパフィアンの自乗となることであろう．この非可換版は，直交 Lie 環 $\mathfrak{o}(2m)$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{o}(2m))$ の中心元の関係としてでてくる．これははじめ (Sp, O) duality との関係で浮き上がってきた問題であるが，それとは独立に存在を主張できる問題でもある．まず，Howe-Umeda の 1991 年の論文 (上に言及した) の附録で直交 Lie 環の普遍包絡環 $U(\mathfrak{o}(n))$ にも古典的な Capelli 元と同様の行列式型の中心元が存在していることが示された．但し，この場合は直交 Lie 環 $\mathfrak{o}(n)$ は交代行列全体として実現されているとする (中心の問題は非可換性が絡むので実現の仕方に大きく影響を受けることは注意しないといけない)．それと，一方で，交代行列に実現した直交 Lie 環の生成系から作るパフィアンも中心に属することが判るので，その二つの関係が可換の場合と同様な関係にあるかどうかが問題になる．以下，$n = 2m$ とする．正確にこの関係式を書いてみよう．Lie 環 $\mathfrak{o}(n)$ の標準的生成元として $A_{ij} = E_{ij} - E_{ji}$ をとり，$\mathbb{A} = (A_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ と置く．このとき次が成り立つ (Itoh-Umeda, Compositio Math. **127** (2001))：

$$\begin{aligned}\mathrm{Pf}(\mathbb{A})^2 &= \det(\mathbb{A} + \mathrm{diag}(m-1, m-2, \cdots, -m)) \\ &= \det(\mathbb{A} + \mathrm{diag}(m, m-1, \cdots, -m+1)).\end{aligned}$$

この関係を調べるのに，上で Capelli 恒等式を証明したと同様に，外積代数を利用する．但し形式変数の数を倍に増やして，$e_1, \cdots, e_n, e'_1, \cdots, e'_n$ で生成された Λ_{2n} を考える．ここで $\Lambda_{2n} \otimes U(\mathfrak{o}(n))$ に属する三つの元を

$$\Theta = \sum_{1 \le i,j \le n} e_i e_j A_{ij}, \quad \Theta' = \sum_{1 \le i,j \le n} e'_i e'_j A_{ij}, \quad \Xi = \sum_{1 \le i,j \le n} e_i e'_j A_{ij}$$

と定める．詳細は少し省略するが，この Θ や Θ' の m 乗 (の係数) がパフィアンを与え，Ξ の $2m$ 乗が行列式を与える．非可換行列式には対角のシフトが要るので，正確にはシフトに対応する $\tau = \sum_{i=1}^{n} e_i e'_i$ という元を使って階乗冪を作ることになる．この τ は冪零ではあるが，すべての元と可換なのでスカラー

のように思ってよい．上の関係式は外積代数を用いた母函数レベルでは

$$\frac{(-)^m}{2^{2m}(m!)^2}\Theta^m\Theta'^m = \frac{1}{n!}(\Xi+(m-1)\tau)(\Xi+(m-2)\tau)\cdots(\Xi-m\tau)$$

と書き換えられる．ここで問題なのは，これら三つの元の交換関係であるが，調べてみると

$$[\Theta,\Theta'] = 4\tau\Xi, \quad [\Theta,\Xi] = 2\tau\Theta, \quad [\Theta',\Xi] = -2\tau\Theta'$$

となる．係数に τ が入るが，本質的に $\mathfrak{sl}(2)$ である！ またもや $\mathfrak{sl}(2)$ か！ 現象は dual pair のときと似ている．非可換版の dual pair と言いたいところだが，完全な duality があるのではなく，状況はちょっと異なる．(但し，将来「非可換版 dual pair」と主張できる定式化が見出せないと決まったものでもない.) ただ少なくとも記号的方法と同様な不変式論的背景はある．つまり $\Lambda_{2n}\otimes U(\mathfrak{o}(n))$ の中で自然な三つの基本 $O(n)$ 不変元が $\mathfrak{sl}(2)$ をなし，それらがパフィアンと行列式という非可換特殊多項式を支配しているという構図である．

このようにして，問題の $U(\mathfrak{o}(n))$ の等式の本質的部分が $U(\mathfrak{sl}(2))$ の等式に帰着される．どのようにして帰着されるかの技術的な詳細はここでは省略するが，証明の鍵を実際握っているのは $\mathfrak{sl}(2)$ の冪零元に関する三項定理 (trinomial identity) になる．それを書いてみよう．まず $X, Y, H \in \mathfrak{sl}(2)$ を

$$[H,X] = 2X, \qquad [H,Y] = -2Y, \qquad [X,Y] = H$$

となる標準的な三つ組み ($\mathfrak{sl}(2)$)-triplet) とする．係数 τ の分を除けば，対応は

$$X \leftrightarrow -\Theta'/2, \qquad Y \leftrightarrow \Theta/2, \qquad H \leftrightarrow \Xi$$

である．普遍包絡環 $U(\mathfrak{sl}(2))$ の中で次の等式が成り立つ：

$$(-\lambda^2X+\lambda\mu H+\mu^2Y)^k = \sum_{p+q+r=k}\frac{k!}{p!q!r!}\lambda^{2p+r}\mu^{2q+r}Y^p(-X)^qH^{(r)}(q-p).$$

ここに $H^{(r)}(u) = (H+u)(H+u-1)\cdots(H+u-r+1)$ である．

注意したいのは，左辺の中味は $\mathfrak{sl}(2)$ の元として冪零ということである．その限定の下でこの形の三項定理が成り立つ．もっと一般にすると，このままの

冪の形では公式が複雑になり，きれいに書くためには違う工夫を要する．しかし，指数函数の上にのせて，形式的な群の上での Gauss 分解にすると一般元でも見易い形になる．そしてその中に自然に「超幾何型」の多項式や「二項型多項式」と呼ばれるものが登場する．つまり，例えば，超幾何函数が $SL(2)$ の部分群への分解に即して表現の行列要素に現われるのと，本質を同じくする現象がここに出現している．あとで具体的な式がでるので誤解はないと思うが,「超幾何型」と言っても，普遍包絡環の元が入るのは．パラメータの箇所で，従ってその部分は階乗冪で書けている場所である．ついでに言うと，非可換化したときに出現する「階乗」は差分とも相性がよいが，それは単なる偶然ではない．この点についても或る程度の理由は判るが，より深い理解が望まれる．以下に述べるような計算も，それが Capelli 型恒等式とその周辺に対し，深い理解への手掛かりになるのではないかとの期待から始めたのである．

また，上の三項定理はパフィアンと行列式の関係を導くにとどまらず，パフィアンの和公式 (の非可換版) の証明にも応用される．これについては上記数理研講究録『Capelli 恒等式の新局面』所収の橋本隆司氏の論文を見られたい．また「二項型多項式」については同講究録の伊藤稔氏の論文に解説がある．これは簡単に言うと，多項式の列 $f_n(x) \quad (n=0,1,2,\cdots)$ で「二項定理」

$$f_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f_k(x)\, f_{n-k}(y)$$

を満たすものである (G.C. Rota により系統的に研究が始められた)．

さてまず $\mathfrak{sl}(2)$ を形式的に指数化して「群」($SL(2)$ の普遍被覆のようなもの) に持ち上げ，その中での 「Gauss 分解」に相当する公式を呈示しよう．これは指数レベルでの Poincaré-Birkhoff-Witt 分解と言ってもよい．上の記号の下 $V = aX + bY + cH$ と置き，$e^{tV} = \exp(tV)$ を $e^{\Psi_X(t)X} e^{\Psi_H(t)H} e^{\Psi_Y(t)Y}$ の形に分解しようというのである．但し t は形式変数で，等式は t に関する形式的冪級数として捉える．また，$\Psi_X(t), \Psi_H(t), \Psi_H(t)$ には当然係数 a, b, c も含まれている．

はじめに $V = aX + bY + cH$ が冪零，つまり $ab + c^2 = 0$ とする．このとき上に述べた三項定理から (上のものを少し変形する)

$$(aX + bY + cH)^n = \sum_{p+q+r=n} \frac{n!}{p!q!r!}\, a^p b^q c^r\, X^p\, (H+p+q)_r\, Y^q$$

となる．但し $(s)_r = s(s+1)\cdots(s+r-1)$ は上昇階乗冪を表わす．これより

$$e^{tV} = e^{\frac{t}{1-ct}aX}\,(1-ct)^{-H}\,e^{\frac{t}{1-ct}bY}$$

がすぐに導ける．一般の場合は $\delta = \sqrt{ab+c^2}$ と置いて

$$e^{tV} = e^{\frac{v}{u-cv}aX}\,(u-cv)^{-H}\,e^{\frac{v}{u-cv}bY}$$

が成り立つ．但し

$$u = u_\delta(t) = \cosh(t\delta), \qquad v = v_\delta(t) = \frac{\sinh(t\delta)}{\delta}.$$

ここで u や v には δ が入っており，それには $\pm$ の不定性があるが，代入している函数が偶函数なので，問題は生じない．また，下の一般の公式で δ を 0 に近づけると $u \to 1$，$v \to t$ となるので冪零の場合が再現される．この証明は，冪零の場合は上で述べた三項定理を使えばすぐに得られる．一般の場合も冪零の場合を用いて導くことができることに気づいた (2002 年春頃)．というのは冪零元に対する三項定理から e^{sX} と e^{tY} の交換関係

$$e^{tY}e^{sX} = e^{\frac{s}{1+st}X}\,(1+st)^{-H}\,e^{\frac{t}{1+st}Y}$$

が出るからである．但し，s, t は形式変数とする．また，別の証明も幾つか可能である．その一つは微分方程式経由のもので，(既に何度か引用した) 講究録『Capelli 恒等式の新局面』に所収の落合啓之氏の論文で実行されている．一つ注意すべきこととして,「地上」にいる $SL(2)$ での Gauss 分解

$$\begin{aligned}\exp\left(t\begin{pmatrix} c & a \\ b & -c\end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} u+cv & av \\ bv & u-cv\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{av}{u-cv} \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u-cv & 0 \\ 0 & \frac{1}{u-cv}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{bv}{u-cv} & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

が「天上」の影となっているから，そこから分解の大きな情報が読みとれることである．ここで u, v は上にでてきた双曲線函数で表わされる函数である．こちらの方は，単なる行列の計算だから，手軽で手間はかからず，結果の予測に大いに役立つ．但し，筆者としては，冪級数だけを直接扱って証明することにも意義を感じ，それに拘泥っている．また，その限定の下でも何とおりか方法がある．

一般の場合でも，このような群レベルでの分解が得られれば，それから，冪零とは限らない元に対しても,「三項定理」が得られる筈である．ともかく原理的には展開するだけだから直ちにできて不思議はない．ところが，きれいな形に整理しようとすると，これが案外難しい．ちょっと信じがたいことではある．しかし，気づいてみれば，結果として可能であって，それをまとめ表示する過程で,「超幾何型多項式」や「二項型多項式」にも遭遇して，結構面白い．それを見ていると，超幾何型の函数にも随分親しみを覚えてくる．これらは決して小難しい高等函数ではなく，偏在して (ubiquitous) 馴染みやすいものなのだ．

考え方の第一歩は，一般元の三項展開で，単なる冪函数に限定せず V の多項式として別のものをとれば，それに応じて H の部分の多項式が変わる (本質的に難しいのはその部分である) と言うことだ．公式をきれいに書くのに，用いる多項式の系列をうまく選べばよいが，その可能性はいくつかある．例えば，上のものを少し変形すると，w をパラメータ (形式変数) として

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+(c+\delta)w}{1+(c-\delta)w}\right)^{\frac{V}{2\delta}} &= e^{aXw}\left((1+(c+\delta)w)(1+(c-\delta)w)\right)^{\frac{H}{2}} e^{bYw} \\ &= e^{aXw}\left(1+2cw-abw^2\right)^{\frac{H}{2}} e^{bYw}\end{aligned}$$

が得られる．これから V を或る多項式 (超幾何型かつ二項型になる) に代入した元の Poincaré-Birkhoff-Witt 分解に於いて，対応する H の部分が別の超幾何型かつ二項型多項式で表示されるということが看て取れる．例えば実際，

$$\left(\frac{1+pw}{1+qw}\right)^{Z}$$

の展開で w^n の係数は

$$p^n\binom{Z}{n}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}Z,\,-n\\ Z-n+1\end{matrix};\,p^{-1}q\right)$$

と書けるし，

$$(1-\lambda w+\mu w^2)^{-Z}$$

では w^n の係数は

$$(-\lambda)^n\binom{-Z}{n}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}-\frac{n}{2},-\frac{n-1}{2}\\ -Z-n+1\end{matrix};\,2^2\lambda^{-2}\mu\right)$$

と書けるからである．ここで ${}_2F_1$ はもちろん Gauss の超幾何級数で

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\,\beta\\ \gamma\end{matrix};x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n\;n!}x^n $$

と定義される．但し $(s)_n=\Gamma(s+n)/\Gamma(s)=s(s+1)\cdots(s+n-1)$．上の二つは級数が有限で切れる ($\alpha$ または β が負の整数) ので多項式となるが，Z の多項式列としては「二項型」でもある (これは「母函数」が w の函数の Z 乗という形をしていることから容易に判る)．ここに述べた事実はもちろん級数表示から計算で示すことができるが，より直観的には，積分表示

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\,\beta\\ \gamma\end{matrix};x\right)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tx)^{-\alpha}\,dt $$

で特殊なパラメータの関係 $\gamma=\beta-\alpha+1$ や $\gamma=\beta+\alpha+1$ などをもつとき，これを Cauchy の積分公式のように看做して，一次分数式や二次式の冪の展開係数の表示だと思えば納得しやすい．但し，特にこのような表示が大切という訳ではない．ただ，得られた式が「超幾何」だと判れば安心できるし，逆に「超幾何」が現われる理由を知ることにもなる．

また，V の方をその固有値に応じた階乗冪にすると，もっと普通の冪と近い形にできるが，その場合 H の表示に現われるものもまた別の超幾何型かつ二項型の多項式となる．具体的に式を書いてみよう．まず「群」レベルの公式だが，z をパラメータとして

$$ (1-z)^{-\frac{V}{2\delta}}=e^{\frac{z}{1-Jz}\frac{aX}{2\delta}}\,(1-Jz)^{-H}\,(1-z)^{\frac{H}{2}}\,e^{\frac{z}{1-Jz}\frac{bY}{2\delta}} $$

が成立する．但し $J=(c+\delta)/2\delta$ である．ここで先ほどと同様 (一般的なのは少しだけなので，公式が重複した感があるが，ご容赦願いたい)

$$ (1-pz)^{-A}\,(1-qz)^{-B} $$

の z^n の係数が

$$ p^n\frac{(A)_n}{n!}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}-n,\,-B\\ -A-n+1\end{matrix};p^{-1}q\right) $$

となることを用いて展開すれば，次の「一般元に対する三項定理」

$$ V(V+2\delta)\cdots(V+2\delta(n-1))= $$
$$ \sum_{p+q+r=n}\frac{n!}{p!q!r!}(aX)^p\left(-\frac{H}{2}\right)_r(2\delta)^r\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}-r,\,-H-p-q\\ -\frac{H}{2}-r+1\end{matrix};\frac{c+\delta}{2\delta}\right)(bY)^q $$

が得られる．ここで $V=aX+bY+cH$ である．もちろん，上の公式で $\delta\to 0$ の極限は，冪零元に対する三項定理を復元する．階乗冪から普通の冪にするには Stirling 数を掛けて線型結合を作ればよいが，それで何かが判りやすくなるかどうか知らない．もちろん c に関しては恰好がよくなるだろうが．

これより見易い公式もあるのかも知れない．少なくとも，本質的には同じ (「群」レベルでの分解で，展開する変数を取り替える) 公式でも，展開した見かけが異なるものは，まだある．他にも上昇冪と下降冪の混じったものをとる可能性も考えられるが，今のところは判らない (計算していない)．何を決定版と思うか，或いは，表現方法の多様性に意味があるのか，などについて，まだ明確に捉え得ていない．幾つかの公式を，更に明示的に並べてみて，比較検討する必要もあるだろう．

「群」レベルの公式で，函数を選ぶ方針について説明していないが，adjoint 表現の固有値に応じて選んでいるということだけ付け加えておこう．同時にその基準は Lie 環 (普遍包絡環) レベルでは「二項型多項式」を選ぶことに繋がっている．背景には一応，群論的・表現論的指針がある訳だ．

最初に戻って「群」レベルの公式から，直接に展開しつつ

$$e^{tV}=\sum_{p,q,r}\frac{a^pb^qc^r}{p!q!r!}\,X^p\left(\frac{\tanh(t\delta)}{\delta}\right)^{p+q+r}(\cosh(t\delta))^{-H}\,(H+p+q)_rY^q$$

と途中下車した式は，形は冪零元の場合に近い．冪零元への極限 $\delta\to 0$ を見るには判りやすい式である．この展開を完成するには大雑把に言って積分表示で

$$\oint\left(\frac{\tanh(t\delta)}{\delta}\right)^{p+q+r}(\cosh(t\delta))^{-H}\,t^{-1-n}dt$$

と定義されるものを扱えばよい．これは超幾何型の積分に似て，親戚筋であるが，これについては，よく考えていない．「超幾何型」でない「二項型」多項式とも関係するところなので，興味がある対象だろうと思う．

ここに現われた多項式の由来を考えると，非可換な対象から生じたものではあるが，一種の行列要素と看做せる．そして，恰度，球函数が現われるのと同じ仕組みで，超幾何型の多項式が出現した．その一方，それは Capelli 恒等式に於いて，可換な世界での表現行列に非可換な元 (普遍包絡環の元や微分作用素) を代入して乗法性に近いものが見えたのとも類似している．非可換なパフィア

ンと行列式の関係を導き出すのに，何故そのようなものが現われたかというと，実は背後に表現の同値を与える intertwining operator が潜んでいる．今の場合には spin 表現とその反傾表現のテンソル積が，外積代数版の正則表現と同値になるというのが表現論的背景である．

このように非可換世界の具体例は，常に可換な世界に影のように付き添って，我々の前に現われる．逆にそれらが可換な世界に影を落としているが，それは我々に余り見えていない．その存在は Capelli 恒等式を通じてようやく次第に明らかになってきたのである．このような仕組みを少しでも解明できればと思っている．

結語

最後のあたりは，まだ研究が発展途上である．従って原稿を書きながら，思いついてフラフラ計算をし直すなど，往生際も悪い．歯切れよく定式化したり，明快な哲学をもった定理を述べたりするなどの完結性には程遠いが，不変式論の双対性としての側面を担う Capelli 問題，或いは Capelli game が非可換での特殊多項式を自然に喚びだし，一見関係のなさそうなものたちをつなぐ糸となっているという雰囲気を幾分かでも示せれば，この講演と報告の役割は果たせたと思う．一つ付け加えれば，特に私がこれらの公式に魅せられる理由として，極度に単純化した場合に，それが中学生や高校生でも知っている初等的内容になるということがある．一端は「二辺狭角」の定理として述べたことだが，他に例えば，パフィアンの自乗が行列式になるという事実の根底 (上に言及した spin 表現に絡んだ同値性) には，中学校で習った $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ という因数分解の公式があるし，ここでは述べなかったが，$(\mathfrak{o}_m, \mathfrak{sl}_2)$ duality に於ける Capelli 恒等式では，対応する可換版が Lagrange の恒等式

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{m} y_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{m} x_i y_i\right)^2 = \sum_{1\le i<j\le m} (x_i y_j - x_j y_i)^2$$

になっていることもその一例である．すべてのものがこのレベルで理解できることを理想としつつ，非可換世界に遊んでいると，簡単な公式もここに集まり繋がってくることが多く，見える世界も広がってくる．研究がそこまで深化し，いつかまた，これらについて詳しく話すことができる機会がくることを願う．

最後に，岡シンポジウムで話す機会を与えていただいた森本徹先生をはじめとする世話人の方々と，熱気溢れた研究会としてくださった講演者・参加者の皆様に改めて感謝したい．はじめに述べたように，私自身，余りにもうますぎる講演配列に戸惑ったが，その分，聴衆としての楽しみも十二分に享受できたことを附記しておきたい．