代数表示の変形論と量子論

大森 英樹　(Hideki Omori)

(Tokyo University of Science),

(Visiting member of Keio University)

ピカソの晩年の絵を眺めていて正直思うことは「どうしてこれほどまでデフォルメするのだろうか？」である。評判の高い絵ではあるのだが僕にはどうしても醜悪に見えてしまうのである。一体「美」とは何なのだろう？

しかし、数学で deformation を考えるようになって少し理解できたような気がしてきた。「美の正体」を知ろうとするのは絵描きの本能みたいなものであろう。本質を失わずにどこまでデフォルメできるかを追求することでその本質に迫ろうとしているのだと思うようになった。

この一文は、真に独創的、革命的なものを追求しようとする若者に送るものである。保守的権威の中で安住したい人にとっては有害な焚書ものの一文である。

物ごとは全て様々な表示をもつ。同じものが様々に見えるのである。表示や思考を固定してしまうことが諸悪の根源である。常に異質のものを受け入れる懐の深さが無ければ、新しいものは認識されない。数学というものはそういう考えかたを培う為のものであったはずである。

1　最も簡単な例での考察

点集合で物を考える癖が残っている頭で、デフォルマシオンを考えると、しばしば決定的な誤解に到達する。この節はそれを防ぐためのものである。

数学的表示をしようとすれば、何か良く知っているものを利用してその表示を借りて表示しなければならない。いわば、既成の母屋の軒下を借りてその表示を利用して述べたいことを表現するのである。うまくいけば、最後には母屋の方も乗っ取れるかもしれないのだが、始めからそのような顔をしていては嫌われるだけである。なにしろ母屋は数学の基礎中の基礎、多項式からなる母屋である。この場合、母屋は数学は表示のために借りるだけだから、それが基礎にしているものが何であるかを詮索したりはしない。

1.1 多項式環の積の変形

$\mathbb{C}[\zeta]$ を1変数の多項式環とし、これを表示の為の土台とする。ここでの計算法やさまざまな公式は既知とする。これが母屋である。$\mathbb{C}[\zeta]$ で τ をパラメータとして次のような積を入れる。

$$f*_{\tau}g=\sum_{k\geq 0}\frac{\tau^k}{2^k k!}\partial_{\zeta}^k f\partial_{\zeta}^k g \quad (=fe^{\frac{\tau}{2}\overleftarrow{\partial_{\zeta}}\overrightarrow{\partial_{\zeta}}}g) \tag{1}$$

$\tau\in\mathbb{C}$ を deformation parameter と考える。 括弧内の書きかたは後々非可換 deformation を考えるときに便利な記号だが、今は気にしなくてよい。

この公式は一方が多項式であれば計算できるものであが、軒下に母屋で普通使われている積とは違う積を入れただけのものである。

総和記号下で計算するのに慣れておれば、新しい積 $*_{\tau}$ は結合律をみたしていることが容易にわかる。特に τ=0 のときは母屋で使われている積と同じものである。しかも $(\mathbb{C}[\zeta],*_0)$ は写像

$$e^{\frac{\tau}{4}\partial_{\zeta}^2}:(\mathbb{C}[\zeta],*_0)\to(\mathbb{C}[\zeta],*_{\tau}). \tag{2}$$

で $(\mathbb{C}[\zeta],*_{\tau})$ と同型となる。つまり $e^{\frac{\tau}{4}\partial_{\zeta}^2}$ は逆対応 $e^{-\frac{\tau}{4}\partial_{\zeta}^2}$ をもち

$$e^{\frac{\tau}{4}\partial_{\zeta}^2}(f*_0g)=(e^{\frac{\tau}{4}\partial_{\zeta}^2}f)*_{\tau}(e^{\frac{\tau}{4}\partial_{\zeta}^2}g) \tag{3}$$

が成立する。このことは $\frac{1}{k!}(\frac{\tau}{4}\partial_{\zeta}^2)^k(f*_0g)$ を

$$\sum_{p+q+r=k}\frac{\tau^r}{r!2^r}\partial_{\zeta}^r(\frac{1}{p!}(\frac{\tau}{4}\partial_{\zeta})^p f)*_0\partial_{\zeta}^r(\frac{1}{q!}(\frac{\tau}{4}\partial_{\zeta})^q g). \tag{4}$$

のように分解して考えれば容易にわかる。$I_0^{\tau}=e^{\frac{\tau}{4}\partial_{\zeta}^2}$ は **intertwiner** と呼ばれる。

後の計算の為に $I_{\tau}^{\tau'}=I_0^{\tau'}(I_0^{\tau})^{-1}$ と定義し、これを τ から τ' への intertwiner と呼ぶ。

注意 これらをもっと組織的に様々なものに広げて考えるには Intertwiner の族を真っ先に与えて、そこから話を始めてしまえば良い。Intertwiner $I_{\tau}^{\tau'}$ を先に与えて考えるときには、定係数の微分方程式である必要はないが、変数係数にするといっても主要部分は上のようなもので、一般には $I_{\tau}^{\tau'}=e^{\frac{\tau}{4}\partial_{\zeta}^2+a(\zeta)\partial_{\zeta}}$ のような形に限っておかないと話は難しくなる。

1.2 積公式の変形は表示の変形をうながす

ζ という生成元が固定されているのだから $\zeta*_{\tau}\zeta=\zeta^2+\frac{\tau}{2}$, $\zeta*_{\tau}\zeta*_{\tau}\zeta=\zeta^3+\frac{3\tau}{2}\zeta$ のように計算される。一般には多項式 $f(\zeta)$ に相当する多項式 $f_{\tau}(\zeta)$ は $f_{\tau}(\zeta)=e^{\frac{\tau}{4}\partial_{\zeta}^2}f(\zeta)$ である. 多項式ではないが

$$e_{\tau}^{2a\zeta}=e^{2a\zeta+a^2\tau} \tag{5}$$

である。これが、母屋で指数関数と呼ばれているもの $*_{\tau}$-積を使った表示である。一般に、一つの多項式 $f(\zeta)$ に対して $\{f_{\tau}(\zeta);\tau\in\mathbb{C}\}$ という多項式の集団が得られる。この集団を $f_*(\zeta)=\{f_{\tau}(\zeta);\tau\in\mathbb{C}\}$ のように書き $f_*(\zeta)$ を一つの元のように考える。さらに

$$:e_*^{s\zeta}:_{\tau}=e^{\frac{1}{4}s^2\tau}e^{s\zeta}=e^{\frac{1}{4}s^2\tau+s\zeta},\quad :f_*(\zeta):_{\tau}=f_{\tau}(\zeta) \tag{6}$$

のような記号 :•:$_\tau$ を用意し、これで個別のものを表すことにする :f_*:$_\tau$ を f_* の τ-**表示**と考えるのである。つまり : $e_*^{s\zeta}$:$_\tau$ は $e_*^{s\zeta}$ の τ-表示である。記号の使いかたを敷衍して

$$:a\zeta_*+b:_\tau = a\zeta+b, \quad :2\zeta_*^2:_\tau = 2\zeta^2+\tau, \quad :2\zeta_*^3:_\tau = 2\zeta^3+3\tau\zeta, \quad :\zeta_*^n:_\tau = P_n(\zeta,\tau)$$

($P_n(\zeta,\tau) = \sum \frac{n!}{4^k k!(2k)!}\tau^k\zeta^{n-2k}$) のように書いて良いであろう。注意してほしいのは、考えかたは変えているが、計算はすべて母屋で行っている計算をそのまま使っているということである。したがって $f_\tau(\zeta)*_0 g(\zeta)$ のような計算も意味がある。(1) は多項式だけでなくもっと広い所に拡張される。次の第一のものは容易、第二のものはテイラー展開が収束しておればは明らかであろう

$$e^{2a\zeta}*_\tau e^{2b\zeta}=e^{2(a+b)\zeta+2ab\tau}, \quad e^{2a\zeta}*_\tau f(\zeta) = e^{2a\zeta}f(\zeta+a\tau) \tag{7}$$

しかも intertwiner の計算から $I_\tau^{\tau'}(e^{s\zeta})=e^{\frac{1}{4}(\tau'-\tau)s^2}e^{s\zeta}$ がわかり, しかも $I_\tau^{\tau'}(e^{\frac{1}{4}s^2\tau}e^{s\zeta})=e^{\frac{1}{4}s^2\tau'}e^{s\zeta}$ だから、集団 $\{e^{\frac{1}{4}s^2\tau}e^{s\zeta};\tau\in\mathbb{C}\}$ を $e_*^{s\zeta}$ と書き $e_*^{s\zeta}$ を $*$-積の世界の指数関数と思うことにしたわけである。この文脈で $e_*^{s\zeta}$ を *q-number* 指数関数とか $*$-指数関数と呼んでよいであろう。積公式 (1) より、指数法則

$$:e_*^{s\zeta}:_\tau *_\tau :e_*^{t\zeta}:_\tau = :e_*^{(s+t)\zeta}:_\tau, \quad \forall\tau\in\mathbb{C}. \tag{8}$$

もわかるから表示 τ は省略して $e_*^{s\zeta}*e_*^{t\zeta} = e_*^{(s+t)\zeta}$ と書いておいて良いであろう。おまけに、$:e_*^{s\zeta}:_\tau$ は任意の τ に対して微分方程式 $\frac{d}{dt}g(t) = \zeta*_\tau g(t)$ の、初期条件 $g(0)=1$ の解である。これも $\frac{d}{dt}g_*(t) = \zeta_* * g_*(t)$, $g_*(0)=1$, と書いて良いであろう。$e_*^{s\zeta}$ を互いに相互変換される one parameter group の族と理解するより、様々な表示を持つ一つの物と理解したほうが良いであろう。

一般に h が整関数 ($\mathbb{C}$ 上正則な複素関数) のとき次の公式も得られる:

$$:e_*^{2s\zeta}*h(\zeta):_\tau = e^{2s\zeta+s^2\tau}h(\zeta+s\tau). \tag{9}$$

集団 $\{f_\tau(\zeta);\tau\in\mathbb{C}\}$ を $f_*(\zeta)$ のように書き、これを一つの元のように考えたものを ***q*-number 関数**と呼ぶことがある。単に表示をかえているだけだから、$f_*(\zeta)$ の世界は普通の多項式の世界と代数的には何も変わらない。$\tau=0$ の所から intertwiner I_0^τ で変換して考えればよいのだから、これは $\mathbb{C}[\zeta]$ と代数的に同型である。伝統的には、従ってこれ以上何も詮索する必要はないとされていた。多項式の空間だけを考えているときには元 (げん) の表示が安定しているから、上のような考えかたは説得力を持つだろうが、非可換の代数の表示の問題 (これを ordering problem と呼ぶ) を考えると、表示の問題は極めて大きな意味を持っていることが理解されよう。

$*$-積で書かれた元を一人歩きさせるために, $\sum a_n\zeta_*^n$ のように書かれている元を $f_*(\zeta_*)$ と書くことにする。形式的な微分を

$$\partial_\zeta f_*(\zeta_*)=\sum a_n n\zeta_*^{n-1}$$

で定義する。次の公式は些細な注意に見えるが、大きな意識変更である。

$$:\partial_\zeta f_*(\zeta_*):_\tau=\partial_\zeta :f_*(\zeta_*):_\tau. \tag{10}$$

単に表示を変えただけだが、これで母屋を乗っ取る準備が完了した。後はこれが発酵するのを待つだけである。しかし、予想される次のような反撥に答えておかねばなるまい。

$f_*(\zeta)$ の世界の極大イデアル空間は $\mathbb{C}$ である。それ以上に何があるというのか。表示を変えただけで新しそうな顔をするのは許しがたい欺瞞である。

さよう $*$-多項式の世界は全く普通の多項式と同型の世界だから、一意的因数分解定理も成立している。多項式の中だけに籠っているのなら、何も変える必要はない。

1.3 テータ関数

指数関数 $e_*^{t\zeta}$ を使って $\theta(\zeta,*)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e_*^{2ni\zeta}$ を考えてみよう。$:\theta(\zeta,*):_\tau=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{2ni\zeta-n^2\tau}$ であるから、これは $\tau=0$ では発散していて、意味がない式だが、$\mathrm{Re}\tau>0$ では $e^{-n^2\tau}$ が効いて絶対収束している。実は $\theta(\zeta,\tau)=:\theta(\zeta,*):_\tau$ は Jacobi の楕円 θ-関数 $\theta_3(\zeta,\tau)$ である。さらに Jacobi の楕円 θ-関数 $\theta_i, i=1,2,3,4$ はすべて指数関数の両側無限等比級数の τ-表示なのである：

$$\begin{aligned}
\theta_1(\zeta,*) &=\frac{1}{i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n e_*^{(2n+1)i\zeta}, &\qquad \theta_2(\zeta,*) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_*^{(2n+1)i\zeta},\\
\theta_3(\zeta,*) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_*^{2ni\zeta}, &\qquad \theta_4(\zeta,*) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n e_*^{2ni\zeta}
\end{aligned} \tag{11}$$

これらの τ-表示 $\theta_i(\zeta,\tau)$ がとりもなおさず楕円 theta 関数なのである。τ を deformation のパラメータと思わず普通の数として扱えばこれも母屋の中の関数であるが、軒下ではこれが等比級数の両側無限和という簡単な形に書かれているのである。

Lemma 1 $e_*^{2i\zeta}*\theta(\zeta)=\pm\theta(\zeta)$, $\theta(\zeta+2\pi)=\theta(\zeta)$ であるような整環数は $\theta_i(\zeta,*)$ の 1 次結合である。

Proof 2π-周期性より、$\theta(\zeta)=\sum_n a_n e_*^{in\zeta}$ と展開され、第 1 の等式から $a_{n+2}=\pm a_n$ が分かる。すると自由に動かせるのは a_0, a_1 と $e_*^{2i\zeta}*\theta(\zeta)=\pm\theta(\zeta)$ の $\pm$ だけとなる。 □

指数法則 $e_*^{a\zeta+s}=e_*^{a\zeta}e^s$ を項別に使えば $\theta(\zeta,*)$ は π-周期の周期関数であり、さらに $\theta_i(\zeta,*)$ は 2π-周期の周期関数であることがわかる。さらに、指数法則 $e_*^{a\zeta+b\zeta}=e_*^{a\zeta}e^{b\zeta}$ を項別に使えば無限和を取っていることから $\theta(\zeta,*)$ が等式 $e_*^{2i\zeta}*\theta_i(\zeta,*)=\theta_i(\zeta,*)$, $(i=2,3)$, $e_*^{2i\zeta}*\theta_i(\zeta,*)=-\theta_i(\zeta,*)$, $(i=1,4)$, を満たしていることは明らかであろう。$\forall\tau$ について両辺の τ-表示を計算してみると $:e_*^{2i\zeta}:_\tau=e^{-\tau}e^{2i\zeta}$ だから (9) を使って

$$e^{2i\zeta-\tau}\theta_i(\zeta+i\tau,\tau)=\theta_i(\zeta,\tau);\ (i=2,3),\quad e^{2i\zeta-\tau}\theta_i(\zeta+i\tau,\tau)=-\theta_i(\zeta,\tau);\ (i=1,4), \tag{12}$$

が得られる。これは $\theta(\zeta,\tau)$ の擬周期性と呼ばれる等式である。軒下では deformation parameter だった τ が母屋では擬周期という意味に変わっている。**指数因子** $e^{2i\zeta-\tau}$ は $i=1,2,3,4$, で共通だから、(母屋の計算の) 比を考えて $\theta_{i/j}(\zeta,\tau)=\theta_i(\zeta,\tau)/\theta_j(\zeta,\tau)$ とすれば、これらは $\theta_{i/j}(\zeta+2\pi,\tau)=\theta_{i/j}(\zeta,\tau)$, $\theta_{i/j}(\zeta+i\tau,\tau)=\pm\theta_{i/j}(\zeta,\tau)$ という 2 重周期性を持つ有理形関数 (楕円関数) となる.

比そのものは軒下では考えられないから, $(\theta_i(\zeta,*):\theta_j(\zeta,*))$ の組で代用するが, これが軒下では deformation parameter τ に依存しない本質的なものと理解されるから, $(\theta_i(\zeta,*):\theta_j(\zeta,*))$ はデフォルメに耐えて生き残る 2π 周期 q-number 関数 の本当の姿と言っても良いだろう. (私にはピカソの絵より美しく見える). これで 代数の元の表示の変形というのが単なる言いかえ以上のものであるらしいことは分かるであろう。

しかし, 次のような奇妙なことにも遭遇する：

$$-e_*^{-Ni\zeta}*\sum_{n=N}^{\infty}e_*^{ni\zeta},\quad e_*^{-N'i\zeta}*\sum_{-\infty}^{N'}e_*^{ni\zeta}$$

はいずれも $1-e_*^{i\zeta}$ は $*$-積での逆元である。同じ元の逆元が沢山見つかるのだから、これは結合律を乱している。

$$\sum_{n=0}^{\infty} e_*^{ni\zeta}=\frac{1}{1-e_*^{i\zeta}}, \qquad -\sum_{-\infty}^{1} e_*^{ni\zeta}=\frac{e_*^{-i\zeta}}{e_*^{-i\zeta}-1}=(e_*^{i\zeta})^{-1}*(e_*^{-i\zeta}-1)^{-1}$$

を見てどのように結合律が破れているのかをみると、$B^{-1}*A^{-1}=(A*B)^{-1}$ が破れていることが分かる。$(e_*^{-i\zeta}-1)^{-1}$ はあくまで**無限級数を簡略化して書いただけ**のものだから、$(e_*^{-i\zeta}-1)^{-1}=(e_*^{-i\zeta}*(1-e^{i\zeta}))^{-1}$ という等式は成立していないのである。このように逆元は沢山あり、結合律を破るので、逆元を書く時には常にその作られかたに注意を払わねばならない。

これらのことは $*$-積を使って計算するから出てきたものではなく、もともと母屋の θ-関数でも起こっていたことであるが、母屋の方には $*$-積というものがないから、取り上げられたことがなかっただけである。しかし Jacobi にははっきりこの積が意識されていたように思える。$*$-積は $(\sum_{n=0}^{\infty} e_*^{ni\zeta})*(\sum_{-\infty}^{0} e_*^{ni\zeta})$ を計算してみれば分かるように発散して定義できないこともあるが、結合律に注意して使えば、それでもかなり計算が可能なのである。

上では τ を表示の為のパラメーターと見ているから本質は τ を消した表記の方に現れていると考えている．しかし，物ごとは全て相対的である．例えば $\theta_i(0,\tau)$ を τ の関数と積極的に考える．つまり，発想を逆点させることもできるのである．$\theta_i(0,\tau)$ の世界は q-analogue の世界でもある．

$\theta_i(\zeta,*)*\theta_j(\zeta,*)$ は発散して定義できないが，$\theta_i(\zeta,\tau)\theta_j(\zeta,\tau)$ は整関数の積だから整関数である．

Proposition 1 $\theta_i(\zeta,\tau)\theta_j(\zeta,\tau)\theta_k(\zeta,\tau)$ は周期 2π，擬周期 $i\tau$ 指数因子 $e^{6i\zeta-3\tau}$ のテータ関数である．

このように 2π 周期性となにがしかの指数因子で擬周期 $i\tau$ を持つものを全てテータ関数とよぶことにすれば，テータ関数 $f(\zeta,\tau)$ は τ の関数 $f(0,\tau)$ だけできまってしまう関数である．$f(\zeta,*)$ を表示によらない本質の世界，$f(0,\tau)$ はそれを τ-表示して取り出す数値 (観測値) のように考えると面白い．

この場合 $\theta_i(\zeta,\tau)\theta_j(\zeta,\tau)$ を考えるには積公式のパラメーターを τ から $\tau/2$ のように動かすので，表示の変更の方が大切になる．これを物理の単位系の変更のように考えるとさらに面白くなる。

Lemma 2 整関数 $f(\zeta)$ が $f(\zeta+2\pi)=f(\zeta)$，$e^{2mi\zeta-m\tau}f(\zeta+i\tau)=f(\zeta)$ を満たす時には積公式の τ を $\tau'=\tau/m$ に換えた積公式で $f(\zeta+2\pi)=f(\zeta)$，$e_{*_{\tau'}}^{2mi\zeta}*_{\tau'}f(\zeta)=f(\zeta)$ となり，次のように表示される*:*

$$f(\zeta)=\sum_k a_k e_{*_{\tau'}}^{ik\zeta}, \quad a_{k+m}=a_k.$$

つまり、θ-関数の全体はさまざまな単位系で数値化される 矮小化された物理世界みたいなものである。

1.3.1 3角関数まがいの計算公式

結合律が壊れていると言っても、多項式とからむだけの式の場合には結合律が成立するから、注意深くやればかなり計算が可能である。しかも、Jacobi の theta 関数はかなり3角関数を意識して作られていると思うので、その一端を $*$-積の関数の形で紹介しておこう。

まず、無限等比級数による定義で、

$$\frac{1}{1-e_*^{-2i\zeta}}+\frac{1}{1-e_*^{2i\zeta}}=1+\theta_3(\zeta,*),\quad \frac{1}{1+e_*^{-2i\zeta}}+\frac{1}{1+e_*^{2i\zeta}}=1+\theta_4(\zeta,*) \tag{13}$$

である。これらは左辺を普通の分数式の計算でやってしまうと、例えば

$$\frac{1}{1-e_*^{-2i\zeta}}+\frac{1}{1-e_*^{2i\zeta}}=\frac{2-e_*^{2i\zeta}-e_*^{-2i\zeta}}{(1-e_*^{2i\zeta})(1-e_*^{-2i\zeta})}=1$$

である。つまり、$\theta_3(\zeta,*)$, $\theta_4(\zeta,*)$ は associator を書いたものである。

一方 $-2ie_*^{i\zeta}*(\sum_{n=0}^{\infty}e_*^{2ni\zeta})$, $2ie_*^{-i\zeta}*(\sum_{n=-\infty}^{0}e_*^{2ni\zeta})$ が共に $\frac{1}{2i}(e_*^{i\zeta}-e_*^{-i\zeta})$ の逆元 (これらは同じものではない) であることに注目して、

$$(\sin_*\zeta)_{*+}^{-1}=2ie_*^{-i\zeta}*(\sum_{n=-\infty}^{0}e_*^{2ni\zeta}),\quad (\sin_*\zeta)_{*-}^{-1}=-2ie_*^{i\zeta}*(\sum_{n=0}^{\infty}e_*^{2ni\zeta}) \tag{14}$$

のように定義すればこれらの τ-表示は $\mathrm{Re}\tau>0$ において整関数であり

$$\theta_2(\zeta,*)=2i\big((\sin_*\zeta)_{*+}^{-1}-(\sin_*\zeta)_{*-}^{-1}\big) \tag{15}$$

である。これも、分数式の普通の計算 (結合律を満たす) では 0 となる計算である。

$$(\sin_*(\zeta+2\pi))_{*+}^{-1}=(\sin_*\zeta)_{*+}^{-1},\quad e_*^{i\zeta}*(\sin_*\zeta)_{*+}^{-1}=(1-e^{2i\zeta})_*^{-1}.$$

同様 $-2e_*^{i\zeta}*(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_*^{2ni\zeta})$, $2e_*^{-i\zeta}*(\sum_{n=-\infty}^{0}(-1)^n e_*^{2ni\zeta})$ が共に $\frac{1}{2}(e_*^{i\zeta}+e_*^{-i\zeta})$ の逆元であることに注目して、

$$(\cos_*\zeta)_{*+}^{-1}=2e_*^{-i\zeta}*(\sum_{n=-\infty}^{0}e_*^{2ni\zeta}),\quad (\cos_*\zeta)_{*-}^{-1}=-2e_*^{i\zeta}*(\sum_{n=0}^{\infty}e_*^{2ni\zeta}) \tag{16}$$

のように定義すればこれらの τ-表示は $\mathrm{Re}\tau>0$ において整関数であり、

$$\theta_1(\zeta,*)=2i\big((\cos_*\zeta)_{*+}^{-1}-(\cos_*\zeta)_{*-}^{-1}\big) \tag{17}$$

である。$\tan_{*+}\zeta=(\sin_*\zeta)*(\cos_*\zeta)_{*+}^{-1}$, $\tan_{*-}\zeta=(\sin_*\zeta)*(\cos_*\zeta)_{*+}^{-1}$ 等と定義する。

$$\tan_{*+}\zeta-\tan_{*-}\zeta=2i(\sin_*\zeta)*\theta_1(\zeta,*)$$

である。同様に

$$\theta_3(\zeta,*)=e_*^{i\zeta}*((\cos_*\zeta)_{*+}^{-1}-(\cos_*\zeta)_{*-}^{-1}),\quad \theta_4(\zeta,*)=e_*^{i\zeta}*((\sin_*\zeta)_{*+}^{-1}-(\sin_*\zeta)_{*-}^{-1})$$

である。したがって、この辺の計算は $e_*^{\pm i\zeta}, (\sin_*\zeta)_{*\pm}^{-1}, (\cos_*\zeta)_{*\pm}^{-1}$ で尽くされる。

さらに

$$(1-e_*^{2i\zeta})*(1-e_*^{-2i\zeta})=2(1-\cos_*2\zeta)=(1-e_*^{2i\zeta})+(1-e_*^{-2i\zeta}) \tag{18}$$

だから、$2(\sin_*\zeta)^2=1-\cos_*2\zeta$ より $(1-e_*^{2i\zeta})+(1-e_*^{-2i\zeta})=4(\sin_*\zeta)^2$ に注意すれば

$$(1-e_*^{2i\zeta})*(1-e_*^{-2i\zeta})=2(1-\cos_*2\zeta)=4(\sin_*\zeta)^2 \tag{19}$$

である。両辺の**逆元**を考えたいのであるが、逆元を取るのは注意がいる。無限級数として考えたときには $(1-e_*^{-2i\zeta})^{-1}*(1-e_*^{2i\zeta})_*^{-1}$ は発散しているが、$\big((\sin_*\zeta)_{*\pm}^{-1}\big)^2$ はどちらも $(\sin_*\zeta)^2$ の逆元で

$$(\sin_*\zeta)_{*-}^{-2}=\big((\sin_*\zeta)_{*-}^{-1}\big)^2=-4e_*^{2i\zeta}*(\sum_{n=0}^{\infty}e_*^{2ni\zeta})^2=-4e_*^{2i\zeta}*\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)e_*^{2ni\zeta}$$

等の式が成立するから、(19) より

$$\big((1-e_*^{2i\zeta})*(1-e_*^{-2i\zeta})\big)_{*\pm}^{-1}=4^{-1}(\sin_*\zeta)_{*\pm}^{-2}\quad(\text{複合同順})$$

が成立している。$*$-三角関数の逆元も整関数であるが、これを作るときにはどちらむきの無限等比級数を使うかによって結果に差があり、その差が θ-関数となって現れる。正、負の向きの無限等比級数の積は発散する。計算はこのことに注意しさえすれば、３角関数の普通の公式は全部成立する。

1.3.2 自然境界

Theta 関数では τ-表示したときの $\zeta=0$ での値が大切な情報を持つ.

$$\theta_3(0,\tau)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-n^2\tau}=2\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n^2\tau}-1=2\sum_{n=0}^{\infty}q^{n^2}-1$$

のように、これらは $1-e_*^{2i\zeta}$ の逆元の情報だけから計算されるが、逆元の多価性によらずに定義される量である。つまり、この部分が $1-e_*^{2i\zeta}$ の逆元の多義性によらない不変量の役目をする。

$\theta_3(\zeta,*)$ の τ-表示を

$$:\sum_{n\in\mathbb{Z}}e_*^{2in\zeta}:_\tau=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-n^2\tau}e^{2in\zeta}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(e^{-\tau})^{n^2}.$$

のように τ のほうに注目して書き直す。 するとこの無限級数の $q=e^{-\tau}$ に関する収束半径が 1 だということはすぐわかる。Hadamard の gap theorem によれば $a_n>0$ で $\sum_{n=0}^{\infty}a_nq^{n^2}$ の収束半径が 1 のとき、$|q|=1$ は自然境界である。

自然境界が現れることの判定法としては、次の定理が知られている (Pólya) :

Theorem 1 収束半径が 1 の冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nq^{\lambda_n}$, $a_n>0$ に於て $\lim_{n\to\infty}\lambda_n/n=\infty$ ならば $|q|=1$ は自然境界である。

この定理によれば, theta 関数については τ-表示はいつも $\{\tau;\mathrm{Re}\,\tau>0\}$ のところでしか考えられず、$:\sum_{n\in\mathbb{Z}}e_*^{2in\zeta}:_{e^{i\theta}\tau}$ のような複素回転を考えたりして解析接続していくことはできないことになる。

1.3.3 単位系の変更

数学の世界は数の世界だから、物理と違って単位系というものはないと言われるのだが, θ-関数は τ-表示という単位系に相当するパラメーターを持っている.

Deformation の作りかたは (1) 式にとどまらない。とりあえず、計算の為に変数 ζ の線形の変換公式を作っておこう。変数の変換公式は母屋のものより複雑になる. $\zeta'{=}a\zeta$ と置くと $\zeta'{*_\tau}\zeta'{=}(\zeta')^2{+}\frac{1}{2}\tau{=}a^2\zeta^2{+}\frac{1}{2}\tau$ であって、$(a\zeta){*_\tau}(a\zeta){=}a^2\zeta^2{+}\frac{1}{2}a^2\tau$ ではないので注意が要る. ζ ではなく ζ' のほうが代数の生成元だと思うと (つまり単位を変更すると)deformation parameter を τ から τ/a^2 に変えないと同じ物にならない。$:e_*^{2t\zeta'}:_\tau{=}e_*^{2t\zeta'+t^2\tau}$, $:e_*^{2ta\zeta}:_\tau{=}e_*^{2ta\zeta+t^2a^2\tau}$ に注意すると

$$:f_*(\zeta'):_{a^2\tau}{=}:f_*(a\zeta):_\tau, \qquad \zeta'{=}a\zeta \tag{20}$$

という変換公式になる。これは物理で言う単位系の変更に相当するが, ζ は「次元が -2 である」と言っているようにもみえる。

軒下の $*$-積のほうでは $e_*^{\zeta'}{=}e_*^{a\zeta}$ と書いて何の不都合もない (物理的意味は何も変わらない) が、これらの式を母屋の関数表示で表示する (あるいは数値に相当するものを取り出す) ときには ζ を生成元としているときと ζ' を生成元としているときとで数値は違うと言っているのである。(メートル法と尺貫法では数値が違って当然である。)

変数の変換はむしろ $*$-積のままで τ-表示をしないで考える方が良い。この考えかたでは、ζ と ζ_*^2 は可換だから $\frac{1}{a}(\zeta{+}\alpha a)_*^2{=}\frac{1}{a}\zeta_*^2{+}2\alpha\zeta{+}\frac{\alpha^2}{a}$ を使って

$$\sum e_*^{\frac{1}{a}(\zeta+\alpha a)_*^2}{=}e_*^{\frac{1}{a}\zeta_*^2}{*}\theta(\zeta,{*}{+}a), \quad \theta(\zeta,{*}{+}a){=}\sum_n e_*^{2ni\zeta-n^2a}$$

のように表示される。 こうして、θ-関数は次第に矮小化物理学としての側面を見せてくれるのである。

2 Ordering problems

表示をデフォルメすることにより、対象の本質が見えるだろうといって始まって、たしかに theta 関数のようなものが見えてきた。しかし表示のデフォルメにはもっと別の意味がある。

一般に非可換の代数では、元の表示が一意的でなから、計算公式を具体的に書くのは難しい。これは量子論ではしばしば「順序づけ問題」と呼ばれていたので、これを Weyl 代数 $W_\hbar(2m)$ で説明しておこう。

Weyl 代数 $W_\hbar(2m)$ とは生成元 $(u^1,u^2,\cdots,u^m,v_1,v_2,\cdots,v_m)$ に基本交換関係を

$$[u^i,u^j]=0=[v_i,v_j], \quad [u^i,v_j]=i\hbar\delta^i_j, \quad ([a,b]{=}a{*}b{-}b{*}a, \quad \hbar{\in}\mathbb{R}_+$$

を入れて作った代数である。 Weyl 代数は微積分の演算子が作る代数を表しているので, 量子論で広く使われている代数である.

$W_\hbar(2m)$ の元は

$$v_a{*}u^b{+}u^i{*}v_j{*}u^k{+}v_i{*}v_j{*}u^l$$

といったように表されるが, 非可換なので、元の表示が一意的でなく、交換関係を経由して様々に表示される. 元の表示が一意的でないと、例えば位相線形空間として考えようとしたりするとたちまち困ることになる。

2.1 伝統的表示法

だから、何か基準を設けて元の表示を一意的にして計算公式を具体的に書こうとするのは当然だが、このやりかたが無数にある。一意的表示法は古典的 observables (*c-number* 関数) に量子論的 observables (*q-number* 関数) を対応させるやりかたをあたえれるから、初期の量子論では どの表示が良いかをめぐって論争もあったようである。

物理の方で昔から使われてきたのは 次のような表示法である.

(a) 正規順序表示. これは交換関係を利用して各項に於て $\boldsymbol{u}$ が左側にくるように書くやりかた.

(b) 反正規順序表示. これは各項に於て $\boldsymbol{u}$ が右側にくるように書くやりかた.

(c) Weyl 順序表示. これは各項が完全対称化されてかかれるように書くやりかた.

(d) Wick 順序表示. これは $z_i{=}u^i{+}\sqrt{-1}v_i$, $\bar{z}_i{=}u^i{-}\sqrt{-1}v_i$ と変数変換すると, $[z_i,\bar{z}_j]{=}2\hbar\delta_{ij}$, $[z_i,z_j]{=}0{=}[\bar{z}_i,\bar{z}_j]$, という交換関係になることを利用して, 各項に於て $\boldsymbol{z}$ が左側にくるように書くやりかた.

である。完全対称化とか、実際の積の公式がどうなるかといったことは次節で具体的公式を与えるからここでは問題にしない。それぞれ一長一短で、計算できる範囲や公式が微妙に食い違うし、同じ古典的 observable に様々な 量子論的 observable (作用素) をあたえて, その固有値などにも違いが出てしまうので, どちらが正しい量子化かという論争も起る。

これは、可換なものに非可換なものを対応原理だけで対応させようとしている結果だから、良く考えれば不毛な論争で、非可換の世界が先にあって、それが縮退して可換に見えているのだと思うほうが自然であろう.

2.2 変形論的見方

変形論的見方では、可能な表示を全部一斉に考えることでこの問題に答えようとする. そのために表示方法が確定している 普通の多項式の世界に普通とは違う非可換の積をあたえ、この代数が $W_\hbar(2m)$ と同形になるようなものを考えるのである.

まず、変数 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ を同列に扱うために v_i を u^{m+i} のように書いて

$$\boldsymbol{u}=(u^1,\cdots,u^m,u^{m+1},\cdots,u^{2m}).$$

とする。これを $1\times 2m$ 行列と見, ${}^t\boldsymbol{u}$ をその転置行列 (縦ベクトル) とする。$2m{\times}2m$-行列全体を $\mathfrak{M}(2m)$ とし、$2m{\times}2m$-対称行列全体を $\mathfrak{S}(2m)$, $2m{\times}2m$-歪対称行列全体を $\mathfrak{A}(2m)$ と書く。$\mathbb{C}[\boldsymbol{u}]$ を普通の多項式の全体とする.

任意の $K=(K^{ij})\in\mathfrak{S}_{\mathbb{C}}(2m)$ に対して、積 $*_{_K}$ を (1) 同様、次のような公式で与える:

$$f(\boldsymbol{u})*_{_K}g(\boldsymbol{u})=f\exp\{\frac{i\hbar}{2}(\sum\nolimits_{i,j=1}^{2m}\overleftarrow{\partial_{u^i}}\Gamma^{ij}\overrightarrow{\partial_{u^j}})\}g, \tag{21}$$

但し $\Gamma=(\Gamma^{ij})=(K^{ij}{+}J^{ij})$, $J=\begin{bmatrix}0 & -I_m\\ I_m & 0\end{bmatrix}$ である。

公式 (21) は Einstein ルールを使って次のように書いておくと便利なことが多い

$$f*_{K}g=\sum_{k}\frac{(i\hbar)^k}{k!2^k}\Gamma^{i_1j_1}\cdots\Gamma^{i_kj_k}\partial_{u^{i_1}}\cdots\partial_{u^{i_k}}f\ \partial_{u^{j_1}}\cdots\partial_{u^{j_k}}g. \tag{22}$$

積 (21) は $\forall f,g\in\mathbb{C}[\boldsymbol{u}]$ について定義でき, 結合律を満たす. ここまでは Γ は任意の $\mathfrak{M}(2m)$ の元でよい.

Γ の skew part が J なので, 生成元のところでは

$$u^i*_{K}u^j-u^j*_{K}u^i\ (=[u^i,u^j]_{*_K})=i\hbar J^{ij}, \tag{23}$$

となり Weyl 代数 $W_\hbar(2m)$ が得られていることが分かる。つまり、

Proposition 2 任意の $K\in\mathfrak{S}_{\mathbb{C}}(2m)$ に対して $(\mathbb{C}[\boldsymbol{u}],*_{K})$ は *Weyl* 代数 $W_\hbar(2m)$ と同形な代数になる。

可換積を使った公式で Weyl 代数の積をあたえたので, 得られるものは、もしかして Weyl 代数に何かもっと別の性質も混じってしまってないかと心配になるかもしれないが, Poincaré-Birkhoff-Witt の定理を考えればその心配はいらないことがわかる。

Proposition 2 は Weyl 代数 $W_\hbar$ の (多項式の世界での) 実現なのである。しかも、それと同時に元の一意的表示をもあたえるのである。

例えば $u^i*u^j*u^k$ を (21) 式で計算すれば 結果は $u^i*u^j*u^k$ を多項式で表示したものとなる。従って積公式 (21) は元の表示を与える。この意味でこれを *K-ordering* と呼ぶこともある。一般には K-表示と呼ぶ。

つまり、生成元が固定されているときには順序づけ問題とは Weyl 代数 $W_\hbar(2m)$ を与える積公式を多項式の世界で具体的に書くことにほかならない。

K をそれぞれ $K=K_0,-K_0,0$, 但し

$$(K_0,-K_0,0)=\left(\begin{bmatrix}0&I\\I&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-I\\-I&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\right),$$

のようにあたえると, 正規順序表示、 反正規順序表示、Weyl 順序表示となる。

積公式は具体的には次のようになる：

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{u})*_{0}g(\boldsymbol{u})&=f\exp\{\frac{\hbar i}{2}\overleftarrow{\partial_v}\wedge\overrightarrow{\partial_u}\}g, &&\text{(Moyal 積公式)}\\ f(\boldsymbol{u})*_{K_0}g(\boldsymbol{u})&=f\exp\{\hbar i\overleftarrow{\partial_v}\ \overrightarrow{\partial_u}\}g, &&\text{(ΨDO 積公式)}\\ f(\boldsymbol{u})*_{-K_0}g(\boldsymbol{u})&=f\exp\{-\hbar i\overleftarrow{\partial_u}\ \overrightarrow{\partial_v}\}g, &&(\bar{\Psi}\text{DO 積公式})\end{aligned} \tag{24}$$

但し $\overleftarrow{\partial_v}\wedge\overrightarrow{\partial_u}=\sum_i(\overleftarrow{\partial_{v^i}}\overrightarrow{\partial_{u^i}}-\overleftarrow{\partial_{u^i}}\overrightarrow{\partial_{v^i}})$ and $\overleftarrow{\partial_v}\ \overrightarrow{\partial_u}=\sum_i\overleftarrow{\partial_{v^i}}\ \overrightarrow{\partial_{u^i}}$ である。

この積公式を見ると Weyl 順序表示が最も対称性が高いことがわかる。これは Moyal 積公式が変換 $\boldsymbol{u}'=\boldsymbol{u}S+\boldsymbol{a}$, $S\in Sp_{\mathbb{C}}(m)$, $\boldsymbol{a}\in\mathbb{C}^{2m}$, で不変なことからわかる。i.e. $\forall S\in Sp_{\mathbb{C}}(m)$, $\forall\boldsymbol{a}\in\mathbb{C}^{2m}$ に対して

$$f(\boldsymbol{u}S+\boldsymbol{a})*_{0}g(\boldsymbol{u}S+\boldsymbol{a})=(f*_{0}g)(\boldsymbol{u}S+\boldsymbol{a}) \tag{25}$$

である。

これに対し正規順序表示は $GL_{\mathbb{C}}(m)$ の対称性しか持っていない。i.e. $\tilde{\boldsymbol{u}}=(u^1,\cdots,u^m)$, $\tilde{\boldsymbol{v}}=(v^1,\cdots,v^m)$, のように書いたとき、任意の $G\in GL_{\mathbb{C}}(m)$ に対し次が成立する:

$$f(\tilde{\boldsymbol{u}}G,\tilde{\boldsymbol{v}}G^{-1})*_{K_0}g(\tilde{\boldsymbol{u}}G,\tilde{\boldsymbol{v}}G^{-1})=(f*_{K_0}g)(\tilde{\boldsymbol{u}}G,\tilde{\boldsymbol{v}}G^{-1}).$$

2.3 Intertwiners

K-表示と K'-表示の間の intertwiner は具体的に次式で与えられる:

Proposition 3 任意の $K,K'\in\mathfrak{S}_{\mathbb{C}}(n)$ に対して *intertwiner*

$$I_K^{K'}(f)=\exp\Big(\frac{i\hbar}{4}\sum_{i,j}(K'^{ij}-K^{ij})\partial_{u_i}\partial_{u_j}\Big)f\ (=I_0^{K'}(I_0^{K})^{-1}(f)), \tag{26}$$

は代数の同型 $I_K^{K'}:(\mathbb{C}[\boldsymbol{u}];*_{\Lambda+K})\to(\mathbb{C}[\boldsymbol{u}];*_{\Lambda+K'})$ を与える。つまり, 次のような等式が成立する $f,g\in\mathbb{C}[\boldsymbol{u}]$:

$$I_K^{K'}(f*_K g)=I_K^{K'}(f)*_{K'}I_K^{K'}(g), \tag{27}$$

Intertwiners は $*$ 積の代数構造は変えないが、可換積による表示を変える。

$K\in\mathfrak{S}_{\mathbb{C}}(n)$ に於ける Λ 方向への無限小の intertwiner を次のように定義する:

$$dI_K(\Lambda)(f)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}I_K^{K+t\Lambda}(f)=\frac{i\hbar}{4}\sum_{i,j}\Lambda^{ij}\partial_{u_i}\partial_{u_j}f. \tag{28}$$

(27) 式を微分すると

$$dI_K(\Lambda)(f*_K g)=dI_K(\Lambda)(f)*_K g+f*_K dI_K(\Lambda)(g)+\frac{i\hbar}{4}\sum\nolimits_{i,j=1}^{n}\Lambda^{ij}\partial_{u^i}f*_K\partial_{u^j}g$$

となる。無限小の intertwiner $dI_K(\Lambda)$ は後で接続を定義するときに使われる。

積の公式の deformation は表示のしかたの deformation でもある。どの表示で表示するかによって物理的内容が変わってはおかしいから、物理はむしろ ordering free principle を原理としてはっきり採用すべきなのである。これは、古典微分幾何学が coordinate free principle を採用しているのと同列のことである。また ordering free principle は (言葉は少し違うが) Sternberg が言っている general covariance principle とほとんど同じものと思われる.

基本的原理

幾何学の対象が coordinate free であるべきなのと同様に幾何学/物理学 の対象は **ordering free** であるべきである。Ordering free の原理と連続追跡原理 (後述) は量子論の計算ではっきり意識されるべき二つの基本的原理である。

このように、ordering の問題は積公式の deformation の考えの中に含まれるのだが、deformation で考えると、事は単にどの順番で生成元を並べるかという問題にとどまらず, 基準 (単位系/生成系) の取り方の変形論まで含まれてくることが重要なのである。しかし、ordering free principle には一つの原理的問題がつきまとっている。それは生成元の非線形の変換をどこまで許している

かということが何も答えられていないということである。この辺がはっきりしない限り量子論的に重力場の理論は書きようがないのであるが、大体、2次式以下の指数関数による随伴表現による生成系の変更までが許されるように思う。**量子論はこの無限次元 Lie 群に属する Klein 幾何学になっている**と思われるのである。

3　2次式の指数関数

一気に多変数の2次式で指数関数を考えるのはかなり面倒なので、1変数、2変数あたりでまず考え、それから一般の場合に移行することにする。

表示の変形で考えると、例えば $\zeta *_\tau f(\zeta) = \zeta + \frac{\tau}{2} f'(\zeta)$ だから $\zeta *_\tau f(\zeta) = 0$ という式も $\tau \neq 0$ なら解 $f = ce^{-\frac{1}{\tau}\zeta^2}$ を持つ。このように多項式からすこしはずれた2次式の指数関数のあたりで少し妙なことがおこっている。

3.1　1変数2次式の指数関数

話をもとの1変数の場合に戻して、$e_*^{t\zeta_*^2}$ を考えよう。ただし $:\zeta_*^2:_\tau = \zeta^2 + \frac{1}{2}\tau$ としている。

解の形が予想できる場合には一意性を使って常微分方程式系にしてしまうとい手段があったから、これを使って $e_*^{t\zeta_*^2}$ を考えよう。これはそこで、微分方程式

$$\frac{d}{dt} f_t = \zeta_*^2 * f_t, \quad f_0 = 1.$$

を考える。一意性を考慮し $:f_t:_\tau = g(t)e^{h(t)\zeta^2}$ のような実解析解を探すと、$:\zeta_*^2:_\tau = \zeta^2 + \frac{\tau}{2}$ と積公式 (1) から上の方程式は $\forall \tau$ に対して次のような常微分方程式系に変わる。

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} h(t) = (1 + \tau h(t))^2, & h(0) = 0 \\ \dfrac{d}{dt} g(t) = \dfrac{1}{2}(\tau^2 h(t) + \tau) g(t), & g(0) = 1. \end{cases}$$

これを解いて次のような解が得られる

$$:e_*^{t\zeta_*^2}:_\tau = \frac{1}{\sqrt{1-\tau t}} e^{\frac{t}{1-\tau t}\zeta^2}, \text{ for } \forall \tau, \ t\tau \neq 1. \tag{29}$$

すぐ気づくのは $\sqrt{\ }$ のせいで右辺はどうしても2価関数であり、$e_*^{t\zeta_*^2}$ は $\pm$ の不定性のある2価の元として扱わねばならないということである。理由は $\tau(\theta) = e^{i\theta}(\tau - \frac{1}{t}) + \frac{1}{t}$ と置いて

$$:e_*^{t\zeta_*^2}:_{\tau(\theta)} = \frac{1}{\sqrt{e^{i\theta}(1-\tau t)}} \ e^{\frac{t}{e^{i\theta}(1-\tau t)}\zeta^2}$$

とし、θ を 0 から 2π まで動かすと $:e_*^{t\zeta_*^2}:_\tau = \pm :e_*^{t\zeta_*^2}:_\tau.$ となることから分かる。

$:e_*^{t\zeta_*^2}:_\tau = I_0^\tau e^{t\zeta^2}$ となるのは明白であろう。したがって、$\tau=0$ での指数法則 $e^{s\zeta^2}e^{t\zeta^2} = e^{(s+t)\zeta^2}$, $e_*^{a+s\zeta}e^{t\zeta^2} = e^{a+s\zeta+t\zeta^2}$ より、2価関数のままの指数法則

$$e_*^{s\zeta_*^2} * e_*^{t\zeta_*^2} = e_*^{(s+t)\zeta_*^2}, \quad e_*^{a+s\zeta} * e_*^{t\zeta_*^2} = e_*^{a+s\zeta+t\zeta_*^2} \tag{30}$$

が得られる。これらは, 微分方程式の実解析解の一意性からも得られる。

§1 での結果と合わせると

$$:e_*^{t\zeta_*^2+2s\zeta+a}:_\tau=\frac{e^{s^2\tau}}{\sqrt{1-t\tau}}e^{t\zeta^2+2s\zeta+a} \tag{31}$$

3.2　2次の指数関数に働く intertwiners

Intertwiner $I_\tau^{\tau'}=e^{\frac{1}{4}(\tau'-\tau)\partial_\zeta^2}$ があって、上で多項式に対し定義したが、定義は指数関数まで自然に拡張され $I_\tau^{\tau'}(e^{s\zeta})=e^{s\zeta+\frac{1}{4}(\tau'-\tau)s^2}$ であった。一般の f に対しては $I_\tau^{\tau'}(f)$ は発散してしまうことが多いが、２次の指数関数に対しては計算でき

$$I_\tau^{\tau'}(e^{s\zeta^2})=\frac{1}{\sqrt{1-(\tau'-\tau)s}}e^{\frac{s}{1-s(\tau'-\tau)}\zeta^2} \tag{32}$$

となる。この公式を導くには発展方程式 $\partial_t f_t=\partial_\zeta^2 f_t, f_0=ce^{s\zeta^2}$ を解けば良いのだが、まず次のことに注意する:

Lemma 3 線型発展方程式の実解析的解は初期条件に関し (存在すれば) 一意的である.

証明は二つあったとして差を考え $t=0$ の所での高階微分がすべて消えることを見れば良い。これを考慮し $f_t=g(t)e^{h(t)\zeta^2}$ とおけば、解くべきものは次のような常微分方程式系となる:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}h(t)=4h(t)^2, & h(0)=s \\ \dfrac{d}{dt}g(t)=2g(t)h(t), & g(0)=c. \end{cases} \tag{33}$$

これを解いて次のような解が得られる

$$g(t)e^{h(t)\zeta^2}=\frac{c}{\sqrt{1-4ts}}e^{\frac{s}{1-4ts}\zeta^2}, \tag{34}$$

が得られ、$t=\frac{1}{4}(\tau'-\tau)$ と置いて (32) 式となる。すぐ気づくのは $\sqrt{\ }$ のせいで右辺はどうしても２価関数であり、$I_0^\tau e^{s\zeta^2}$ は τ に関し $\pm$ の不定性の付いた２価の元として扱わなければならないということである. Lemma 3 の一意性と矛盾するように思うかもしれないが、こちらは $\frac{1}{\sqrt{1-4ts}}$ が一価正則になるようなリーマン面上での一意性である。

多価関数などは関数論によくでてくるものでことさら騒ぎたてる必要もないだろうが、この場合は一つの元の「同じ表示」が二つ出てきているので解釈に苦しむ。この場合は τ の動く範囲を制限しておけば防げるが、いつでもこのやりかたが通用するかどうかはわからない。

面白いのは、(33) は (34) 以外に次のように書かれる解 (特異解) も持っているということである:

$$g(t)e^{h(t)\zeta^2}=\frac{c\sqrt{s^{-1}}}{\sqrt{s^{-1}-4t}}e^{\frac{1}{s^{-1}-4t}\zeta^2}. \tag{35}$$

$t=\frac{1}{4}(\tau'-\tau)$ と置けば

$$I_\tau^{\tau'}(ce^{s\zeta^2})=\frac{c\sqrt{s^{-1}}}{\sqrt{s^{-1}-(\tau'-\tau)}}e^{\frac{1}{s^{-1}-(\tau'-\tau)}\zeta^2} \tag{36}$$

である。これは $s{\neq}0$ の時には同じ式を表しているのだが、(35) のような表示の時には $s^{-1}=0$ も意味を持つ。さらに (36) 式で $c\sqrt{s^{-1}}{=}1$ しておけば $I_{\tau}^{\tau'}(\frac{1}{\sqrt{s^{-1}-\tau}}e^{\frac{1}{s^{-1}-\tau}\zeta^2}){=}\frac{1}{\sqrt{s^{-1}-\tau')}}e^{\frac{1}{s^{-1}-\tau'}\zeta^2}$ となる。ここで $s^{-1}{=}0$ とすると、$\frac{1}{\sqrt{-\tau}}e^{-\frac{1}{\tau}\zeta^2}$ は $\tau{=}0$(母屋の表示) では意味が無いが、それ以外の所では互いに intertwine されるものだということが分かる。さらに積公式より $\zeta*_{\tau}\frac{1}{\sqrt{-\tau}}e^{-\frac{1}{\tau}\zeta^2}{=}0$ である。

3.3 Hermite 多項式、Laguerre 多項式

Deform された関数は theta 関数以外にも色々な所に現れる。Hermite 多項式, Laguerre 多項式には次のような母関数表示が知られている：

$$e^{\sqrt{2}\,tx-\frac{1}{2}t^2}{=}\sum_{n\geq 0}H_n(x)\frac{t^n}{n!},\quad \frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}{=}(-\sqrt{2})^nH_n(x)e^{-x^2}. \tag{37}$$

$$\frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}}e^{-\frac{t}{1-t}x}{=}\sum_{n\geq 0}L_n^{(\alpha)}(x)t^n,\ (|t|<1),\quad \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+\alpha}){=}L_n^{(\alpha)}(x)n!e^{-x}x^{\alpha}. \tag{38}$$

一見してこれらが $*$-指数関数に関係することが読み取れる。

さらに Legendre 多項式、Bessel 関数には次のような母関数表示が知られている：

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\hbar z+\hbar^2}}{=}\begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty}\hbar^nP_n(z) & (|\hbar|{<}\min|z{\pm}\sqrt{z^2-1}|\\ \sum_{n=0}^{\infty}\hbar^{-n-1}P_n(z) & (|\hbar|{>}\max|z{\pm}\sqrt{z^2-1}|\end{cases} \tag{39}$$

$$\exp(iz\cos\theta){=}\sum_{n=-\infty}^{\infty}i^nJ_n(z)e^{in\theta} \tag{40}$$

これも Hermite 多項式、Laguerre 多項式ほどではないだろうが, $*$-積の匂いがするであろう. 実はこちらは Weyl 代数 $W_{\hbar}(2)$ での指数関数 e_*^{tuv} に関係する.

3.3.1 Hermite 多項式

$e^{\sqrt{2}\,t\zeta-\frac{1}{2}t^2}{=}{:}e_*^{\sqrt{2}\,t\zeta}{:}_{-1}$ だから (37) 式は ${:}e_*^{\sqrt{2}\,t\zeta}{:}_{-1}$ の Taylor 展開式である。$e_*^{ta\zeta}{=}\sum\frac{t^n}{n!}(a\zeta)_*^n$ に注意して

$$e_*^{\sqrt{2}\,t\zeta}{=}\sum_{n\geq 0}(\sqrt{2}\,\zeta)_*^n\frac{t^n}{n!}$$

と置けば, $H_n^*(\zeta){=}{:}(\sqrt{2}\,\zeta)_*^n{:}_{-1}$ である. そこで $*$-Hermite 多項式 $H_n(\zeta,*)$ を

$$e_*^{\sqrt{2}\,t\zeta}{=}\sum_{n\geq 0}H_n(\zeta,*)\frac{t^n}{n!} \tag{41}$$

で定義する。これの $\tau=-1$ での表示が従来のもので、$H_n(\zeta,-1){=}{:}(\sqrt{2}\,\zeta)_*^n{:}_{-1}{=}H_n(\zeta)$ となる。

Taylor 展開の係数だから $H_n(\zeta,*){=}\frac{d^n}{dt^n}e_*^{t\sqrt{2}\zeta}\Big|_{t=0}$ であるが、(37) の第２式は変数変換すると

$$\frac{d^n}{dx^n}e^{-\frac{1}{2}x^2}{=}(-1)^nH(\zeta/\sqrt{2})e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

とも書かれるので, こちらの方が $e^{\sqrt{2}\,t\zeta-\frac{1}{2}t^2}=:e_*^{\sqrt{2}\,t\zeta}:_{-1}$ との関係がわかりやすい。

$$\sqrt{2}\,t\zeta-\frac{1}{2}t^2=-\frac{1}{2}(t-\sqrt{2}\zeta)^2+\zeta^2$$

と平方完成すれば

$$\frac{d^n}{dt^n}:e_*^{\sqrt{2}\,t\zeta}:_{-1}\Big|_{t=0}=\frac{d^n}{dt^n}e^{-\frac{1}{2}(t-\sqrt{2}\zeta)^2+\zeta^2}\Big|_{t=0}=(\frac{d^n}{dx^n}e^{-\frac{1}{2}x^2})e^{\frac{1}{2}x^2})\Big|_{x=\sqrt{2}\zeta}$$

と計算される.

また Hermite 多項式は微分方程式 $y''-2xy'+2ny=0$ の解であるが、この微分方程式は次のように考えると簡単に求められる。(41) 式より $H_n(\zeta,*)$ は $e_*^{\sqrt{2}\,t\zeta}$ を冪展開したときの t^n の係数だが、一般に $f(tX)=\sum_n a_n(tX)^n$ のように tX の関数として書かれているものの t^n の係数 a_nX^n の特徴は X で形式的に微分して

$$X\frac{d}{dX}(tX)^n=n(tX)^n$$

ということだから、$f_*(\zeta_*)=\sum a_n\zeta_*^n$ と $*$-積形でかかれている関数だと思って、$f_*'(\zeta)$ を形式的に処理すれば $y''-2xy'+2ny=0$ は $2\zeta*f_*'(\zeta_*)=2nf_*(\zeta_*)$ の $\tau=-1$ 表示であることがわかる。

一般の τ で $2\zeta*f_*'(\zeta_*)=2nf_*(\zeta_*)$ を表示するには $:f_*(\zeta_*):_\tau=g(\zeta,\tau)$, $:f_*'(\zeta_*):_\tau=h(\zeta,\tau)$ とすると、$\partial_\zeta g=h$ となることに注意すると

$$2\zeta*_\tau\partial_\zeta f(\zeta,\tau)=2nf(\zeta,\tau),\quad i.e. 2\zeta\partial_\zeta f(\zeta,\tau)+\tau\partial_\zeta^2 f(\zeta,\tau)=2nf(\zeta,\tau)\tag{42}$$

である.

3.3.2 Laguerre 多項式

(29) 式, 及び積公式より

$$:e_*^{-t\zeta_*^2}:_{-1}=\frac{1}{(1-t)^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{t}{1-t}\zeta^2},\quad :\zeta*e_*^{-t\zeta_*^2}:_{-1}=\frac{\zeta}{(1-t)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{t}{1-t}\zeta^2}$$

であることが分かる. Laguerre 多項式の母関数表示 (38) も Taylor 展開だが $x=\zeta_*^2$, $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\alpha=\frac{1}{2}$ の場合が上の右辺に現れているから、この場合にこれを使って書くと

$$:\zeta_*^\ell*e_*^{-t\zeta_*^2}:_{-1}=\zeta^\ell\sum_{n\geq 0}L_n^{(\ell-\frac{1}{2})}(\zeta^2)t^n,\quad \ell=0,1$$

となって $\tau=-1$ での表示が Laguerre 多項式なっていることがわかる。

$$L_n^{(-\frac{1}{2})}(\zeta_*^2,*)=\frac{(-1)^n}{n!}\zeta_*^{2n},\quad L_n^{(\frac{1}{2})}(\zeta_*^2,*)=\frac{(-1)^n}{n!}\zeta_*^{2n}$$

だから, Hermite 多項式との関係は

$$H_{2n}(\zeta,*)=(-2)^n n!L_n^{(-\frac{1}{2})}(\zeta_*^2,*),\quad H_{2n+1}(\zeta,*)=(-2)^n n!\sqrt{2}\zeta*L_n^{(\frac{1}{2})}(\zeta_*^2,*),$$

である。

一般の場合は

$$:e_*^{(\frac{1}{2}-\alpha)\log(1-t)-t\zeta_*^2}:_{-1}=(1-t)^{\frac{1}{2}-\alpha}:e_*^{-t\zeta_*^2}:_{-1}=\sum_n L_n^{(\alpha)}(\zeta^2)t^n$$

である。

3.4　1変数指数関数の積分

指数関数はこれまで述べたこと以外にもっと変なことを起こす。$e_*^{t\zeta}$, $e_*^{t\zeta_*^2}$ の τ-表示が分かったから、これを使ってこれの積分を考えてみよう。

θ-関数では自然境界があることによって一価性が保たれているのだが、θ-関数の定義で使っている離散和を積分にかえてしまうと、かなり奇妙なことになるのである。

3.4.1　1変数1次式の指数関数の積分

前節では $\sum_n e_*^{2ni\zeta}$ のような無限和で考えたが、今度は積分

$$-\int_0^{\infty} e_*^{it\zeta}dt, \quad \int_{-\infty}^{0} e_*^{it\zeta}dt \tag{43}$$

を考える。$:e_*^{it\zeta}:_\tau = e^{it\zeta-\frac{1}{4}t^2\tau}$ だから $\mathrm{Re}\,\tau>0$ ならばどちらの積分も絶対収束する。

まず $*_\tau$-積の定義から次のことにが容易に分かる。

Lemma 4 $f(\zeta)$ を多項式、$Hol(\mathbb{C})$ を整関数全体にコンパクト-開位相を入れた位相線型空間とすると $f(\zeta)*_\tau$, $*_\tau f(\zeta)$ はどちらも $Hol(\mathbb{C})$ から $Hol(\mathbb{C})$ への連続写像である。

これを使うと (43) の積分はどちらも $*$-積に関する ζ の逆元を与えることが分かる。

$*$-積の世界では指数関数がデフォルメされている為に指数関数を使う代数計算が大きくデフォルメされるのである。

$$\zeta*\int_{-\infty}^{0} e_*^{t\zeta}dt=\zeta*\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{0} e_*^{t\zeta}dt=\lim_{T\to\infty}\zeta*\int_{-T}^{0} e_*^{t\zeta}dt=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{0}\zeta*e_*^{t\zeta}dt$$
$$=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{0}\frac{d}{dt}e_*^{t\zeta}dt=\lim_{T\to\infty}(1-e_*^{-T\zeta})=1.$$

これは§1.3 で述べたのと同様に結合律を壊してしまう現象である。(43) に出てきた二つの逆元の計算は次のように一般化される。

Proposition 4 $\mathrm{Re}\,\tau<0$ の時、任意の $a\in\mathbb{C}$ に対し $-\int_0^{\infty} e_*^{t(\zeta+a)}dt$, $\int_{-\infty}^0 e_*^{t(\zeta+a)}dt$ の τ-表示は絶対収束して、ともに $\zeta+a$ の ($*$-積に関する) 逆元となる。どちらも a に関して整関数である。

これらの逆元達にはどんな関係があるのだろうか? 特に

$$-\int_0^{\infty} e_*^{t(1-\zeta)}dt, \quad \int_{-\infty}^{0} e_*^{t(1-\zeta)}dt$$

達の関係は何であろうか? これらはいずれも $1-\zeta$ の逆元を与えるが、$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\zeta_*^k$ とはどんな関係だろうか? $1-\zeta_*^n=(1+\zeta+\zeta_*^2+\cdots+\zeta_*^{n-1})*(1-\zeta)$ だから、両辺に $\int_{-\infty}^{0} e_*^{t(1-\zeta)}dt$ を $*$-積し、結合律を使えば、

$$(1-\zeta_*^n)*\int_{-\infty}^{0} e_*^{t(1-\zeta)}dt = 1+\zeta+\zeta_*^2+\cdots+\zeta_*^{n-1}$$

は容易である. しかし一般の τ-表示では $\lim_{n\to\infty}\zeta_*^n * \int_{-\infty}^0 e_*^{t(1-\zeta)}dt$ 等は収束しない。$\sum_n \zeta_*^n$ は表示に依存する収束であるが、項別に τ-表示を作って総和したものも収束しない。しかしいずれも

$$:\int_{-\infty}^0 e_*^{t(1-\zeta)}dt:_\tau=\int_{-\infty}^0 e^{t+\frac{t^2}{4}\tau-t\zeta}dt=\sum_k \frac{1}{k!}(-\zeta)^k\int_{-\infty}^0 t^k e^{t+\frac{t^2}{4}\tau}dt=\sum_k \frac{1}{k!}\zeta^k\int_0^\infty t^k e^{-t+\frac{t^2}{4}\tau}dt$$

$$:-\int_0^\infty e_*^{t(1-\zeta)}dt:_\tau=-\int_0^\infty e^{t+\frac{t^2}{4}\tau-t\zeta}dt=\sum_k \frac{(-1)^{k+1}}{k!}\zeta^k\int_0^\infty t^k e^{t+\frac{t^2}{4}\tau}dt$$

のように冪展開される。展開係数は ζ^k の所でそれぞれ

$$\frac{1}{k!}\int_0^\infty t^k e^{-t+\frac{t^2}{4}\tau}dt,\quad -\frac{1}{k!}\int_0^\infty (-t)^k e^{t+\frac{t^2}{4}\tau}dt=-\frac{1}{k!}\int_{-\infty}^0 t^k e^{-t+\frac{t^2}{4}\tau}dt$$

であり、差は $\frac{1}{k!}\int_{-\infty}^\infty t^k e^{-t+\frac{t^2}{4}\tau}dt$ となる。逆元というものが一つであると考えると一つの逆元の冪展開の仕方がいくつもあることになり冪展開の一意性が崩れているように見えるのだが、逆元というものが無数にあるのだから結合律は乱されるが不思議なことではない。

3.4.2 逆元の表示の多価性, $\delta_*(\zeta)$ が 2 価の元に見える

$(a+\zeta)_{*+}^{-1}+C\delta_*(\frac{1}{i}(a+\zeta))$ は皆 $a+\zeta$ の逆元である。逆元は無数にある。しかし、これらのものは全部同格なのであろうか。$C=0$ の元と $\neq 0$ の元とは区別が付くのだろうか？しかも

$$\frac{1}{a+\zeta}=\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}(a+\zeta)}$$

というあたりまえの等式を考えると $\mathrm{Re}\,\tau<0$ でなくても逆元の τ-表示ができそうに見える。まず次の事に注意する。$\tau\neq 0$ のとき θ をうまく選んで $e^{2i\theta}\tau<0$ とすると

$$-e^{i\theta}\int_0^\infty e_*^{te^{i\theta}(a+\zeta)}dt,\quad e^{i\theta}\int_{-\infty}^0 e_*^{te^{i\theta}(a+\zeta)}dt$$

の τ-表示

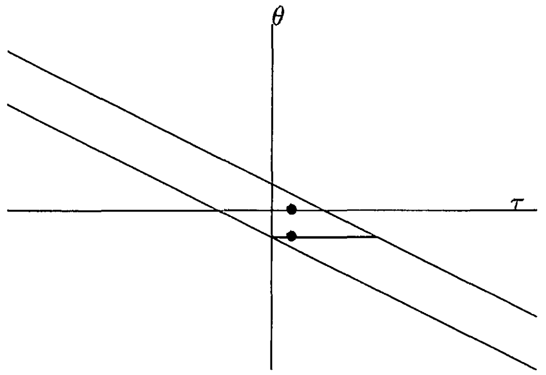
$$:e^{i\theta}\int_{-\infty}^0 e_*^{te^{i\theta}(a+\zeta)}dt:_\tau=e^{i\theta}\int_{-\infty}^0 e^{te^{i\theta}(a+\zeta)+\frac{1}{4}t^2e^{2i\theta}\tau}dt \tag{44}$$

等は絶対収束し、共に $a+\zeta$ の逆元である。しかも、θ で微分して部分積分を使えばこれらが $\mathrm{Re}\,e^{2i\theta}\tau<0$ を保っているかぎり θ に依存しないことがわかる。$e^{i\theta}$ は積分を収束させる役目しかおっていないのである。

すると θ と τ を $\mathrm{Re}\,e^{2i\theta}\tau<0$ を保ちながら同時に動かして考えることができる。例えば色々な τ に対して θ は次のテーブルのように固定する:

(♣)

τ	$-\frac{\pi}{2}<\tau<\frac{\pi}{2}$	$0<\tau<\pi$	$\frac{\pi}{2}<\tau<\frac{3\pi}{2}$	$\pi<\tau<2\pi$	$\frac{3\pi}{2}<\tau<\frac{5\pi}{2}$
θ	0	$-\frac{1}{4}\pi$	$-\frac{1}{2}\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\pi$



そこで積分 (44) を考えてみると、

- τ を動かすのは表示を変更しているだけ、
- θ を動かしても積分は何も変わらない

ということがわかる。τ を 0 から 2π まで追跡すればそれに応じて θ は変わるが θ は 0 から π まで変わるだけである。$\theta{=}\pi$ では (44) は

$$-\int_{-\infty}^{0} e^{-t(a+\zeta)+\frac{1}{4}t^2\tau}dt = -\int_{0}^{\infty} e^{t(a+\zeta)+\frac{1}{4}t^2\tau}dt$$

である。つまり一つの逆元の表示を追跡していくと、いつのまにかもう一つの逆元になってしまうというメービウスの帯的モノドロミー現象である。

表示の多価性は指数関数 $e_*^{a\zeta_*^2}$ でも見られたが、これは $\pm$ の多価性であったのに対し、この多価性は二つのものが入れ換わるという現象である。

とりあえず、記号を簡単にして

$$(z+\zeta)^{-1}_{*+} = e^{i\theta}\int_{-\infty}^{0} e_*^{te^{i\theta}(z+\zeta)}dt,\quad (z+\zeta)^{-1}_{*-} = -e^{i\theta}\int_{0}^{\infty} e_*^{te^{i\theta}(z+\zeta)}dt, \tag{45}$$

と書いておくと、これらは z に関して整関数 (複素全平面で正則) である。すると Cauchy の積分定理から任意の閉曲線に沿う一周積分 $\int_C (z+\zeta)^{-1}_{*+}$ が 0 となるのだが、被積分関数は $z{=}\infty$ が真正特異点なので注意しなければならない。

ζ を作用素のように思うとスペクトルが無い、あるいは ∞ と言っているように見えるのだが、上の 2 価性を使って差を考えれば $(z+\zeta)*\big((z+\zeta)^{-1}_{*+}-(z+\zeta)^{-1}_{*-}\big){=}0$ であるから任意の z がスペクトルになっているようにも見える。作用素解析的感覚を持ち込み過ぎるのは危険なのである。

この二つの逆元の差は $e^{i\theta}\int_{-\infty}^{\infty} e_*^{te^{i\theta}(a+\zeta)}dt$ であるが、これの τ-表示は θ に無関係に

$$:e^{i\theta}\int_{-\infty}^{\infty} e_*^{te^{i\theta}(a+\zeta)}dt:_\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\tau}}\, e^{-\frac{1}{\tau}(a+\zeta)^2} \tag{46}$$

となり、多価性は $\pm$ の形である。しかし $\tau{=}0$ は表示の特異点となる。このことから、$(z+\zeta)^{-1}_*$ を $\big((z+\zeta)^{-1}_{*+}, -(z+\zeta)^{-1}_{*-}\big)$ のように 2 成分ベクトルとして扱うことはできないことが分かる。

$\delta_*(a+\zeta){=}\int_{-\infty}^{\infty} e_*^{it(a+\zeta)}dt$ と定義する。この定義では $\mathrm{Re}\,\tau{>}0$ に対して、$:\delta_*(a+\zeta):_\tau$ は整関数である。しかし、$\mathrm{Re}\, e^{2i\theta}\tau{>}0$ であれば

$$\delta_*(a+\zeta){=}e^{i\theta}\int_{-\infty}^{\infty} e_*^{ie^{i\theta}t(a+\zeta)}dt$$

である。したがって、$\mathrm{Re}\,\tau{>}0$ であれば、$:\delta_*(a+\zeta):_{e^{-2i\theta}\tau}$ 表示も計算できる。これより、$\delta_*(a+\zeta)$ は $\forall\tau{\neq}0$ で表示されるが、表示を 1 周させると符号が逆転する 2 価関数である。$:\delta_*(a+\zeta):_0{=}\delta(a+\zeta)$ であり、$\tau{=}0$ では普通の δ 関数の表示になる。これも $\pm$ の定まらない 2 価関数と見るべきだということになる。

そうすると $\frac{1}{z+\zeta}$ と書いたとき $e_*^{s\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-izs}}{iz+\zeta}d(iz)$ が成立しているか気になるであろう。実はこれは成立していて

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{i}e^{-izs}\int_{-\infty}^{0}e_*^{t(\zeta+iz)}dtdz=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{i}\int_{-\infty}^{0}e^{iz(t-s)}e_*^{t\zeta}dtdz=2\pi i\int_{-\infty}^{0}\delta(t-s)e_*^{t\zeta}dt=2\pi ie_*^{s\zeta}. \quad (47)$$

これはもう一方の逆元を用いても同じである。

次のことは容易に示せる：

Lemma 5 任意の $f\in Hol(\mathbb{C})$ に対し

$$e_*^{\tau\zeta}(e_*^{s\zeta}*f)=e_*^{(\tau+s)\zeta}*f,\quad (\alpha+\zeta)*((\alpha+\zeta)_{*\pm}^{-1}*f)=f$$

これらは後で使う結合律である。

$(\alpha+\zeta)_{*\pm}^{-1}$ は多価性があったわけだが $(\alpha+\zeta)_{*+}^{-2}$ はどうであろうか？ $(a+\zeta)_{*+}^{-2}=\int_{-\infty}^{0}te_*^{t(a+\zeta)}dt$ を τ-表示として

$$:e^{i\theta}\int_{-\infty}^{0}e^{i\theta}te_*^{te^{i\theta}(a+\zeta)}dt:_\tau=e^{2i\theta}\int_{-\infty}^{0}te^{te^{i\theta}(a+\zeta)+\frac{1}{4}t^2e^{2i\theta}\tau}dt \quad (48)$$

$e^{2i\theta}\tau$ を連動させるのだが τ を一周させたとき $e^{i\theta}$ は半周 -1 だから、積分は

$$\int_{-\infty}^{0}te^{-t(a+\zeta)+\frac{1}{4}t^2\tau}dt$$

となる。これは $(a+\zeta)_{*-}^{-2}$ である。多価性があるといっても符号による多価性ではないので、２乗したから消えるといったような多価性とは異なる。

3.4.3 総和と積分の違い

総和 (離散和) と積分の違いであるが、積分 $\int_{-\infty}^{0}e_*^{t\zeta}dt$ と総和 $\sum_{n=0}^{\infty}e_*^{n\zeta}$ の違いは次の対数微分 $(\frac{\partial}{\partial\beta}\log)f(\beta)=f'(\beta)*f(\beta)^{-1}$ の計算において顕著に現れる：

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{\partial}{\partial\beta}\log)\int_{-\infty}^{0}e_*^{t\beta k\zeta}dt,\qquad \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{\partial}{\partial\beta}\log)\sum_{n=1}^{\infty}e_*^{n\beta k\zeta}. \quad (49)$$

部分積分で

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\int_{-\infty}^{0}e_*^{t\beta k\zeta}dt=\beta^{-1}\int_{-\infty}^{0}t(k\beta\zeta)*e_*^{tk\beta\zeta}dt=-\beta^{-1}\int_{-\infty}^{0}e_*^{t\beta k\zeta}dt,$$

だから、これを使うと (49) の第一のものは、$\sum_{k=1}^{\infty}\beta^{-1}$ となるから発散は避けようがない。これに対して第２のものは簡単に証明できる等式

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\sum_{n=0}^{\infty}e_*^{n\beta k\zeta}=k\zeta*\sum_{n=0}^{\infty}ne_*^{n\beta k\zeta}=k\zeta*(\sum_{n=0}^{\infty}e_*^{n\beta k\zeta})*(\sum_{n=1}^{\infty}e_*^{n\beta k\zeta}),$$

を使うと $\sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{n=1}^{\infty}e_*^{n\beta ka})*k\zeta$ となる。これは次の Lemma で分かるように、Re $\tau<0$ の範囲の τ-表示は絶対収束する。

Lemma 6 $\mathrm{Re}\,\tau<0$ の範囲で $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} ke_*^{n\beta k\zeta}$ の τ-表示は絶対収束する。

Proof τ-表示すると $:e_*^{n\beta k\zeta}:_\tau=e^{nk\beta\zeta+\frac{1}{4}(nk\beta)^2\tau}$ だから、平方完成し

$$nk\beta\zeta+\frac{1}{4}(nk\beta)^2\tau=\frac{\tau}{4}(\beta nk+\frac{2}{\tau}\zeta)^2-\frac{1}{\tau}\zeta^2$$

だから $\mathrm{Re}(\tau\beta^2)<0$ を仮定して $\sum_{k,n=1}^{\infty} ke^{\frac{\tau}{4}(\beta nk+\frac{2}{\tau}\zeta)^2}$ の収束性を示せば良い。これらはζの動く範囲を任意に固定したコンパクト集合として考えれば、任意の $K>0$ に対し $\sum_{k,n=1}^{\infty} ke^{\frac{\tau}{4}\beta^2(nk+K)^2}$ の絶対収束性が分かれば良い。$n,k{\geq}1$ では $(nk+K)^2{\geq}(n+1)^2+(k+1)^2+K$ だから

$$\sum_{k,n=1}^{\infty} ke^{\frac{1}{4}\beta^2\tau((n+1)^2+(k+1)^2+K)}=e^{\frac{1}{4}\beta^2K}\sum_{n=1}^{\infty}e^{\frac{1}{4}\beta^2\tau(n+1)^2}\sum_{k=1}^{\infty}ke^{\frac{1}{4}\beta^2\tau(k+1)^2}$$

であるが、これの収束性は明らかであろう。 □

この場合第２の総和は自然数で取る必要もなく、単に離散的な所で取るだけで良い。離散集合のすきまの部分から有限量が出てくるのに対し、連続和 (積分) ではすきまが埋まっているので発散するようにも思える。対数微分は定義から分かるようにその無限小部分が全体の中に占める割合をだすときに使われるものだから、比率で物を考えているときには常に顔を出す。上の離散和は量子論において黒体発光の発散の問題を解決するのに使われたものである。

3.4.4 １変数２次式の指数関数の積分

(29) 式より

$$:e_*^{t\zeta_*^2}:_\tau=\frac{1}{\sqrt{1-\tau t}}\,e^{\frac{t}{1-\tau t}\zeta^2},\ \text{for}\ \forall\tau,\ t\tau\neq 1.$$

であるから、$\int_{\mathbb{R}} e_*^{t\zeta_*^2}$ のようなものは考えにくいが $a{\neq}0$ のとき

$$e^{i\theta}\int_0^{\infty} e_*^{-e^{i\theta}t(a+\zeta_*^2)}dt,\quad e^{i\theta}a>0$$

はいつも $e^{i\theta}a>0$ となるように $e^{i\theta}$ を選べば、τ-表示は

$$e^{i\theta}\int_0^{\infty}\frac{e^{-e^{i\theta}at}}{\sqrt{1-e^{i\theta}t\tau}}e^{\frac{e^{i\theta}t}{1-e^{i\theta}t\tau}\zeta^2}dt$$

だから収束するようにできる．しかもこれは収束しているかぎり θ に依存しない。実際 θ で微分して部分積分を使うと

$$ie^{i\theta}\int_0^{\infty} e_*^{-e^{i\theta}t(a+\zeta_*^2)}dt+e^{i\theta}\int_0^{\infty} it\frac{d}{dt}e_*^{-e^{i\theta}t(a+\zeta_*^2)}dt=\Big[ite_*^{-e^{i\theta}t(a+\zeta_*^2)}\Big]_0^{\infty}=0.$$

これは $a+\zeta_*^2$ の逆元について $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}(a+\zeta_*^2)}=\frac{1}{a+\zeta_*^2}$ ということを確かめただけのものである．

したがって，$a>0$ を $e^{-i\theta}a$ のように回転させ、それに応じて $e^{i\theta}$ を選んで上の積分を考えれば積分の τ-表示で

$$:\frac{e^{i\theta}}{a+e^{i\theta}\zeta_*^2}:_\tau=e^{i\theta}\int_0^{\infty}\frac{e^{-at}}{\sqrt{1-e^{i\theta}t\tau}}e^{\frac{e^{i\theta}t}{1-e^{i\theta}t\tau}\zeta^2}dt$$

という式を得る．そこで θ を $0\sim 2\pi$ に動かしていくと，$e^{i\theta}\tau{\in}\mathbb{R}_+$ となる所で積分路は分岐特異点を通過するので、ここで $\sqrt{1-\tau t}$ の sheet の乗り換えがおこると同時に $2\pi i\times$ 留数 だけの値の飛が起こる．

Lemma 7 積分値の *jump* は $2\pi i e^{-ae^{i\theta}\tau^{-1}}$ である.

となると θ を $0\sim 2\pi$ に動かしていくと $\frac{1}{a+\zeta_*^2}$ は $2\pi i e^{-ae^{i\theta}\tau^{-1}}$ だけ値がずれてしまう結果となる。同じ所を n 周すれば $2\pi i n e^{-ae^{i\theta}\tau^{-1}}$ だけずれることになるから, 結局、$\frac{1}{a+\zeta_*^2}$ **は無限多価の元だ**ということになる.

こういうことの原因は無論 $e_*^{t\zeta_*^2}$ の τ-表示に現れる $\sqrt{1-\tau t}$ のせいではあるのだから、もう少し細かく $e_*^{t\zeta_*^2}$ の性質を次節でみておこう.

4 $\{e_*^{t\zeta_*^2}; t\in\mathbb{C}\}$, $\{:e_*^{t\zeta_*^2}:_\tau\ ; t,\tau\in\mathbb{C}\}$ をどう見るか

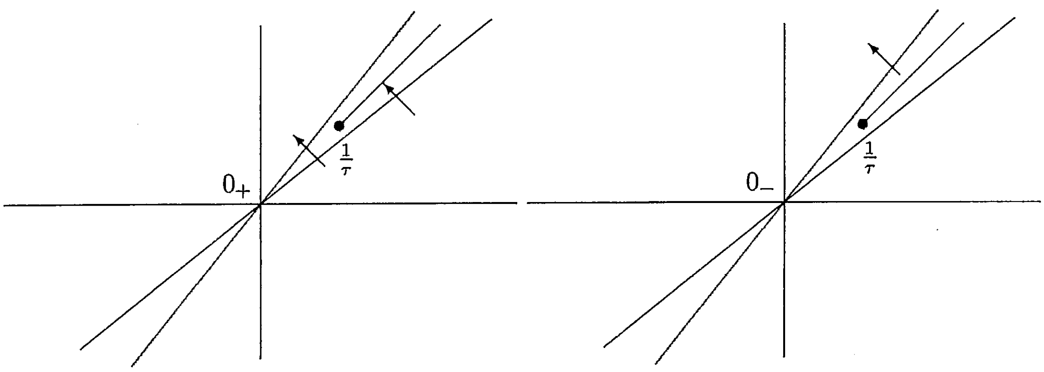
２価の元としてではあるが、指数法則 (30) が成立するのだから、$\{e_*^{t\zeta_*^2}; t\in\mathbb{C}\}$ は群と呼んで良いものであろうか？ そういうことをこの節で考えよう。

4.1 曖昧被覆群

τ-表示は $\frac{1}{\sqrt{1-\tau t}}e^{\frac{t}{1-\tau t}\zeta^2}$ であるから、$\tau=0$ であれば $\sqrt{1}=1$ として $\mathbb{C}$ と同型の群である。$\tau\neq 0$ では $t=1/\tau$ のところで τ-表示は発散している。しかし、原点を通る $1/\tau$ を通過しない直線上では初期条件を 1 としたときの一意性から、元は一価に定まり、指数法則は成立し、

$$e_*^{s\zeta_*^2}*e_*^{t\zeta_*^2}=e_*^{(s+t)\zeta_*^2}$$

である。さらに、$\tau\neq 0$ とすれば V_ε を 0 の複素近傍として $\{e_*^{t\zeta_*^2}; t\in V_\varepsilon\}$ は複素局所群であり、定義域が半平面を含むから複素半群でもある。$\mathbb{C}$ の任意の実 1 次元部分空間は τ をこれ以外の所からとれば自然に群になる。しかし、$1/\tau$ を一周すると符号が変わるのだから、複素関数として扱うためには $1/\tau$ の所から ∞ に向かってスリットを入れたシートを２枚つないだリーマン面で考察しなければならない。すると、0 が 0_+, 0_- と２つできて、どちらを単位元と呼ぶか迷うことになるが、どちらか一方を選んで、それを単位元と思うことにする。



そこで、単位元を通過する直線で $1/\tau$ を含まないものを考えれば自然に群になる。しかし、これを回転して $1/\tau$ を通過させると、連続追跡を 0_+ の近傍で行うか、0_+ から遠く離れた所で行うかによって違ってくる。１径数部分群の動きとして見るならば、それは $1/\tau$ という特異点によって、二つに分裂したと思える。２分裂したものをそのまま追跡すると、再び $1/\tau$ を横切るところ

でこの二つが入れ替わる。あるいは二つに分裂したうちの一つを選んで追跡しても、$1/\tau$ という特異点によって二つに分裂し、分裂してしまえば、あとは入れ替わりが起こるだけとなる。どちらを重視してイメージを作るべきか問題となるところである. この指数関数は**動く分岐特異点を持つ**のである。

では、$\{e_*^{t\zeta_*^2};t\in\mathbb{C}\}$ を $\mathbb{C}-\{0\}$ のようなものの被覆群と思えるであろうか？

Lemma 8 $\{e_*^{t\zeta_*^2};t\in\mathbb{C}\}$ を何かの被覆 *Lie* 群と思うことはできない。

証明 指数関数の phase 部分は $t\to\frac{t}{1-t\tau}$ で $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 上の１次分数変換である。これは τ を不定元として扱えば $\mathbb{C}$ からの injection である。指数法則は $s+t\to\frac{s+t}{1-(s+t)\tau}$ をあたえる。$\{e_*^{t\zeta_*^2};t\in\mathbb{C}\}$ が群であるならば phase 部分は $\mathbb{C}$ と同型の群でなければならない。したがって何かの被覆群ならば、それは $\mathbb{C}$ の被覆群でなければならない。 □

このようなものを群と呼んで良いだろうか？ 軒下に棲むこのような奇妙な "群もどき" を**曖昧被覆群**と呼ことにする。$\{e_*^{t\zeta_*^2};t\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}\}$ は全体としては自然な加法が定義されたリーマン球 $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ の２重被覆のように見えるものだが、これはもはやこれ以上の説明ができるものではないから、このまま容認すべき対象である。 群でも、局所群でもなく曖昧被覆群なのである。しかもその代数構造は重要である。

Proposition 5 $e_*^{t\zeta_*^2}$ を２価の元のまま扱って、$e_*^{a\zeta_*^2}{*}e_*^{b\zeta_*^2}=e_*^{(a+b)\zeta_*^2}$ で和を、$(e_*^{a\zeta_*^2})^b=e_*^{ab\zeta_*^2}$ で積 ab と定義すれば複素数体と同形 (というか複素数体そのもの) となる。

しかしこれは $\pm$ を無視して $\pm a$ をかたまりと見てしまえば複素数体そのものだと言っているだけである。しかし、かたまりは局所的には分離して見えるのである。

e^{aX} という e の肩の世界は $e^{aX}e^{bX}=e^{(a+b)X}$, $(e^{aX})^b=e^{abX}$ という計算で数体の計算がそっくり e の肩にあがってしまう。我々はこの部分を見ている場合の数学形式と、肩から降りた数学形式を見ている場合とを、あまり区別しないで数学を作ってきている。このとき e^{aX} の計算に多価性が現れたときどうするかを問題にしなければならないのである。

このような現象は数学的には面白いかもしれないが、数学の user にとってはあきらかに迷惑な現象である (こんなことを面白がるのはマニヤックな数学者だけである)。

4.1.1 半群の集合体と見る

別の見かたをあたえよう. $\mathbb{C}_\tau=\{z;\mathrm{Re}\,z\geq 0\}$ とする。$\tau\neq 0$ とし $\tau=|\tau|e^{i\theta}$ としたとき半平面 $\mathbb{C}_\tau$ を $\mathbb{C}_\tau=-e^{-i\theta}\mathbb{C}_+$ とする。$\mathbb{C}_\tau\tau=-\mathbb{C}_+$ だから、これはあきらかに加法に関して半群をなす。

$a\in\mathbb{C}_\tau$ ならば $a\tau\in\mathbb{C}_+$ だから $\sqrt{1}=1$ と定めて $\sqrt{1-a\tau}\in\mathbb{C}_+$ を１価にきめておける。

そして τ 毎に半群 $S_\tau=\{{:}e_*^{s\zeta_*^2}{:}_\tau;s\in\mathbb{C}_\tau\}$ を考える。これは $\lim_{s\to 0}e_*^{s\zeta_*^2}=1$ となることを要求しておけば、１価の元でできた半群である。定義のしかたから S_τ が $\tau=|\tau|e^{i\theta}$ としたとき $e^{i\theta}$ にしか依存していないことはあきらかである。

また、$\mathbb{D}\subset\mathbb{C}_\tau$ 任意の、内点を含む原点を頂点とする扇形部分集合とすればこれは部分半群で $S_{\mathbb{D}}=\{{:}e_*^{s\zeta_*^2}{:}_\tau;s\in\mathbb{D}\}$ も部分半群となる。共通半群 $S_\tau\cap S_{\tau'}$ は考えられるが、$S_\tau\cup S_{\tau'}$ は考えない.

τ を固定し、普通の表示で積公式を書くと

$$e^{a\zeta^2}*_\tau e^{b\zeta^2}=\frac{1}{\sqrt{1-ab\tau^2}}e^{\frac{a+b+2ab\tau}{1-ab\tau^2}\zeta^2} \tag{50}$$

となる。$1-ab\tau^2=0$ となるところで積が定義されないので、この半群をそのまま群に埋め込むことはできない。

しかし、$*_\tau$-積に関する逆元は無理して書けば

$$(e^{a\zeta^2})_\tau^{-1}=\frac{1+a\tau}{\sqrt{1+2a\tau}}e^{-\frac{a}{1+2a\tau}\zeta^2} \tag{51}$$

である。これはパラメーターが S_τ からはみでているので考えないのだが, これがあるということは切除公準「 $a*_\tau b=a*_\tau b'$ ならば $b=b'$ である」を満たすということである。

次の事実に注意しよう:

Proposition 6 切除公準を満たす可換半群は可換群の中に埋め込める.

証明 条件を満たす半群を S とし, 直積半群 $S^2=S\times S$ を考える. そこで, $\mathbb{N}_0$ から $\mathbb{Z}$ を構成するやりかたをまねて S^2 上に同値関係を

$$(a,b)\sim(a',b')\Leftrightarrow ab'=ba'$$

で定義する. 同値関係であることは次で分かる。

$(a,b)\sim(a,b)$ は自明, 可換性より $(a,b)\sim(a',b')\Leftrightarrow(a',b')\sim(a,b)$ は明らか. 推移律を見るために $(a,b)\sim(a',b')$, $(a',b')\sim(a'',b'')$ とすると, $ab'=ba', a'b''=b'a''$ だから, 第1式に b'' をかけて第2式を使うと $ab'b''=ba'b''=bb'a''$, 可換性より $b'ab''=b'ba''$. 切除公準より $ab''=ba''$ で $(a,b)\sim(a'',b'')$ が分かる.

$(a,b)\sim(a',b')\Rightarrow(a,b)(c,d)\sim(a',b')(c,d)$ は明らかだから $(a,b)\sim(a',b')$, $(c,d)\sim(c',d')$ ならば $(a,b)(c,d)\sim(a',b')(c',d')$ が分かる. $[(a,b)]$ を (a,b) の同値類とする. ∴上の可換積を使って $[(a,b)][(c,d)]=[(a,b)(c,d)]=[(ac,bd)]$ と定義すると可換積が同値類の集合 $S^2/\sim$ に定義される.

$1=[(a,a)]$, $[(a,b)]^{-1}=[(b,a)]$ と定義するとこれで $S^2/\sim$ が群になっていることがわかる.

$a\in S$ にたいして $f(a)=[(az,z)]\in S^2/\sim$ を対応させると $f:S\to S^2/\sim$ は

$$f(ab)=[(abzz',zz')]=[(az,z)][(bz',z')]=f(a)f(b)$$

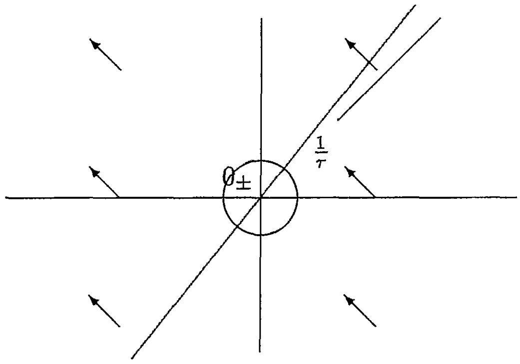
をみたす. $f(a)=f(a')$ とすると, $(az,z)\sim(a'z,z)$ だから $az^2=a'z^2$ で, 切除公準より $a=a'$ となるから, 半群 S は群 $S^2/\sim$ の中に埋め込めたことが分かる. □

これより, 各 S_τ から可換群 $S_\tau^2/\sim$ を作れば これらはすべて $\mathbb{C}$ の加法群と同形ではあるが、同形対応は τ に依存しているし、(51) 式でわかるように、そのまま $\mathbb{C}$ と思うことはできない。

しかし、上の同値関係は扇形の張る2次元平面に加法を定義しているものだから、部分半群 $S_{\mathbb{D}}$ を使って $S_{\mathbb{D}}^2/\sim$ を作っても、できあがる可換群は $S_\tau^2/\sim$ の中に自然に同形に埋め込めるものとなり、(各同値類は小さくなっているが) 全く同じ集合と思える。特に共通半群 $S_\tau\cap S_{\tau'}$ から $(S_\tau\cap S_{\tau'})^2/\sim$ を作れば、これは $S_\tau^2/\sim$, $S_{\tau'}^2/\sim$ のどちらとも同じと思える。

従って同値類を同値類に対応させる対応で $S_\tau^2/\sim=S_{\tau'}^2/\sim$ と思うべきものとなる。

すると τ をすこしづつ回転して考えれば, 全部同じものとしなければならない。



一般に扇形領域 D に対し、任意のベクトル $\overrightarrow{PQ}$ は平行移動で始終点が D におさまるようにできるが $-D$ に収めようとすると $\overrightarrow{qp}$, $q{=}-Q$, $p{=}-P$ となり、-1 倍しておいてから逆元をとったものと同じとなる。
従って、どこから始めても、できあがる加法群は同じもので $\mathbb{C}$ と同形である。つまり、このように見ている限り $\{e_*^{t\zeta_*^2}\}$ は普通の指数関数族 $\{e^{tw}\}$ と同形で複素数体に同形に写像される。

しかしこの同形の構成は $\sqrt{\ }$ からくる不定性が消える所のみをつなぎあわせて構成しているので、当然ながら $\sqrt{\ }$ の不定性は現れない。これはいわば $\frac{1}{\sqrt{1-t\tau}}e^{\frac{t}{1-t\tau}\zeta^2}$ の振幅部分を無視して位相 (phase) 部分にのみ注目したためである。

4.1.2 4元数と見る

ここで数学の user の立場で考えてもらいたい. $\sqrt{\ }$ の処理で困る場面に出会ったとしてみよう. 数学の形式にあわせる為に user は何か上に述べたような考えを いろいろ持ち出してきて多価性を消した形式を作りだすはずである. しかし, そのとき何かが犠牲にされるのである. 犠牲部分を少なくすることを考えよう。

これまでの話は τ を動かして sheet の乗換えをしなくてすむようにして $\sqrt{1-t\tau}$ を処理したのである。したがって、$\lim_{s\to 0} e_*^{s\zeta_*^2}{=}-1$ となることを要求しこちらの sheet だけで話をすることもできる。できあがるものは $\mathbb{C}$ の加法群と同形で代数的には区別がないが sheet が違っているので、$\mathbb{C}$ が二つできたと思うこともできる. さらに積極的に, この二つの複素数は独立と思ってよい.

(z_1, z_2) を複素数の組とする。これは2枚の sheet で作った複素数を独立に考えたものである。複素スカラーは右からの作用 $(z_1,z_2)w{=}(z_1w, z_2w)$ とする。

同じ sheet 内での i 倍、sheet の入れ替え操作などをどのように表現すると振幅部分の $\sqrt{\ }$ の2価性をうまく拾ったことになるかははっきりしないのだが4元数の計算を考えて

$$J(z_1,z_2){=}(-z_2,z_1),\quad J((z_1,z_2)w){=}(J(z_1,z_2))w,\quad I(z_1,z_2){=}(iz_1,-iz_2)$$

と定義する。sheet の入れ替えを2回行うと符号の変化が起こったから $J^2{=}-1$ となるようにし、各 sheet への $e^{i\theta}$ の作用が右/左回りとなるように左からのスカラー倍を定義したのである。

これで2価性が完全に拾われているわけではないだろうが、$I^2{=}-1$, $J^2{=}-1$, $IJ{=}-JI$ であり, これで4元数が定義されていることがわかる.

4.1.3 漸近挙動でみる

$\sqrt{\ }$ の不定性が現れるような所をみるには s, t が十分原点から遠い所、漸近挙動のみに注目して考える。そのために ρ は十分大きいものとして、表示のパラメーター τ は $|\tau|{=}3\rho$ に制限して考える。上の図で考えると $1/\tau$ が小さいとスリットはほとんど原点のところから放射状に書かれる。

振幅部分まで考えるために

$$\frac{1}{\sqrt{1-t\tau}}e^{\frac{t}{1-t\tau}\zeta^2} \Longleftrightarrow (\frac{t}{1-t\tau}, \frac{1}{\sqrt{1-t\tau}})$$

のように簡略化した記号を用いる。

a について漸近挙動のみに注目するために $|a|>>1$ とし、$\tau=\rho e^{i\theta}$ を $\theta=0\sim 2\pi i$ と動かせば $\sqrt{1-a\rho e^{i\theta}}$ は特異点のまわりを一周し符号を変える。

$\sqrt{t}$ をかけて $|t|>>0$ のところで

$$\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1-t\tau}}e^{\frac{t}{1-t\tau}\zeta^2} \sim \frac{1}{\sqrt{t^{-1}-\tau}}e^{\frac{1}{t^{-1}-\tau}\zeta^2}$$

の挙動を見ると、(46) 式より τ を固定すれば t を動かしても多価性が現れることはなく、ほぼ $-i{:}\delta_*(\zeta){:}_\tau$ のまわりを動く 1 価の元であるが、τ については原点を 1 周すると符号が逆転する 2 価の元だということが分かる。

4.1.4 閉曲線での積分

$e_*^{t\zeta_*^2}$ は t をうごかしたり、表示を動かして考えると 2 価の元として扱わなければならないが、表示を固定し、t について連続的に動かすことを考えると不定性を消して追跡することができる。つまり曲線 $C=\{c(s); 0\leq s\leq 1\}$ に沿っての積分

$$\int_C \frac{d}{dt}e_*^{t\zeta_*^2}*e_*^{a\zeta_*^2}dt=e_*^{(c(1)+a)\zeta_*^2}-e_*^{(c(0)+a)\zeta_*^2} \tag{52}$$

は一意的に計算できる。C が閉曲線だと右辺が 0 となるように見えるかもしれないが、閉曲線 $a+C$ が $1/\tau$ の周りを何回廻ったかで $\pm$ が入代わる。たとえば $0,s,t,s+t$ で作る平行 4 辺形が $1/\tau$ を内部に含むような s,t に於いては

$$:e_*^{s\zeta_*^2}*e_*^{t\zeta_*^2}*e_*^{-s\zeta_*^2}*e_*^{-t\zeta_*^2}:_\tau=-1$$

としなければならない。しかし十分大きい a に対しては

$$:e_*^{s\zeta_*^2}*e_*^{t\zeta_*^2}*e_*^{-s\zeta_*^2}*e_*^{-t\zeta_*^2}*e_*^{a\zeta_*^2}:_\tau=e_*^{a\zeta_*^2}$$

である。これを演算規則として使うと結合律を壊すことになるが (52) は $\mathbb{C}$ 内の領域の符号を反転させる作用素と見ることができる。

$$\int_C \frac{d}{dt}e_*^{t\zeta_*^2}*e_*^{a\zeta_*^2}dt=\begin{cases}-e_*^{a\zeta_*^2}, & a+C\text{ が }\frac{1}{\tau}\text{ を奇数回廻る場合}\\ e_*^{a\zeta_*^2}, & a+C\text{ が }\frac{1}{\tau}\text{ を偶数回廻る場合}\\ 0 & \text{境界線上の場合}\end{cases} \tag{53}$$

符号反転の起こる領域は C が取り囲む領域を、$1/\tau$ だけ平行移動したような部分である。

これは、曖昧被覆群そのものを扱ったのではなく、そこから既成の数学で理解できるものを一つ取り出して見せたにすぎない。従ってこれは曖昧被覆群の一つの表現と見るべきものである。

注意. $e_*^{t\zeta_*^2}$ については、今のところこれ位のことしか分からず、これをどのように見ると曖昧さが薄れるのかについては確かな考えがない。しかし、現実の数学 user で上の曖昧被覆群のようなものを使っている人はいないようである。とすると user は何か全く別の形式でこういったものを書いているはづなのである。

5 線形空間の位相

これまでの論議では関数空間の位相については何も言ってこなかったのだが、本来このような話を topology 抜きでつづけるのは不可能なので、ここで関数空間の位相について少し述べておく必要がある。

$\forall\tau\in\mathbb{C}$ について、次のことが成立するのは明らかであろう。

(P.1) $f*_\tau g$ は一方が多項式なら定義される。

(P.2) 結合律 $(f*_\tau g)*_\tau h=f*_\tau(g*_\tau h)$ はどれか二つが多項式なら成立する。

積の相手の関数は正則関数、C^∞-関数等、適宜色々考えられるが、結合律の証明には多項式近似定理を使っているだけであるから相手の関数空間は次の条件を満たすものなら何でも良い: $\mathcal{E}$ を $\mathbb{C}[\zeta]$ に何か位相を入れて完備化した位相線型空間とする：
条件：任意の多項式 $p(\zeta)$ を左から (resp. 右から) かける演算 $f\to p(\zeta)*_\tau f$ (resp. $f\to f*_\tau p(\zeta)$) は $\mathcal{E}$ から $\mathcal{E}$ への線型連続写像となる。(このようなものを $\mathbb{C}[\zeta]$-bimodule と呼ぶ。)

多変数でも事情は同じで整関数全体にコンパクト開位相をいれたものを $Hol(\mathbb{C}^n)$ とする。次のことは積公式 (1), (21) からすぐに示せる基本的なものである

Lemma 9 任意の多項式 $p(\boldsymbol{u})$ について、 左からの積 $p(\boldsymbol{u})*$ (*resp.* 右からの積 $*p(\boldsymbol{u})$) は $Hol(\mathbb{C}^n)$ から自身への連続線形である。

しかし、これだけでは使い勝手が悪いので、もう少し制限して考えることにする。

5.1 $\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^n)$ と積公式

次のような関数空間を用意する。

$$\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^n)=\{f\in Hol(\mathbb{C}^n);\sup|f(z)|e^{-s|z|^p}<\infty,\forall s>0\}$$

$*$-積に関する基本的定理は次のものである

Theorem 2 式 (21) で定義される $*_K$-積は $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}\geq 1$ のとき、連続双線形写像

$$\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^n)\times\mathcal{E}_{p'}(\mathbb{C}^n)\to\mathcal{E}_{p\vee p'}(\mathbb{C}^n)$$

に拡張される。

これより多項式近似と Lemma 9 を使って $\mathcal{E}_2(\mathbb{C}^n)$ は $*_K$-積で閉じて位相結合代数になっていることが分かる。また $0<p'\leq 2\leq p<\infty$ の場合には $\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^n)$ が $\mathcal{E}_{p'}(\mathbb{C}^n)$-bimodule となっていることが分かる。

さらに

$$\mathcal{E}_{p+}(\mathbb{C}^n)=\bigcap_{p'>p}\mathcal{E}_{p'}(\mathbb{C}^n),\quad \mathcal{E}_\infty(\mathbb{C}^n)=\bigcup_{p}\mathcal{E}_{p'}(\mathbb{C}^n)$$

とすると、$\mathcal{E}_\infty(\mathbb{C}^n)$ は $\mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C}^n)$-bimodule となっていることが分かる.

注意. $e^{p\,\text{次式}}$ は $\mathcal{E}_{p+}(\mathbb{C}^n)$ の元ではあるが $\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^n)$ の元ではない。

これで分かるように、2次式の指数関数どうしの積は必ずしも定義できないところに位置している。(実際、積の公式 (50) で見たように特異点が現れていた。)

5.2 Intertwiner の拡張と応用

次に (26) で定義される inertwiner が Theorem 2 の空間のどの辺まで拡張できるかを見ておこう． すでに $e^{2\text{次式}}$ に intertwiner を拡張して定義したが、このときも inertwiner には特異点が現れた。

一般には次の定理が分かっている：

Theorem 3 $I_{K}^{K'}$ は $\mathcal{E}_2(\mathbb{C}^n)$ から自身への連続同形写像に拡張できる。

つまり、intertwiner が素直に定義できるのも $\mathcal{E}_2(\mathbb{C}^n)$ までであって、$\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^n)$ の元に対しては何か別の手立てが要求されるのである。(このように、一般論に乗らない部分というのが私にとっては極めて魅惑的なのである。)

しかし、上の定理だけからでも様々な公式が作れるので、今度はそれを述べよう。

5.2.1 $*$-無限積の公式

Intertwiner は代数の同型を与えるので $*$-無限積を考える時に便利である。f,g が多項式の時には $I_0^\tau(f{*_0}g)=I_0^\tau(f){*_\tau}I_0^\tau(g)$ である。これを利用すると普通の $*_0$ では

$$\sin\pi(a+\zeta)=(a+\zeta)\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n^2}(a+\zeta)^2)$$

だから $I_0^\tau(1-\frac{1}{n^2}(a+\zeta)^2=(1+\frac{\tau}{2n^2}-\frac{1}{n^2}(a+\zeta)^2$ を使うと

$$I_0^\tau\sin\pi(a+\zeta)=(a+\zeta){*_\tau}\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{\tau}{2n^2}-\frac{1}{n^2}(a+\zeta)^2) \tag{54}$$

τ は任意だから、一般に

$$\sin_*\pi(a+\zeta)=(a+\zeta)*\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n^2}(a+\zeta)_*^2)$$

のように書いておいて良い。この公式は本来は $\sin_*\pi(a+\zeta)$ が I_0^τ が位相同型を与える関数空間 $\mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C})$ に属することを示してからでないと、極限操作の連続性に不安が残るであろうが、大丈夫なのである。証明すべきは

$$\lim_N(a+\zeta)\prod_{n=1}^{N}(1-\frac{1}{n^2}(a+\zeta)^2)=\sin\pi(a+\zeta)$$

の収束が $\mathcal{E}_2(\mathbb{C})$(実際には $\mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C})$) の位相による収束だということであるが $((a+\zeta)^2)^n$ の係数は単調に $1/(2n+1)!$ に収束するのことを見れば容易であろう．

この方法で証明できる無限積の公式としては、この他に

$$\prod_{n=1}^{\infty}*\cos_*\frac{\zeta}{2^n}=\frac{\sin_*\zeta}{\zeta},\quad \prod_{n=1}^{\infty}*(1-\frac{4\zeta_*^2}{(2n-1)^2\pi^2})=\cos_*\zeta$$

がある。さらに、次のものも $\mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C})$ の位相による収束である

$$e_*^{(a+\zeta)}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{a+\zeta}{n})_*^n$$

さらに $\Gamma(z+\zeta)$ のように $\in\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C})$ 位しか分からないものでも、定義のしかたから

$$I_0^\tau\Gamma(z+\zeta)=\Gamma_*(z+\zeta)$$

が保証されている場合には、部分積

$$\prod_{n=1}^{N}(1+\frac{1}{n}(a+\zeta))e^{-\frac{a+\zeta}{n}}=\frac{1}{\Gamma(a+\zeta)}$$

のテイラー級数の各 $(a+\zeta)^k$ の係数が収束しているから

$$\lim_{N}(a+\zeta)*e_*^{C(a+\zeta)}\prod_{n=1}^{N}(1+\frac{1}{n}(a+\zeta)_*)e_*^{-\frac{a+\zeta}{n}}=\frac{1}{\Gamma(a+\zeta)}$$

の τ-表示が何かの整関数に広義一様収束していることがわかれば, この収束が $\mathcal{E}_2(\mathbb{C})$ の位相による収束だということを示さなくても

$$\frac{1}{\Gamma_*(a+\zeta)}=(a+\zeta)*e_*^{C(a+\zeta)}*\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n}(a+\zeta))_*e_*^{-\frac{a+\zeta}{n}} \tag{55}$$

がわかる。示すべきことが無限積の広義一様収束だけなので, この方法によって初等的無限積表示はほとんど得られる。

しかも, これらの公式は全て一つの元から作る $*$-積関数 $f_*(X)$ に関するもので計算は全部可換であるから $f_*(X)=\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(t)e_*^{itX}dt$ と定義して公式 $f_*(X)*g_*(X)=(fg)_*(X)$ が可換の世界の関数 f,g の広義 C^∞-一様位相によるもので十分であることを見れば, そのまま使えることがわかる.

5.3 無限積の直接証明

次の無限積の収束は分かっているのだが、直接証明できるはずである。

$$\prod_{n\geq 1}(1+\frac{1}{n}\zeta)_{*+}^{-1}*e_*^{\frac{1}{n}\zeta}=\prod_{n\geq 1}\int_{-\infty}^{0}e_*^{t(1+\frac{1}{n}\zeta)}dt*e_*^{\frac{1}{n}\zeta}=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{0}e^te_*^{\frac{1}{k}\zeta}*e_*^{\frac{t}{k}\zeta}dt$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{0}\cdots\int_{-\infty}^{0}e^{(t_1+t_2+\cdots+t_n)}e_*^{(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})\zeta}*e_*^{(t_1+\frac{1}{2}t_2+\cdots+\frac{1}{n}t_n)\zeta}dt_1dt_2\cdots dt_n$$

$$=\lim_{n\to\infty}n!e_*^{(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})\zeta}*\int_{-\infty}^{0}\cdots\int_{-\infty}^{0}e^{(t_1+2t_2+\cdots+nt_n)}e_*^{(t_1+t_2+\cdots+t_n)\zeta}dt_1dt_2\cdots dt_n$$

座標系を次のように変換する。

$$t_1=s_1-s_2,\cdots,t_i=s_i-s_{i+1},\cdots,t_n=s_n,\quad -\infty<s_1\leq s_2\leq\cdots\leq s_n\leq 0.$$

すると $t_1+\cdots+t_n=s_1$, $t_1+2t_2+\cdots+nt_n=s_1+s_2+\cdots+s_n$ で、与式の積分は累次積分になおり

$$=\lim_{n\to\infty} n! e_*^{(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})\zeta} * \int_{-\infty}^{0} ds_1 e_*^{s_1\zeta} \int_{s_1}^{0} ds_2 e^{s_2} \cdots \int_{s_{n-2}}^{0} ds_{n-1} e^{s_{n-1}} \int_{s_{n-1}}^{0} ds_n e^{s_n}$$

積分の計算のための漸化式は $F_0(s)=1$, $F_n'(s)=-F_{n-1}(s)e^s$ だから、$w=e^s$, $F_n(s)=f_n(e^s)$ と置き直して解けば

$$\int_{s_1}^{0} ds_2 e^{s_2} \cdots \int_{s_{n-2}}^{0} ds_{n-1} e^{s_{n-1}} \int_{s_{n-1}}^{0} ds_n e^{s_n} = \frac{1}{n!}(1-e^{s_1})^n$$

となるから、与式は

$$=\lim_{n\to\infty} e_*^{(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})\zeta} * \int_{-\infty}^{0} (1-e^s)^n e_*^{s\zeta} ds = \lim_{n\to\infty} e_*^{(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n)\zeta} * \int_{-\infty}^{0} (1-e^s)^n e_*^{(s+\log n)\zeta} ds$$

変数を $s+\log n \to s$ と変換して

$$=\lim_{n\to\infty} e_*^{(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n)\zeta} * \int_{-\infty}^{\log n} (1-\frac{e^s}{n})^n e_*^{s\zeta} ds = e_*^{C\zeta} * \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^s} e_*^{s\zeta} ds$$

最後の $=$ の証明は、この場合の $*$-積の連続性による。つまり, $e_*^{(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n)\zeta}$ の方は $\mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C})$ での収束だから $\int_{-\infty}^{\log n}(1-\frac{e^s}{n})^n e_*^{s\zeta} ds$ は $\mathcal{E}_\infty(\mathbb{C})$ で収束しておれば問題ない.

Remark $\zeta=\frac{1}{i\hbar}uv$ の場合には $e_*^{(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n)\zeta}$ が $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ での収束だから, $\int_{-\infty}^{\log n}(1-\frac{e^s}{n})^n e_*^{s\zeta} ds$ の収束が $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ での収束だとしても連続性は証明しなければならないことである. しかし, 計算は全て可換なところでやっているので, f_*X を Fourier 変換を使って定義し, $f_*(X)*g_*(X)=(fg)_*(X)$ に注意すれば, かような連続性は保証できると思われる.

また, これで分かるように、$e_*^{\frac{1}{n}\zeta}$ の項がないと無限積は 0 に収束する。その訳は ζ の動く範囲をコンパクト集合とし

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{0} e^t{:}e_*^{\frac{1}{k}\zeta}{:}_\tau = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{0}(1-e^s)^n e^{s\zeta+\frac{s^2}{4}\tau} ds$$

この積分を二つに分けて

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{-T}^{0}(1-e^s)^n e^{s\zeta+\frac{s^2}{4}\tau} ds + \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{-T}(1-e^s)^n e^{s\zeta+\frac{s^2}{4}\tau} ds$$

第 2 項は $1-e^s \leq 1$ として T を十分大きく取れば $<\varepsilon$ とできる。第 1 項は $n\to\infty$ で被積分関数は一様に 0 に収束するからである.

6　2 変数 δ-関数

数学の用語では「2 つの変数を入れ替える」と言っても、「2 つの変数が入れ替わる」といっても同じことであると思われている。しかし、私はこれを区別して使うことを提唱しようとしているのである。

ただし我々の立場は、変数の入れ換え等という作業ですら, 人間が思考だけで行うのではなく, 力学の原理, 少なくとも連続追跡の原理にしたがって追跡できるべきものでなければならないという立場をとるのである. つまり, 微妙な動詞の使い分けだが, **変数をいれかえるのではなく, 変数が入れかわるようにしたい**のである.

6.1 変数が入れ換わると符合が変わる?

§ 3.4.2 のような事が起こる理由は積分路の複素回転と連動する表示の複素回転であったが, 多変数にすると実数の中の座標変換でもこのようなことが起こることを説明しよう.

$m{=}2$ として u_1, u_2, v_1, v_2 で積分 $\iint_{\mathbb{R}^2} e_*^{\frac{1}{i\hbar}\boldsymbol{\xi}^t\boldsymbol{u}} d\xi_1 d\xi_2$ を考える. 普通に考えれば u_1, u_2 変数で v_1, v_2 を使わなければ $[u_1, u_2]{=}0$ だから, $\delta_*(u_i)*\delta_*(u_i){=}$(発散) だが, $\delta_*(u_1)*\delta_*(u_2)$ は考えられ, $\delta_*(u_1)*\delta_*(u_2){=}\delta_*(u_2)*\delta_*(u_1)$ となるのは自然に見える.

これを累次積分にして考えると各変数のところから $\pm$ の多価性が発生するが, 積をとっているので $\{\pm 1\}\times\{\pm 1\}{=}\{\pm 1\}$ より, 全体としては2価の元になっていると理解すべきものである.

$$\int_{\mathbb{R}^2} e_*^{\frac{1}{i\hbar}\boldsymbol{\xi}^t\boldsymbol{u}} d\xi_1 d\xi_2{=}\delta_*(\frac{1}{\hbar}u_1)*\delta_*(\frac{1}{\hbar}u_2)$$

のように書いて良いであろう. この積分は**変数の番号を付替ても何も変化しない**ように見える. ところが $\delta_*(\frac{1}{\hbar}u_k){=}{-}\delta_*(\frac{1}{\hbar}u_k)$ なのだから $\delta_*(\frac{1}{\hbar}u_i)*\delta_*(\frac{1}{\hbar}u_j){=}{-}\delta_*(\frac{1}{\hbar}u_j)*\delta_*(\frac{1}{\hbar}u_i)$ と書いても**矛盾ではない**.

さて我々の立場は, 変数の入れ換え等という作業ですら, 人間が思考だけで行うのではなく, 力学の原理, 少なくとも連続追跡の原理にしたがって追跡できるべきものでなければならないという立場であった. 変数の入れ換えを連続的に追跡するということは, 例えば (u_1, u_2, v_1, v_2) において, u_1 と u_2 を入れ換えるのも, 何か Hamiltonian を用意してそれによる運動として u_1 と u_2 が入れ替わるようにして考える. (これが、力学的に考えるということの意味である.) ここではそこまで徹底的ではないが正準共役である v_1, v_2 の入れ換えも連動させていると考えることにする. (但し, $\delta_*(u_i)*\delta_*(v_i)$ の場合は $[u_i, v_i]{\neq}0$ だから, 別の問題).

積分 $\int_{\mathbb{R}^2} e_*^{\frac{1}{i\hbar}\boldsymbol{\xi}^t\boldsymbol{u}} d\xi_1 d\xi_2$ の $K{=}\begin{bmatrix} K_m & K_b \\ {}^tK_b & K''_m \end{bmatrix}$ 順序表示を考える. ただし, $\det K_m{\neq}0$ とする.

$$:e_*^{\frac{1}{i\hbar}(\boldsymbol{\xi}^t\boldsymbol{u})}:_K{=}e^{-\frac{1}{4\hbar^2}\boldsymbol{\xi}K_m{}^t\boldsymbol{\xi}+\frac{1}{i\hbar}\boldsymbol{\xi}^t\boldsymbol{u}}$$

$$-\frac{1}{4\hbar^2}\boldsymbol{\xi}K_m{}^t\boldsymbol{\xi}+\frac{1}{i\hbar}\boldsymbol{\xi}^t\boldsymbol{u}{=}{-}\frac{1}{4\hbar^2}(\boldsymbol{\xi}{-}2\boldsymbol{u}i\hbar K_m^{-1})K_m{}^t(\boldsymbol{\xi}{-}2\boldsymbol{u}i\hbar K_m^{-1}){-}\boldsymbol{u}K_m^{-1}{}^t\boldsymbol{u}$$

だから, 積分を複素数積分で計算して

$$:\delta_*(\frac{1}{\hbar}u_1)*\delta_*(\frac{1}{\hbar}u_2):_K{=}\int_{\mathbb{R}^2} :e_*^{\frac{1}{i\hbar}(\boldsymbol{\xi}^t\boldsymbol{u})}:_K{=}\frac{\pi}{\sqrt{\det K_m}}e^{-\boldsymbol{u}K_m^{-1}{}^t\boldsymbol{u}} \tag{56}$$

となる. この積分は普通 $\mathrm{Re}K_m > 0$ (positive definite) のときにしか計算しないが, 表示の複素回転と積分路の複素回転を考え, 前節の **(3) の説明**の所でやったように計算すると, $\det K_m{\neq}0$ であれば ($\sqrt{\det K_m}$ の符号の不定性を除いて) 成立していることに注意する.

変数の入れ換えを実現するために, これとは別に行列 A を以下のように選ぶ.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\quad J=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad AJ{=}JA,\quad A^2{=}I,\ J^2{=}{-}I$$

に注意してやると, $(AJ)^2=-I$ だから,

$$e^{tAJ}=\cos t+(\sin t)AJ, \quad e^{tJ}=\cos t+(\sin t)J$$

となる. したがって

$$\begin{aligned}e^{t(A-I)J}=e^{tAJ}e^{-tJ}&=(\cos tI+(\sin t)AJ)(\cos t-(\sin t)J)\\&=\cos^2 tI+(\cos t\sin t)(AJ-J)+(\sin^2 t)A\end{aligned}$$

である. $t=\frac{\pi}{2}$ とすると $e^{\frac{\pi}{2}(A-I)J}=A, \quad e^{\pi(A-I)J}=I$ となる. $A-I$ は対称行列だから, $e^{\theta(A-I)J}$ は $Sp(2)$ の元になる. これによる座標変換を

$$S(\theta)=e^{\theta(A-I)J}=\begin{bmatrix}S_m(\theta) & S_b(\theta)\\ S_b'(\theta) & S_m''(\theta)\end{bmatrix}, \quad S_m(\theta)=S_m''(\theta)=\begin{bmatrix}\cos^2\theta & \sin^2\theta\\ \sin^2\theta & \cos^2\theta\end{bmatrix},$$

とする. 複素回転でなく, $Sp(2,\mathbb{R})$ の元で変数の入れ換えが実現できていることに注目したい.

そこで (56) 式の表示から, 座標を $S(\theta)$ で回転させると, その回転は生成元の変換公式より, 表示を $S(\theta)K{}^tS(\theta)$ に変えたのと同じであるから $S(\theta)K{}^tS(\theta)$-順序表示を考えると (56) 式より表示の振幅に $1/\sqrt{\det((S(\theta)K{}^tS(\theta))_m)}$ が現れるが, $K=I_4$ とすると, $\theta=\frac{\pi}{2}$ のところでは

$$1/\sqrt{\det(S_m(\frac{\pi}{2})K_m{}^tS_m(\frac{\pi}{2})}=1/\sqrt{(\det(S_m(\frac{\pi}{2}))^2}$$

となるが, $\theta=0$ で $\det S_m(0)=1$ だから, **連続につながるように**計算すれば $\sqrt{(\det(S_m(\frac{\pi}{2}))^2}=\det(S_m(\frac{\pi}{2})$ とすべきであることがわかる. ところが、$\det(S_m(\frac{\pi}{2})=\det\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=-1$ だから、結局符号の逆転をあたえるのである. したがって, 積分 $\int_{\mathbb{R}^2}e_*^{\frac{1}{i\hbar}\xi{}^tu}d\xi_1 d\xi_2$ は変数の番号が**入れ換わる**と符号が変わるのである. したがって,

$$\delta_*(\frac{1}{\hbar}u_1)*\delta_*(\frac{1}{\hbar}u_2)=\int_{\mathbb{R}^2}e_*^{\frac{1}{i\hbar}\xi{}^tu}d\xi_1\wedge d\xi_2$$

のように $d\xi_1\wedge d\xi_2$ を用いて書いたほうが良い. $\delta_*(\frac{1}{\hbar}u_1)*\delta_*(\frac{1}{\hbar}u_2)$ は変数の順番が問題なのである. 積分を微分形式で考えることは多変数の微積分ではすでにやられていることだが, このことは1変数の微積分の公準から自然に得られたものではないことに注意する必要がある.

この説明は結局 (56) 式が $\det K_m\neq 0$ であれば成立していることを使っており $\sqrt{\det K_m}$ の多価性を使って, 符号が変化するように連続追跡できることを示したのである.

変数の入れ換えは論理的には不連続な移動で, この場合には積分は対称だと考えるのが自然なのだろうが, 時空内の連続的運動で考える (連続追跡の原理) と, 交代性を要求することが自然に見えるというのである.

面積, 体積の概念は数学上の概念として広く認められてはいるが, それは実数の公理系とは独立のものである. 純粋数論の人はこれを認めないかもしれないが, 幾何学者とはこの辺までは認める立場の人を指す. 物理学者は, さらに時間と, エネルギー概念も容認する立場の人である.

数学の中に面積とか体積の概念を通して向きという概念が入り微分形式で数学を書くということが何の違和感もなく受け入れられているのならば、それとまったく同列に因果関係を記述する

道具としての数学が定着しておかしくないのである。歴史的に数学が因果関係にさわってこなかったのは不思議なことではある。

そろそろ、私が何を言いたがっているのか察知した人もいると思うのでここでぶちまけてしまうが、私の究極の目標は数学世界の中に時間の概念 (因果関係) を持ち込むことなのである[1]。

7　2変数2次式の指数関数

これまでは主に1変数で考えてきたが2変数、Weyl 代数にすると非可換性のためにこれまでと全く違う現象が現れる。生成元 u,v と交換関係 $[u,v]=-i\hbar$ で $\mathbb{C}$ 上生成された Weyl 代数 W_2 を考える。但し $[u,v]=u{*}v-v{*}u$ である.

これは 積公式 (1) において $\Lambda=K+J$, $J=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ として考えるということである。 代数 W_2 の代数的構造は上の交換関係だけできまっていることに注意してもらいたい。

以下では次のような記号をもちいる：

$$u{*}v=v{*}u-i\hbar, \quad uv=\frac{1}{2}(u{*}v+v{*}u), \quad v{*}u=uv+\frac{1}{2}i\hbar. \tag{57}$$

$Hol(\mathbb{C}^2)$ 正則関数全体のなす集合に任意の compact 集合上での uniform convergence topology を入れたものとする。これは可算個のセミノルム系で定義される Fréchet space である。

7.1　2変数の $*$-指数関数のいくつかの性質

$*$-指数関数は多価性を持っていたし、積にも特異点が現れるので個別に考えるひつようがあった。ここでは表示で多価性が現れないように、K-順序表示を、K が次のような行列の場合に限定して考えることにする：$K=\begin{bmatrix}0 & \kappa\\ \kappa & 0\end{bmatrix}$, $\kappa\in\mathbb{C}$. これを κ-順序表示とよぶことにする。この表示では振幅部分に現れる $\sqrt{\ }$ の中が2乗の形になり根号をはずして考えられのである。

$\kappa=0,1,-1$ の場合, κ-順序表示はそれぞれ Weyl 順序表示, 正規順序表示、 反正規順序表示と呼ばれている。Intertwiners は (26) の特別な場合で

$$I_{\kappa}^{\kappa'}(f)=\big(\exp\frac{i\hbar}{4}(\kappa'-\kappa)\partial_u\partial_v\big)f. \tag{58}$$

となる。K が次のような場合も上と同様 $\sqrt{\ }$ が現れない。$K=\begin{bmatrix}0 & \kappa\\ \kappa & \tau\end{bmatrix}$, $\kappa,\tau\in\mathbb{C}$, これを (κ,τ)-順序表示と呼ぶことにする。

7.1.1　$*$-指数関数 $e_*^{t(z+\frac{1}{i\hbar}uv)}$

(58) 式で $f_t=h(uv)$ とすると, $I_{\kappa}^{\kappa'}(h(uv))$ も uv の関数だとわかるから、ここでは話を簡単にするために uv の関数に限定して考える。$\frac{2}{i\hbar}uv=\boldsymbol{u}A{}^t\boldsymbol{u}$ のように置く。$A=\frac{1}{i\hbar}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$. さらに

[1]これを言われても接触構造を知っている微分幾何学者は何とも思わないだろうが、位相幾何学者は困るだろう

$\alpha=-AJ=\frac{1}{i\hbar}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ と置く. intertwiner $I_{\kappa}^{\kappa'}$ は次のようになる:

$$I_{\kappa}^{\kappa'}(ge^{t\frac{2}{i\hbar}uv})=g\frac{1}{1-t(\kappa'-\kappa)}e^{\frac{t}{1-t(\kappa'-\kappa)}\frac{2}{i\hbar}uv} \tag{59}$$

この発展方程式を解くと、$e_*^{t\frac{1}{i\hbar}2uv}$ は Weyl 順序表示で

$$:e_*^{t\frac{1}{i\hbar}2uv}:_0=\frac{1}{\cosh t}e^{\frac{1}{i\hbar}2uv\tanh t}, \tag{60}$$

となることが分かる (cf. [16]). さらに正規順序表示 (cf.[14]) では

$$:e_*^{t\frac{1}{i\hbar}2uv}:_I=e^te^{\frac{1}{i\hbar}(e^{2t}-1)uv}. \tag{61}$$

のようになる。
$:e_*^{t\frac{2}{i\hbar}uv}:_{\kappa}=I_0^{\kappa}(\frac{1}{\cosh t}e^{\frac{1}{i\hbar}2uv\tanh t})$ なので 次が得られる:

$$:e_*^{t\frac{1}{i\hbar}2uv}:_{\kappa}=\frac{2}{(1-\kappa)e^t+(1+\kappa)e^{-t}}\exp\Big(\frac{e^t-e^{-t}}{(1-\kappa)e^t+(1+\kappa)e^{-t}}\frac{1}{i\hbar}2uv\Big) \tag{62}$$

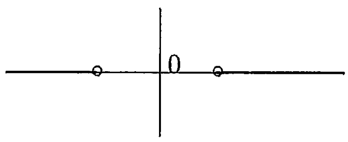
(κ,τ)-順序表示もすぐわかり:

$$:e_*^{t\frac{1}{i\hbar}2uv}:_{(\kappa,\tau)}=\frac{2}{\Delta}\exp\Big(\big(\frac{e^t-e^{-t}}{\Delta}\big)^2\tau\frac{1}{i\hbar}u^2+\frac{e^t-e^{-t}}{\Delta}\frac{1}{i\hbar}2uv\Big),\ \Delta=(e^t+e^{-t})-\kappa(e^t-e^{-t}) \tag{63}$$

となる。一般の順序表示は $1/\sqrt{\ }$ を含んでいて少し面倒である。

$(1-\kappa)e^t+(1+\kappa)e^{-t}=0$ となるところが特異点だが、これは $e^{2t}=\frac{\kappa+1}{\kappa-1}$ である。従って $:e_*^{t\frac{1}{i\hbar}2uv}:_{(\kappa,\tau)}$ は $2t=\log\frac{\kappa+1}{\kappa-1}+2\pi i\mathbb{Z}$. が特異点だが、$\kappa=\pm1$ の所では $:e_*^{t\frac{1}{i\hbar}2uv}:_{(\pm1,\tau)}$ は整関数 w.r.t. t. となる。((反) 正規順序表示が特別扱いされていた理由が少し分かる。)
一般には次のようになる:

Lemma 10 $\kappa\in\mathbb{C}-\{\kappa>1\}\cup\{\kappa<-1\}$ ならば, (κ,τ)-順序表示 $:e_*^{t\frac{2}{i\hbar}uv}:_{(\kappa,\tau)}$ は $t\in\mathbb{R}$ に関して実解析的でかつ急減少である。



公式 (63) は次のような極めて奇妙なことを述べているのである:

Proposition 7 $\kappa\neq0$, $z\in\mathbb{C}$ とする. すると任意の (κ,τ)-順序表示において $:\sin_*\pi(z+\frac{1}{i\hbar}uv):_{(\kappa,\tau)}$ は (z,uv) について正則であり。さらに $z\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}$ のところでは 0 となる。

証明 (63) 式より $:e_*^{\pi i\frac{1}{i\hbar}2uv}:_{(\kappa,\tau)}=-1$ である. これより $:e_*^{\pi i\frac{1}{i\hbar}2uv}:_{(\kappa,\tau)}+1=0$. である。ところで $e_*^{\pm\pi i\frac{1}{i\hbar}uv}$ は Weyl 順序表示 (the case $\kappa=0$) では (60) により発散するが, 他の順序表示は存在し, e.g.

$$:e_*^{\pi i\frac{1}{i\hbar}uv}:_1=ie^{-\frac{1}{i\hbar}2uv},\quad :e_*^{-\pi i\frac{1}{i\hbar}uv}:_1=-ie^{-\frac{1}{i\hbar}2uv}.$$

となる。 これより

$$0=e_*^{-\pi i\frac{1}{i\hbar}uv}*(e_*^{\pi i\frac{1}{i\hbar}2uv}+1)=e_*^{\pi i\frac{1}{i\hbar}uv}+e_*^{-\pi i\frac{1}{i\hbar}uv}=2\cos_*(\pi\frac{1}{i\hbar}uv).$$

指数法則を使えば望みの結果が得られる。 □

これが奇妙に見えるのは次のようなことも出てしまうからである:

Lemma 11 $*$-積の計算で $\sin_* \pi(z+\frac{1}{i\hbar}uv)*f(uv)$ が $z=\frac{1}{2}$ を含むある領域で定義できているならば、 $\sin_* \pi(\frac{1}{2}+\frac{1}{i\hbar}uv)*f(uv)=0$ である。

これらのことは、あたかも $\frac{1}{i\hbar}v*u=\frac{1}{2}+\frac{1}{i\hbar}uv$ は整数 $\mathbb{Z}$ の中だけを動く不定元であるかのごとくに振舞うといっているのである。

この描像は $\frac{1}{i\hbar}v*u$ を単振動を表す演算子と思ってしまえば何も不思議はないのだが、作用素表現を作る以前に代数の中だけから現れていて、しかも $\mathbb{N}$ ではなく $\mathbb{Z}$ が現れていることが奇妙に見えるのである。

しかし、よく考えてみると、こういうことがあるからこそ、量子論は微積分学と両立できるのである。つまり、このようなことは、量子論を受け入れるための数学側の芽なのである。これが無かったら量子論は微積分とは相容れないものになったであろう。

しかし、次のことにも注意しておかねばならない：

Remark 1 $*$-積 $e_*^{z\frac{1}{i\hbar}uv}*f(u,v)$ を定義するしかたとして次の二つが考えられる (これらは等価ではない)：一つは微分方程式

$$\frac{d}{dt}f_t=\frac{1}{i\hbar}uv*f_t, \quad f_0=f(u,v),$$

の実解析的解として定義するもの (解があればの話だが)、もう一つは

$$e_*^{z\frac{1}{i\hbar}uv}*f(u,v)=\lim_{n\to\infty} e_*^{z\frac{1}{i\hbar}uv}*f_n(u,v), \quad \text{if} \ \ f(u,v)=\lim_n f_n(u,v).$$

のように極限を使って定義するものである。この二つの定義は、一般には左からの積 $e_*^{z\frac{1}{i\hbar}uv}*$ が $Hol(\mathbb{C}^2)$ から自身への連続線形写像ではないので、同じ結果を与えないから注意しておかねばならない。

7.2 元の評価

表示を見れば定義できているところでは各 z に対して $:e_*^{z\frac{1}{i\hbar}uv}:_\kappa\in\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ であることはわかるし、(62) 式より $\kappa\in\mathbb{C}-\{\kappa>1\}\cup\{\kappa<-1\}$, ならば $:e_*^{t\frac{1}{i\hbar}uv}:_\kappa$ は t に関して急減少であることも分かる。

この節ではまず Weyl 順序表示で $\int_{-\infty}^{\infty} e_*^{t\frac{1}{i\hbar}uv}\in\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ であることを示す。

Weyl 順序表示では $e_*^{t\frac{1}{i\hbar}uv}$ は $:e_*^{t\frac{1}{i\hbar}uv}:_0=\frac{1}{\cosh\frac{t}{2}}e^{(\tanh\frac{t}{2})\frac{1}{i\hbar}2uv}$ であるから

$$:\int_{\mathbb{R}} e_*^{t\frac{1}{i\hbar}uv}dt:_0 = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\cosh\frac{t}{2}}e^{(\tanh\frac{t}{2})\frac{1}{i\hbar}2uv}dt$$

において $\cos s=\tanh\frac{t}{2}$, $-2\sin s ds=\sin^2 s dt$, とすれば 上の積分は

$$2\int_{-\pi}^{0} e^{(\cos s)\frac{1}{i\hbar}2uv}ds=\int_{-\pi}^{\pi} e^{(\cos s)\frac{1}{i\hbar}2uv}ds.$$

のように変換される。 Hansen-Bessel の公式を使うと

$$:\int_{-\infty}^{\infty} e_*^{t\frac{1}{i\hbar}uv}dt :_0=\sqrt{\frac{\pi}{2}}J_0(\frac{2}{\hbar}uv), \tag{64}$$

である。但し J_0 は固有値 0 の Bessel 関数である。

さらに $g(s)=e^{(\cos s)\frac{1}{i\hbar}uv}$ は $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ 内の連続曲線なのでそのコンパクト領域での積分も同じ空間 $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ に入る.

IntertwinerI_0^κ は $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ 上の連続写像ではないがこの場合の被積分関数には連続に働くからそのコンパクト領域での積分にも連続に働き : $\int_{\mathbb{R}} e_*^{t\frac{1}{i\hbar}uv}dt{:}_\kappa=\int_{-\pi}^{\pi}{:}e^{(\cos s)\frac{1}{i\hbar}2uv}ds{:}_\kappa$ となる。

$$:e^{(\cos s)\frac{1}{i\hbar}2uv}:_\kappa=\frac{2}{(1-\kappa)e^{\frac{1}{2}\cos s}+(1+\kappa)e^{\frac{1}{2}\cos s}}\exp\Big(\frac{e^{\cos s}-1}{(1-\kappa)e^{\cos s}+(1+\kappa)}\frac{1}{i\hbar}2uv\Big),$$

だから次が分かる :

Proposition 8 $\kappa\in\mathbb{C}-\{\kappa>1\}\cup\{\kappa<-1\}$ であれば 積分 : $\int_{-\infty}^{\infty}e_*^{t\frac{1}{i\hbar}uv}dt{:}_\kappa$ の κ-順序表示が $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ に含まれている。

おまけに、部分積分で、左辺が定義できているかぎり $\frac{d}{d\theta}\int_{-\infty}^{\infty}e_*^{e^{i\theta}t\frac{1}{i\hbar}uv}e^{i\theta}dt=0$ である。

これは 1 変数の場合と同様積分路の複素回転があるていど許されていることを示している。

この積分で定義される元を $*$-delta 関数と呼ぶ:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e_*^{t\frac{1}{i\hbar}uv}=\int_{\mathbb{R}}e_*^{-it\frac{1}{\hbar}uv}dt=\delta_*(\frac{1}{\hbar}uv).$$

$\cos s=\tanh\frac{t}{2}$ と置くと $t=\log\frac{1+\cos s}{1-\cos s}$ だから次もわかる :

Lemma 12 $f(t)$ を $[-\pi,0]$ 上で $f(\log\frac{1+\cos s}{1-\cos s})$ が連続となるような連続関数 *(たとえば $f(t)=e^{-t}$)* とすれば $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e_*^{t\frac{1}{i\hbar}uv}dt$ は $\kappa\in\mathbb{C}-\{\kappa>1\}\cup\{\kappa<-1\}$ である κ-順序表示で $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の元である。

これより特に : $\int_{\mathbb{R}}e^{-at}e_*^{t\frac{1}{i\hbar}uv}dt{:}_\kappa$, $a>0$ および : $\int_{\mathbb{R}}e^{-e^t}e_*^{t\frac{1}{i\hbar}uv}dt{:}_\kappa$ も $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の元であることが分かる。第 2 の積分を

$$\int_{\mathbb{R}}e^{-e^t}e_*^{t\frac{1}{i\hbar}uv}dt=\mathit{\Gamma}_*(\frac{1}{i\hbar}uv)\quad(\text{cf.}\S10).$$

とかいておく。

$v{*}u=uv+\frac{1}{2}i\hbar$ だから, (63) より次の limit も存在している :

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to\infty}:e_*^{t\frac{1}{i\hbar}2v*u}:_{(\kappa,\tau)}=\frac{1}{1-\kappa}e^{\frac{1}{i\hbar}\frac{1}{1-\kappa}(2uv+\frac{\tau}{1-\kappa}u^2)},\\&\lim_{t\to-\infty}:e_*^{t\frac{1}{i\hbar}2u*v}:_{(\kappa,\tau)}=\frac{1}{1+\kappa}e^{-\frac{1}{i\hbar}\frac{1}{1+\kappa}(2uv-\frac{\tau}{1+\kappa}u^2)},\\&\lim_{t\to-\infty}:e_*^{t\frac{1}{i\hbar}2v*u}:_{(\kappa,\tau)}=0,\quad\lim_{t\to\infty}:e_*^{t\frac{1}{i\hbar}2u*v}:_{(\kappa,\tau)}=0\end{aligned}\tag{65}$$

これらを次のように置く :

$$\varpi_{00}=\lim_{t\to-\infty}e_*^{t\frac{1}{i\hbar}2u*v},\quad\overline{\varpi}_{00}=\lim_{t\to\infty}e_*^{t\frac{1}{i\hbar}2u*v}.$$

これらを**真空**と呼ぶことにするが、これらのものが作用素表現を作る前に現れていること、および 2 種類のものが現れていることに注目してもらいたい。これらのことは確かに作用素表現されたところで考えれば皆自然なことである。つまり、量子論が作用素表現を作って成功したのは、Weyl 代数の中にすでにこういうものが含まれていたからである。

指数法則と連続性を使うと次がわかる

$$\varpi_{00}*_0\varpi_{00}=\varpi_{00},\quad \overline{\varpi}_{00}*_0\overline{\varpi}_{00}=\overline{\varpi}_{00}.$$

しかし次のことは作用素表現では言及されない：

Theorem 4 積 $\varpi_{00}*_0\overline{\varpi}_{00}$ どんな順序表示でも発散する。

２種類の真空を同時に使うと発散がおこるから、どちらか一方を選ぶべきであるがどのようにして選ぶのかははっきりしない。これは量子論では真空表現と呼んで真空を選ぶことに対応するが、真空にあたるものは群 $Sp(1)$ で座標変換して考えれば無数に現れる。

真空が極限 (65) として与えられたので

$$u{*}v{*}\varpi_{00} = 0 = \varpi_{00}{*}u{*}v.$$

も分かるのだが bumping identity $v{*}f(u{*}v)=f(v{*}u){*}v$ を使うと次もわかる:

Lemma 13 $v{*}\varpi_{00}=0=\varpi_{00}{*}u.$

証明 $v*$ の連続性より $v{*}\lim_{t\to-\infty} e_*^{t\frac{1}{i\hbar}2u*v}=\lim_{t\to-\infty} v{*}e_*^{t\frac{1}{i\hbar}2u*v}$ としてよいが、実解析解の一意性からすぐにわかる bumping identity を使うと (65) を使って $\lim_{t\to-\infty} e_*^{t\frac{1}{i\hbar}2v*u}{*}v=0$ がわかる。
□

物理理論としての量子論は作用素表現されていることを条件にして成立しているのだが、(拡張された)Weyl 代数は量子論に変貌すべき (互いに背反する) 二つの芽をすでに含んでいるのである。

作用素表現がついている所では結合律が成立するのは当然と思われるが、われわれの系では結合律は自明なものではない。

Lemma9 が結合律が成り立つかを調べるときに使われる最も原始的なものであったが、一般には g が多項式であっても $(f{*}g){*}h=f{*}(g{*}h)$ は成立しないので用心しなければならない。

Example 1 Lemma 10 より, $\frac{1}{i\hbar}uv$ は二つの逆元

$$(\frac{1}{i\hbar}uv)_+^{-1}=\int_{-\infty}^0 e_*^{t\frac{1}{i\hbar}uv}dt,\quad (\frac{1}{i\hbar}uv)_-^{-1}=-\int_0^\infty e_*^{t\frac{1}{i\hbar}uv}dt$$

を $Hol(\mathbb{C}^2)$ の中に持っている. これより結合律の破れ

$$\Big((\frac{1}{i\hbar}uv)_+^{-1}{*}(\frac{1}{i\hbar}uv)\Big){*}(\frac{1}{i\hbar}uv)_-^{-1} \neq (\frac{1}{i\hbar}uv)_+^{-1}{*}\Big((\frac{1}{i\hbar}uv){*}(\frac{1}{i\hbar}uv)_-^{-1}\Big),$$

がおこる。さらに $(\frac{1}{i\hbar}uv)_+^{-1}{*}(\frac{1}{i\hbar}uv)_-^{-1}$ は (当然) どんな表示でも発散する。

以下では次のような記号を用いる:

$$\delta_*(\frac{1}{\hbar}uv)=(\frac{1}{i\hbar}uv)_+^{-1}-(\frac{1}{i\hbar}uv)_-^{-1}. \tag{66}$$

一般的には結合律の破れる現象が起こるのだが, 次のような場合には結合律が成立していることがわかる: 全ての項が積公式 (1) において $i\hbar$ の formal power series として計算できるならば, 結合律は成立する (cf.[14] for detail). この事実を少し注意深く用いると次のことがわかる:

Lemma 14 $\varpi_{00}*(u^p*\varpi_{00})=0, and\ (\varpi_{00}*v^p)*\varpi_{00}=0.$

証明 $i\hbar$ に関する形式的冪級数に展開してやれば結合律がわかり, さらに bumping identity を使うと次もわかる:

$$e_*^{su*v}*(u^p*e_*^{tu*v})=(e_*^{su*v}*u^p)*e_*^{tu*v}=u^p*e_*^{(s+t)u*v+i\hbar ps}.$$

右辺は s,t に関して連続. 特に,

$$\lim_{t\to a} e_*^{su*v}*(u^p*e_*^{tu*v})=e_*^{su*v}*\lim_{t\to a}(u^p*e_*^{tu*v}).$$

これより bumping identity を使って

$$e_*^{su*v}*(u^p*\lim_{t\to -\infty} e_*^{tu*v})=e_*^{su*v}*\lim_{t\to -\infty} u^p*e_*^{tu*v}=\lim_{t\to -\infty} u^p*e_*^{(s+t)u*v+i\hbar ps}$$
$$=u^p*\lim_{t\to -\infty} e_*^{(s+t)u*v+i\hbar ps}=u^p e^{i\hbar ps}*\varpi_{00}.$$

従って次がわかる:

$$\varpi_{00}*(u^p*\varpi_{00})=\lim_{s\to -\infty} e_*^{s\frac{1}{i\hbar}u*v}*(\lim_{t\to -\infty} u^p*e_*^{t\frac{1}{i\hbar}u*v})=\lim_{s\to -\infty} u^p e^{ps}*\varpi_{00}=0.$$

同様に $(\varpi_{00}*v^p)*\varpi_{00}=0$ もわかる.

Lemma 15 任意の $f(u,v)=\sum a_{ij}u^i*v^j$ に対して,

$$\varpi_{00}*(f(u,v)*\varpi_{00})=f(0,0)\varpi_{00}=(\varpi_{00}*f(u,v))*\varpi_{00}.$$

結果として, 多項式 $p(u,v)$ をはさむ次の積の計算に結合律が成立する $\varpi_{00}*p(u,v)*\varpi_{00}$.

同じような計算で次の結合律も示せる:

$$(\varpi_{00}*v^q)*(u^p*\varpi_{00})=\delta_{p,q}p!(i\hbar)^p=\varpi_{00}*(v^q*u^p*\varpi_{00})=(\varpi_{00}*v^q*u^p)*\varpi_{00}.$$

次の式

$$\varpi_{00}*v^q*u^p*\varpi_{00}=\delta_{p,q}p!(i\hbar)^p,$$

を使って次がわかる:

Proposition 9 $\frac{1}{\sqrt{p!q!(i\hbar)^{p+q}}}u^p*\varpi_{00}*v^q$ は (p,q)-行列要素である。

Remark 1 で述べたように, $e_*^{z\frac{1}{i\hbar}uv}*f(u,v)$ は2とうりに定義されるが, どちらからも

$$e_*^{z\frac{1}{i\hbar}uv}*\varpi_{00}=e^{-\frac{1}{2}z}*\varpi_{00} \tag{67}$$

が得られる.

一方では, 次のようなことも起こる: $\frac{1}{i\hbar}uv*\delta_*(\frac{1}{\hbar}uv)=0$ だから, $\frac{d}{dt}f_t=\frac{1}{i\hbar}uv*f_t$ の実解析解としては $e_*^{t\frac{1}{i\hbar}uv}*\delta_*(\frac{1}{\hbar}uv)=\delta_*(\frac{1}{\hbar}uv)$ としなければならない. しかし, 次のような計算

$$\lim_{N\to\infty} e_*^{t\frac{1}{i\hbar}uv}*\int_{-N}^{N} e_*^{s\frac{1}{i\hbar}uv}ds=\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N} e_*^{(t+s)\frac{1}{i\hbar}uv}ds$$

をすると:
$$e_*^{(x+iy)\frac{1}{\hbar}uv}*\delta_*(\frac{1}{\hbar}uv)=e_*^{iy\frac{1}{\hbar}uv}*\delta_*(\frac{1}{\hbar}uv). \tag{68}$$
のようになる. これより (67) 式は z について正則だが, (68) 式は単に連続, つまり, $z=x+iy$ については実解析的でなくなっている. このような状況では, $*$-積をどのように定義したかを常に明示する必要がある.

8 逆元とその解析接続

1 変数のときと同様に (60) 式から次の二つの積分が収束していることが分かる:
$$:\int_{-\infty}^{0}e^{tz}e_*^{t\frac{1}{i\hbar}uv}dt:_0=\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{\frac{1}{2}tz}}{\cosh\frac{1}{2}t}e^{\frac{1}{i\hbar}2uv\tanh\frac{1}{2}t}dt,\quad \mathrm{Re}z>-\frac{1}{2} \tag{69}$$
$$:-\int_{0}^{\infty}e^{tz}e_*^{t\frac{1}{i\hbar}uv}dt:_0=-\int_{0}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{2}tz}}{\cosh\frac{1}{2}t}e^{\frac{1}{i\hbar}2uv\tanh\frac{1}{2}t}dt,\quad \mathrm{Re}z<\frac{1}{2} \tag{70}$$
(69) も (70) も $z+\frac{1}{i\hbar}uv$ の逆元を与えている。すこし面倒な計算だがこれは $\kappa\in\mathbb{C}-\{\kappa>1\}\cup\{\kappa<-1\}$ をみたす, 任意の (κ,τ) 表示に関して逆元になっていることも確かめられる。

これらを $(z+\frac{1}{i\hbar}uv)^{-1}_{+*}$, $(z+\frac{1}{i\hbar}uv)^{-1}_{-*}$ と書くことにする.

次のことはこの二つの逆元の差は佐藤超関数のようにも見えるといっている:

Proposition 10 $-\frac{1}{2}<\mathrm{Re}z<\frac{1}{2}$ ならば, 二つの逆元の差は
$$(z+\frac{1}{i\hbar}uv)^{-1}_{+*}-(z+\frac{1}{i\hbar}uv)^{-1}_{-*}=\int_{-\infty}^{\infty}e_*^{t(z+\frac{1}{i\hbar}uv)}dt. \tag{71}$$
これの (κ,τ)-順序表示はこの帯領域上で正則である.

右辺をもっと精密に見ておこう. $-\frac{1}{2}<\mathrm{Re}z\le 0$ においては, 変数変換 $\tanh\frac{1}{2}t=\cos s$ で (71) 式の右辺は
$$2\int_{-\pi}^{0}(\frac{1+\cos s}{1-\cos s})^{z}e^{(\cos s)\frac{1}{i\hbar}2uv}ds$$
となり, $0\le\mathrm{Re}z<\frac{1}{2}$ においては $-\cos s=\tanh\frac{t}{2}$, $2\sin s ds=\sin^2 s dt$, と置くと (71) 式の右辺は次のように変わる:
$$2\int_{0}^{\pi}(\frac{1+\cos s}{1-\cos s})^{-z}e^{(\cos s)\frac{1}{i\hbar}uv}ds.$$
これより Lemma 12 を使って $\int_{-\infty}^{\infty}e_*^{t(z+\frac{1}{i\hbar}uv)}dt$ は $Hol(\mathbb{C}^2)$ に属することがわかる.

一方, 積分の変数変換で
$$((-z)+\frac{1}{i\hbar}uv)^{-1}_{-*}=-\int_{0}^{\infty}e_*^{-t(z-\frac{1}{i\hbar}uv)}dt=-\int_{-\infty}^{0}e_*^{(z-\frac{1}{i\hbar}uv)}dt.$$
だから、
$$(z-\frac{1}{i\hbar}uv)^{-1}_{-*}=-((-z)+\frac{1}{i\hbar}uv)^{-1}_{-*}. \tag{72}$$

であり、これは $(z+\frac{1}{i\hbar}uv)^{-1}_{+*}$ の正則域と同じ領域 Re$z>-\frac{1}{2}$ で正則である。

これらの結果は Weyl 順序表示で述べられており、証明もそこで行ったが $\kappa\in\mathbb{C}-\{\kappa>1\}\cup\{\kappa<-1\}$ の場合には $:e_*^{t\frac{1}{i\hbar}uv}:_\kappa$ は t につき急減少だから、同じ計算で次がわかる:

Proposition 11 Re$z>-\frac{1}{2}$ なる任意の z で二つの逆元 $(z+\frac{1}{i\hbar}uv)^{-1}_{+*}$, および $(z-\frac{1}{i\hbar}uv)^{-1}_{-*}$ は $\kappa\in\mathbb{C}-\{\kappa>1\}\cup\{\kappa<-1\}$ なる κ-順序表示で定義される。

しかし $(z+\frac{1}{i\hbar}uv)^{-1}_{+*}*(-z-\frac{1}{i\hbar}uv)^{-1}_{-*}$ はどんな順序表示でも発散する。

しかし, 普通のレゾルベント公式で:

Proposition 12 *If* $z+w\neq0$, *then*

$$\frac{1}{z+w}\Big((z+\frac{1}{i\hbar}uv)^{-1}_{+*}+(w-\frac{1}{i\hbar}uv)^{-1}_{-*}\Big)$$

は $(z+\frac{1}{i\hbar}uv)*(w-\frac{1}{i\hbar}uv)$ の逆元であることがわかる. 特に, 任意の整数 n と Re$z>-(n+\frac{1}{2})$ なる z について

$$\frac{1}{2n}\big((1+\frac{1}{n}(z+\frac{1}{i\hbar}uv))^{-1}_{*+}+(1-\frac{1}{n}(z+\frac{1}{i\hbar}uv))^{-1}_{*-}\big)$$

は $\kappa\in\mathbb{C}-\{\kappa>1\}\cup\{\kappa<-1\}$ なる κ-順序表示で $1-\frac{1}{n^2}(z+\frac{1}{i\hbar}uv)^2_*$ の逆元を与える.

8.1 逆元の解析接続

この節では κ の領域は常に $\kappa\in\mathbb{C}-\{\kappa>1\}\cup\{\kappa<-1\}$ とする. $(z\pm\frac{1}{i\hbar}uv)^{-1}_{\pm*}$ は領域 Re $z>-\frac{1}{2}$ で正則だったが, 逆元だからどんな $C\neq0$ に対しても $(z\pm\frac{1}{i\hbar}uv)^{-1}_{\pm*}=C(C(z\pm\frac{1}{i\hbar}uv))^{-1}_{\pm*}$ が成立すると当然期待される. これは実際 $C=e^{i\theta}$ とおいて θ での微分 $e^{i\theta}\int_{-\infty}^{0}e_*^{e^{i\theta}t(z\pm\frac{1}{i\hbar}uv)}dt$ を計算すると:

(κ,τ)-順序表示では位相の部分は t について有界であり, amplitude の部分は

$$\frac{2e^{i\theta}tz}{(1-\kappa)e^{e^{i\theta}t/2}+(1+\kappa)e^{-e^{i\theta}t/2}},\quad \kappa\neq1.$$

となるから, まず積分が Re $e^{i\theta}(z\pm\frac{1}{2})>0$ のもとで収束していることがわかり, 部分積分で θ での微分が消えることがわかる.

これより $(z\pm\frac{1}{i\hbar}uv)^{-1}_{\pm*}$ は領域 $\mathbb{C}-\{-\infty<t<-\frac{1}{2}\}$ で正則であることがわかる。

次に bumping identity を考えれば $(uv)*v=v*(uv-i\hbar)$ から v の逆元があるようなところでは、次のような関数等式が期待できる

$$v_+^{-1}*(z+\frac{1}{i\hbar}uv)^{-1}_{+*}*v=(z-1+\frac{1}{i\hbar}uv)^{-1}_{+*},\quad v_+^{-1}*(z-\frac{1}{i\hbar}uv)^{-1}_{-*}*v=(z+1-\frac{1}{i\hbar}uv)^{-1}_{-*}$$

解析接続は このような関数等式を使って行うのである。ここでは v^{-1} の代わりに左逆元 v° を使って証明を示す。

まず, 公式 (60) は逆元

$$(u*v)^{-1}_{-*}=-\frac{1}{i\hbar}\int_0^\infty e_*^{t\frac{1}{i\hbar}u*v}dt,\quad (v*u)^{-1}_{+*}=\frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{0}e_*^{t\frac{1}{i\hbar}v*u}dt.$$

を与えることに注意する．これらは u, v の左/右逆元をあたえる:

$$v^\circ = u*(v*u)^{-1}_{+*}, \quad u^\bullet = v*(u*v)^{-1}_{-*},$$

これらは次の式から容易にわかる

$$v*v^\circ = 1, \quad v^\circ * v = 1-\varpi_{00}, \quad u*u^\bullet = 1, \quad u^\bullet * u = 1-\varpi_{00}.$$

Bumping identity より

$$v*(z+\frac{1}{i\hbar}uv)*v^\circ = z+1+\frac{1}{i\hbar}uv, \quad v^\circ*(z+\frac{1}{i\hbar}uv)*v = (1-\varpi_{00})*(z-1+\frac{1}{i\hbar}uv).$$

もわかる．Bumping identity を繰り返し使って次の有用な公式を得る:

$$(u*(v*u)^{-1}_{+*})^n * \varpi_{00} = \frac{1}{n!}(\frac{1}{i\hbar}u)^n * \varpi_{00}. \tag{73}$$

v^{-1} の代わりに v° を使って, 逆元の解析接続は、$*$-積の連続性に注意しながら次の計算で与えられる：

$$\begin{aligned}
v^\circ*(z+\frac{1}{i\hbar}uv)^{-1}_{+*} &= u*\int_{-\infty}^0 e_*^{t(\frac{1}{i\hbar}uv+\frac{1}{2})}dt * \int_{-\infty}^0 e_*^{s(z+\frac{1}{i\hbar}uv)}ds \\
&= u*\int_{-\infty}^0\int_{-\infty}^0 e_*^{t(\frac{1}{i\hbar}uv+\frac{1}{2})}*e_*^{s(z+\frac{1}{i\hbar}uv)}dtds \\
&= \int_{-\infty}^0\int_{-\infty}^0 e^{t\frac{1}{2}+sz}u*e_*^{(t+s)\frac{1}{i\hbar}uv}dtds \\
&= \int_{-\infty}^0\int_{-\infty}^0 e^{t\frac{1}{2}+sz-(t+s)}e_*^{(t+s)\frac{1}{i\hbar}uv}*udtds
\end{aligned}$$

これより両辺が定義できているという条件で次の式がわかる:

$$\begin{aligned}
(v^\circ*(z+\frac{1}{i\hbar}uv)^{-1}_{+*})*v &= \int_{-\infty}^0\int_{-\infty}^0 e^{-t\frac{1}{2}+s(z-1)}e_*^{(t+s)\frac{1}{i\hbar}uv}*(u*v)dtds \\
&= \int_{-\infty}^0 (u*v)*e_*^{t\frac{1}{i\hbar}u*v}dt * \int_{-\infty}^0 e_*^{s(z-1+\frac{1}{i\hbar}uv)}ds \\
&= (1-\varpi_{00})*(z-1+\frac{1}{i\hbar}uv)^{-1}_{*+}.
\end{aligned}$$

さらに, $(z-1+\frac{1}{i\hbar}uv)^{-1}_{*+}$ が定義できてさえいれば

$$\varpi_{00}*(z-1+\frac{1}{i\hbar}uv)^{-1}_{*+} = (z-\frac{1}{2})^{-1}\varpi_{00},$$

が定義されることに注意して次がわかる:

$$\big(v^\circ*(z+\frac{1}{i\hbar}uv)^{-1}_{+*}\big)*v-(z-\frac{1}{2})^{-1}\varpi_{00} = \big(z-1+\frac{1}{i\hbar}uv\big)^{-1}_{*+}. \tag{74}$$

ところで, $(z-\frac{1}{2})^{-1}\varpi_{00}$ は独立に定義できるものであるから, (74) 式が解析接続の公式をあたえるのである：

Theorem 5 逆元 $(z+\frac{1}{i\hbar}uv)^{-1}_{+*}$, $(z-\frac{1}{i\hbar}uv)^{-1}_{-*}$ は $\mathbb{C}-\{-(\mathbb{N}+\frac{1}{2})\}$ 上で z の正則関数である．特に $(z^2-(\frac{1}{i\hbar}uv)^2)^{-1}_{\pm*}$ は上の領域で正則な関数として与えられる．

([12], [14] も参照)

この公式はちょっと奇妙に見える．というのは $z+\frac{1}{i\hbar}uv$ は $z=n+\frac{1}{2}$ で消えていないで $(z+\frac{1}{i\hbar}uv)_{+*}^{-1}$ はその場所 $z=n+\frac{1}{2}$ で singular となっているのに $z\notin-(\mathbb{N}+\frac{1}{2})$ では $(z+\frac{1}{i\hbar}uv)*(z+\frac{1}{i\hbar}uv)_{+*}^{-1}=1$ なので, 特異点と言ってもすべて除ける特異点になっているのである．

正則関数ばかり考えているのではないから, この特異点を除くわけにはいかない．

次の計算に注意する:

$$\int_{-\infty}^{0}(z+\frac{1}{i\hbar}uv)*e_*^{t(z+\frac{1}{i\hbar}uv)}dt=\begin{cases}1 & z>-\frac{1}{2}\\ 1-\varpi_{00} & z=-\frac{1}{2}\end{cases},$$

$$\int_{-\infty}^{0}(z-\frac{1}{i\hbar}uv)*e_*^{t(z-\frac{1}{i\hbar}uv)}dt=\begin{cases}1 & z>-\frac{1}{2}\\ 1-\overline{\varpi}_{00} & z=-\frac{1}{2}\end{cases}.$$

これらの公式を参考にして, $*$-積を次のように拡張する: For every $p(u,v)$ or $p(u,v)=e_*^{s\frac{1}{i\hbar}uv}$,

$$p(u,v)*(z\pm\frac{1}{i\hbar}uv)_{\pm*}^{-1}=\lim_{N\to\infty}p(u,v)*\int_{-N}^{0}e_*^{t(z\pm\frac{1}{i\hbar}uv)}dt. \tag{75}$$

公式 (73) を使って次がわかる:

Theorem 6 積の定義として定義式 (75) を使うと

$$(z+\frac{1}{i\hbar}uv)*(z+\frac{1}{i\hbar}uv)_{+*}^{-1}=\begin{cases}1 & z\notin-(\mathbb{N}+\frac{1}{2})\\ 1-\frac{1}{n!}(\frac{1}{i\hbar}u)^n*\varpi_{00}*v^n & z=-(n+\frac{1}{2})\end{cases}$$

$$(z-\frac{1}{i\hbar}uv)*(z-\frac{1}{i\hbar}uv)_{-*}^{-1}=\begin{cases}1 & z\notin-(\mathbb{N}+\frac{1}{2})\\ 1-\frac{1}{n!}(\frac{1}{i\hbar}v)^n*\overline{\varpi}_{00}*u^n & z=-(n+\frac{1}{2})\end{cases}$$

これらの公式は、特に

$$(1+\frac{1}{n}(z+\frac{1}{i\hbar}uv))*(1+\frac{1}{n}(z+\frac{1}{i\hbar}uv))_{+*}^{-1}=\begin{cases}1 & z\notin-(\mathbb{N}+n+\frac{1}{2})\\ 1-\frac{1}{k!}(\frac{1}{i\hbar}u)^k*\varpi_{00}*v^k & z=-(k+n+\frac{1}{2})\end{cases} \tag{76}$$

といった公式も与えている。

次のことにも注意:

$$\begin{aligned}&(z^2-(\frac{1}{i\hbar}uv)^2)*\frac{1}{2z}\big((z+\frac{1}{i\hbar}uv)_{+*}^{-1}+(z-\frac{1}{i\hbar}uv)_{-*}^{-1}\big)\\ &=\begin{cases}1 & z\notin-(\mathbb{N}+\frac{1}{2})\\ 1-(z-\frac{1}{i\hbar}uv)*\frac{1}{k!}(\frac{1}{i\hbar}u)^k*\varpi_{00}*v^k+(z+\frac{1}{i\hbar}uv)\frac{1}{k!}(\frac{1}{i\hbar}v)^k*\overline{\varpi}_{00}*u^k & z=-(k+n+\frac{1}{2}).\end{cases}\end{aligned}$$

作用素表現を決めて話をしてしまえば、どちらの逆元を採用すべきかは表現のほうがきめてくれる。では、作用素表現を決めてしまえばよいではないかと考えるのはもっともだが、その選び方が沢山ある。勝手に選ぶというのも無責任な話ではある．拡張された Weyl 代数は作用素表現される以前の量子論をすべて含んでいるように思えるのである．

となると、物理としての量子論と数学としての拡張された Weyl 代はいったい何が違うのだろうか？　数学と物理の根本的違いは時間の扱い方である。

問題意識はこうである：数学が面積とか体積の概念を (定義という形で取り込んで) 数学の１分野と認め、確率概念を測度論の公理から導いて数学の１分野と認めたように、時間とそれの正準共役であるエネルギー概念を**定義**して、これを数学の１分野として組み込めないものだろうか？

この問題意識をはっきり掲げることが今 (数理物理を迷走させないために)、最も大切なことだと私は思っている。

9 無限積公式

古典的無限積の公式 $\sin\pi x{=}\pi x\prod_{k=1}^{\infty}(1-\frac{x^2}{k^2})$. を思い出して、これを次のように書き換えよう：

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-\frac{x^2}{k^2})=\frac{1}{2i}\int\chi_{[-\pi,\pi]}(t)e^{itx}dt=\lim_{n\to\infty}\int\prod^{n}(1+\frac{1}{k^2}\partial_t^2)\delta(t)e^{itx}dt.$$

但し $\chi_{[-\pi,\pi]}(t)$ は区間 $[-\pi,\pi]$ の特性関数である。これより、超関数の位相で

$$\chi_{[-\pi,\pi]}(t)=2i\lim_{n\to\infty}\prod(1+\frac{1}{k^2}\partial_t^2)\delta(t)$$

がわかる。

$\kappa\in\mathbb{C}-\{\kappa>1\}\cup\{\kappa<-1\}$, かつ $\kappa\notin i\mathbb{R}$ なる κ-順序表示で考えるが、計算は正規順序表示から intertwiner を経由して行う：

$$\int\chi_{[-\pi,\pi]}(t){:}e_*^{it(z\pm\frac{1}{i\hbar}uv)}{:}_\kappa dt=\int\chi_{[-\pi,\pi]}(t)e^{itz}I_1^{\kappa}(e^{\frac{1}{i\hbar}e^{-(1\mp\frac{\dot{\imath}}{2}t)}uv})dt.$$

$[-\pi,\pi]$ で $\psi{=}1$ となる cut off 関数 $\psi(t)$ (compact support) を使って,

$$\int\chi_{[-\pi,\pi]}(t){:}e_*^{it(z+\frac{1}{i\hbar}uv)}{:}_\kappa dt=2i\lim_{n\to\infty}\int\prod^{n}(1+\frac{1}{k^2}\partial_t^2)\delta(t)\psi(t)e^{itz}e^{\frac{1}{i\hbar}e^{-(1-\frac{\dot{\imath}}{2}t)}uv}dt$$

これより部分積分で

$$\lim_{n\to\infty}\int\delta(t)\prod^{n}(1+\frac{1}{k^2}\partial_t^2)\psi(t)e^{itz}e^{\frac{1}{i\hbar}e^{-(1\mp\frac{\dot{\imath}}{2}t)}uv}dt=\lim_{n\to\infty}\prod^{n}{:}(1+\frac{1}{k^2}\partial_t^2)e_*^{it(z+\frac{1}{i\hbar}uv)}{:}_\kappa dt.$$

これより κ-順序表示で次がわかる：

$$\int\chi_{[-\pi,\pi]}(t)e_*^{it(z+\frac{1}{i\hbar}uv)}dt=\lim_{n\to\infty}\prod^{n}(1-\frac{1}{k^2}(z+\frac{1}{i\hbar}uv)^2)_*.$$

$$\sin_*\pi(z+\frac{1}{i\hbar}uv)=\pi(z+\frac{1}{i\hbar}uv)*\int\chi_{[-\pi,\pi]}(t)e_*^{it(z+\frac{1}{i\hbar}uv)}dt\in Hol(\mathbb{C}^2)$$

に注意して, $Hol(\mathbb{C}^2)$ で次の無限積の公式を得る：

$$\sin_*\pi(z+\frac{1}{i\hbar}uv)=\pi(z+\frac{1}{i\hbar}uv)*\lim_{n\to\infty}*\prod^{n}(1-\frac{1}{k^2}(z+\frac{1}{i\hbar}uv)^2)_*. \tag{77}$$

特に, 次もわかる

Proposition 13 $\kappa\notin i\mathbb{R}$ かつ $\kappa\in\mathbb{C}-\{\kappa>1\}\cup\{\kappa<-1\}$, なる κ-順序表示で

$$\sin_*\pi(z+\frac{1}{i\hbar}uv)=\pi(z+\frac{1}{i\hbar}uv)*\lim_{n\to\infty}\prod^{n}*(1-\frac{1}{k^2}(z+\frac{1}{i\hbar}uv)^2).$$

である。特に これは $z\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}$ で 0 である。

この公式は、あとで証明するが、一応

$$\sin_*\pi(z+\frac{1}{i\hbar}uv)=$$
$$\pi(z+\frac{1}{i\hbar}uv)*\lim_{k\to\infty}\prod^{n}*(1-\frac{1}{k}(z+\frac{1}{i\hbar}uv))*e_*^{\frac{1}{k}(z+\frac{1}{i\hbar}uv)}*\prod^{n}*(1+\frac{1}{k}(z+\frac{1}{i\hbar}uv))*e_*^{-\frac{1}{k}(z+\frac{1}{i\hbar}uv)}.$$

のように分解して書いてみることができる。ここで逆元の作られ方、二種類の逆元があったことをを思い出してもらいたい。どの位逆元がかけられるであろうか？　無論、無制限に逆元がかけられたら 0=1 という矛盾につきあたるから、どこかで止まらねばならない。

§10 節で, $*$-gamma 関数が逆元の種類に応じて 2 種類作れることをしめし、その無限積の公式を与えるが、その前に次のことも考えておこう。

9.1 $\left(1+\frac{1}{n_i}(z+\frac{1}{i\hbar}uv)\right)_{*+}^{-1}$ との積

まず積 $(z+\frac{1}{i\hbar}uv)_{*\pm}^{-1}*\sin_*\pi(z+\frac{1}{i\hbar}uv)$ を二通りの方法で考えよう。一つ目は無限積を使って次のように考える:

$$(z+\frac{1}{i\hbar}uv)_{*\pm}^{-1}*\sin_*\pi(z+\frac{1}{i\hbar}uv)=\lim_{n\to\infty}(z+\frac{1}{i\hbar}uv)_{*\pm}^{-1}*\Big((z+\frac{1}{i\hbar}uv)*\prod^{n}*(1-\frac{1}{k^2}(z+\frac{1}{i\hbar}uv)^2)\Big) \quad (78)$$

$(z+\frac{1}{i\hbar}uv)*\prod^n*(1-\frac{1}{k^2}(z+\frac{1}{i\hbar}uv)^2)$ は多項式の積だから Lemma 9 を使うと

$$(z+\frac{1}{i\hbar}uv)_{*\pm}^{-1}*\sin_*\pi(z+\frac{1}{i\hbar}uv)=\prod_{1}^{\infty}*(1-\frac{1}{k^2}(z+\frac{1}{i\hbar}uv)^2). \quad (79)$$

二つ目は

$$(z+\frac{1}{i\hbar}uv)_{*\pm}^{-1}*\sin_*\pi(z+\frac{1}{i\hbar}uv)=\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{0}e_*^{t(z+\frac{1}{i\hbar}uv)}*\sin_*\pi(z+\frac{1}{i\hbar}uv) \quad (80)$$

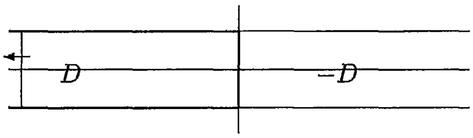
とする。これは積分をまとめて

$$\frac{1}{2i}\int_{-\infty+\pi i}^{0+\pi i}e_*^{t(z+\frac{1}{i\hbar}uv)}dt-\frac{1}{2i}\int_{-\infty-\pi i}^{0-\pi i}e_*^{t(z+\frac{1}{i\hbar}uv)}dt.$$

のようにも書かれる。上の積分に $-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}e^{it(z+\frac{1}{i\hbar}uv)}dt$ の部分を加えると、領域

$$D=\{z\in\mathbb{C};\mathrm{Re}\,z<0,-\pi<\mathrm{Im}\,z<\pi\}$$

の境界に沿った時計まわりの一周積分となる



Lemma 16 $:e_*^{z\frac{1}{i\hbar}uv}:_\kappa$ は領域$D\cup(-D)$内に高々1個の特異点しか持たない. もし, κ が命題 *13* と同じ条件でさらに $\mathrm{Re}\,\kappa>0$ のときのには, D 内に特異点は無い.

証明 $:e_*^{z\frac{1}{i\hbar}uv}:_\kappa=\frac{2}{(1-\kappa)e^{\frac{z}{2}}+(1+\kappa)e^{-\frac{z}{2}}}\exp\frac{e^{\frac{z}{2}}-e^{-\frac{z}{2}}}{(1-\kappa)e^{\frac{z}{2}}+(1+\kappa)e^{-\frac{z}{2}}}\frac{2}{i\hbar}uv$. だから特異点は

$$(1-\kappa)e^{\frac{z}{2}}+(1+\kappa)e^{-\frac{z}{2}}=0,\quad e^z=\frac{\kappa+1}{\kappa-1},\quad \kappa\neq\pm1$$

であたえられる. だから $z=\log\frac{\kappa+1}{\kappa-1}+2\pi ni$. 従って, 特異点が D の境界上にあるのは, $\kappa\in[-1,0]\cup\mathbb{R}i$ の場合だけであり, 特に $\mathrm{Re}\,\kappa>0$ ならば $|\frac{\kappa+1}{\kappa-1}|>1$ で特異点 $z=\log\frac{\kappa+1}{\kappa-1}+2\pi ni$ は正の実部を持つから D の内部には特異点は無い.

Proposition 14 $\mathrm{Re}\,\kappa>0$ かつ $\kappa\notin\mathbb{C}-\{\kappa<-1\}$ なる κ-順序表示で次が成立,

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{0}e_*^{t(z+\frac{1}{i\hbar}uv)}*\sin_*\pi(z+\frac{1}{i\hbar}uv)=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}e^{it(z+\frac{1}{i\hbar}uv)}dt.$$

(77) 式より, この積分は (79) と同じ結果 $\prod_1^\infty*(1-\frac{1}{k^2}(z+\frac{1}{i\hbar}uv)^2)$ を与える.

Proposition 15 $\mathrm{Re}\,\kappa>0$ かつ $\kappa\notin\mathbb{C}-\{\kappa<-1\}$ なる κ-順序表示で, 積 $\sin_*\pi(z+\frac{1}{i\hbar}uv)*(z+\frac{1}{i\hbar}uv)_{*+}^{-1}$ は z に関して整関数である. つまり $(z+\frac{1}{i\hbar}uv)_{*+}^{-1}$ の $-(\mathbb{N}+\frac{1}{2})$ における全ての特異性は公式 (76) より消える.

Remark 2 $\mathrm{Re}\,\kappa<0$ だと $\kappa\notin\mathbb{C}-\{\kappa<-1\}$ でも D は特異点を含むので Lemma 14 の一周積分に留数が現れる. このとき (80) の κ-表示は

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}e^{it(z+\frac{1}{i\hbar}uv)}dt+\mathrm{Res}(e_*^{t(z+\frac{1}{i\hbar}uv)}).$$

と $e_*^{t(z+\frac{1}{i\hbar}uv)}$ の D 内の特異点の留数の和となる. このことから κ-順序表示においても連続性が一般には保たれないことがわかる. この留数は最後の節で計算する.

10 Star gamma 関数

普通の Γ-関数, β-関数は

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt,\quad B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

と定義されるから, $t=e^s$ と置き換えて

$$\Gamma(z)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-e^s}e^{sz}ds,\quad B(x,y)=\int_{-\infty}^{0}e^{sx}(1-e^s)^{y-1}ds$$

これを参考にして star gamma 関数　star beta 関数を x を $z\pm\frac{uv}{i\hbar}$ で置き換えることで定義する:

$$\begin{aligned}\varGamma_*(z\pm\frac{uv}{i\hbar}) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^{\tau}}e_*^{\tau(z\pm\frac{uv}{i\hbar})}d\tau \\ B_*(z\pm\frac{uv}{\hbar i},y) &= \int_{-\infty}^{0} e_*^{\tau(z\pm\frac{uv}{i\hbar})}(1-e^{\tau})^{y-1}d\tau.\end{aligned} \tag{81}$$

これらの Weyl-順序表示は

$$:\varGamma_*(z\pm\frac{uv}{i\hbar}):_0 = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-e^{\tau}+z\tau}}{\cosh\frac{1}{2}\tau}e^{\pm\frac{1}{i\hbar}uv\tanh\frac{1}{2}\tau}d\tau.$$

$$:B_*(z\pm\frac{uv}{i\hbar},y):_0 = \int_{-\infty}^{0}\frac{(1-e^{\tau})^{y-1}e^{\tau z}}{\cosh\frac{1}{2}\tau}e^{\pm\frac{1}{i\hbar}uv\tanh\frac{1}{2}\tau}d\tau$$

だから, κ-順序表示は intertwiner I_0^{κ} を使って求められる. たとえば

$$:\varGamma_*(z\pm\frac{uv}{\hbar i}):_{\kappa} = \lim_{N,N'\to\infty}\int_{-N}^{N'}\frac{e^{-e^{\tau}+z\tau}}{\cosh\frac{1}{2}\tau}I_0^{\kappa}(e^{\pm\frac{1}{\hbar i}uv\tanh\frac{1}{2}\tau})d\tau \tag{82}$$

右辺は κ に関する稠密開領域 (cf. 命題 13) で収束する.

Proposition 16 任意の $uv\in\mathbb{C}$,Re$z>-\frac{1}{2}$ なる任意の $z\in\mathbb{C}$ に対して (82) 式の右辺は収束する. これは z に関してこの領域で正則であるが, $\varGamma_*(-\frac{1}{2}\pm\frac{uv}{\hbar i})$ は *singular* である.

10.1　$\varGamma_*(z\pm\frac{uv}{\hbar i})$ の解析接続

普通の gamma 関数の場合と同様, 部分積分で次の公式がわかる：

$$\varGamma_*(z+1\pm\frac{uv}{\hbar i})=(z\pm\frac{uv}{\hbar i})*\varGamma_*(z\pm\frac{uv}{\hbar i}). \tag{83}$$

積分記号下での結合律と連続性に注意して得られる

$$\varGamma_*(z\pm\frac{uv}{\hbar i})=(z\pm\frac{uv}{\hbar i})_{\pm *}^{-1}*\varGamma_*(z+1\pm\frac{uv}{\hbar i}),$$

を使って 次が分かる：

Proposition 17 $\varGamma_*(z\pm\frac{uv}{\hbar i})$ は $z\in\mathbb{C}-\{-(\mathbb{N}+\frac{1}{2})\}$. 上の正則関数に拡張される。

$e_*^{\tau(z\pm\frac{uv}{\hbar i})}*\varpi_{00}=(z\pm\frac{1}{2})^{-1}\varpi_{00}$, であることに注意すると, これらの $*$-関数について次のような注目すべき公式を得る:

$$\begin{aligned}\varGamma_*(z\pm\frac{uv}{\hbar i})*\varpi_{00} &\equiv \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N} e^{-e^{\tau}}e_*^{\tau(z\pm\frac{uv}{\hbar i})}d\tau*\varpi_{00} = \varGamma(z\pm\tfrac{1}{2})\varpi_{00} \\ B_*(z\pm\frac{uv}{\hbar i},y)*\varpi_{00} &\equiv \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N} e_*^{\tau(z\pm\frac{uv}{\hbar i})}(1-e^{\tau})^{y-1}d\tau*\varpi_{00} = B(z\pm\tfrac{1}{2},y)\varpi_{00}\end{aligned} \tag{84}$$

10.2 無限積公式

上の記号をそのまま使って

$$B_*(z+\frac{uv}{\hbar i},1)=\int_{-\infty}^{0}e_*^{\tau(z+\frac{uv}{\hbar i})}d\tau=\big(z+\frac{uv}{i\hbar}\big)_{*+}^{-1},\quad \mathrm{Re}\,z>-\frac{1}{2} \tag{85}$$

$$B_*(z-\frac{uv}{\hbar i},1)=\int_{-\infty}^{0}e_*^{\tau(z-\frac{uv}{i\hbar})}d\tau=\big(z-\frac{uv}{i\hbar}\big)_{*-}^{-1},\quad \mathrm{Re}\,z>-\frac{1}{2} \tag{86}$$

次のように計算する

$$\Gamma_*(z\pm\frac{uv}{\hbar i})\Gamma(y)=\iint_{\mathbb{R}^2}e_*^{\tau(z\pm\frac{uv}{\hbar i})}e^{\sigma y}e^{-(e^\tau+e^\sigma)}d\tau d\sigma$$

変数変換を

$$\tau=t+s,\quad e^\sigma=e^t(1-e^s),\quad \text{where }-\infty<t<\infty,\ -\infty<s<0.$$

とし, $e^\tau+e^\sigma=e^t$ に注意すると, これは $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_-$ と $\mathbb{R}^2$ の間の微分同相をあたえることがわかる. Jacobian は $d\tau d\sigma=\frac{1}{1-e^s}dtds$ で与えられる. これより次のような γ-関数と β-関数の基本的関係を得る:

$$\begin{aligned}\Gamma_*(z\pm\frac{uv}{\hbar i})\Gamma(y)&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{0}e_*^{t(y+z\pm\frac{uv}{\hbar i})}e^{-e^t}{*}e_*^{s(z\pm\frac{uv}{\hbar i})}(1-e^s)^{y-1}dtds\\&=\Gamma_*(y+z\pm\frac{uv}{\hbar i}){*}B_*(z\pm\frac{uv}{\hbar i},y).\end{aligned} \tag{87}$$

部分積分で

$$(z\pm\frac{uv}{\hbar i}){*}B_*(z\pm\frac{uv}{\hbar i},y+1)=yB_*(1+z\pm\frac{uv}{\hbar i},y+1).$$

を得る. これを示すには,

$$\frac{d}{d\tau}e_*^{\tau(z\pm\frac{uv}{\hbar i})}=(z\pm\frac{uv}{\hbar i}){*}e_*^{\tau(z\pm\frac{uv}{\hbar i})},\quad \frac{d}{d\tau}e^{-e^\tau}=-e^\tau e^{-e^\tau},$$

および

$$\lim_{\tau\to\pm\infty}e^{-e^\tau+z\tau}e_*^{\pm\tau\frac{uv}{\hbar i}}=0\quad\text{for}\quad \mathrm{Re}\,z>-\frac{1}{2}$$

に注意する.

$B_*(z\pm\frac{uv}{\hbar i},y+1)=B_*(z\pm\frac{uv}{\hbar i},y)-B(1+z\pm\frac{uv}{\hbar i},y)$ なので, 次の関数関係式

$$B_*(z\pm\frac{uv}{\hbar i},y)=\frac{y+z\pm\frac{uv}{\hbar i}}{y}{*}B_*(z\pm\frac{uv}{\hbar i},y+1) \tag{88}$$

が得られるから, (88) 式を繰り返し使って次を得る：

$$B_*(z\pm\frac{uv}{\hbar i},y)=\frac{(y+z\pm\frac{uv}{\hbar i}){*}(y+1+z\pm\frac{uv}{\hbar i})}{y(y+1)}{*}B_*(z\pm\frac{uv}{\hbar i},y+2).$$

次のような記号を用いる：

$$\{a\}_n=a(a+1)\cdots(a+n-1),\quad \{A\}_{*n}=A{*}(A+1){*}\cdots{*}(A+n-1).$$

これを使って

$$B_*(z\pm\frac{uv}{\hbar i},y)=\frac{\{y+z\pm\frac{uv}{\hbar i}\}_{*n}}{\{y\}_n}*B_*(z\pm\frac{uv}{\hbar i},y+n). \tag{89}$$

同様, 部分積分で次の公式も得られる:

$$\Gamma_*(1+z\pm\frac{uv}{\hbar i})=(z\pm\frac{uv}{\hbar i})*\Gamma_*(z\pm\frac{uv}{\hbar i}),\quad \text{for}\quad \mathrm{Re}\,z>-\frac{1}{2}. \tag{90}$$

(90) 式を繰り返し使って次がわかる:

$$\Gamma_*(n+1+z\pm\frac{uv}{\hbar i})=\Gamma_*(z\pm\frac{uv}{\hbar i})*\{z\pm\frac{uv}{\hbar i}\}_{*n}. \tag{91}$$

Lemma 17 $B_*(z\pm\frac{uv}{\hbar i},n+1)=n!\prod_{k=0}^{n}*(k+z\pm\frac{uv}{\hbar i})_{\pm}^{-1}$

証明 右辺は $\frac{n!}{\{z\pm\frac{uv}{\hbar i}\}_{*n+1}^{(\pm)}}$ と書いて良いであろう. $n=0$ の場合は (86), (85) 式である. n で正しいとしよう. $n+1$ の場合を考えると

$$B_*(z\pm\frac{uv}{\hbar i},n+2)=\int_{-\infty}^{0}e_*^{\tau(z\pm\frac{uv}{\hbar i})}(1-e^{\tau})(1-e^{\tau})^n d\tau=\frac{n!}{\{z\pm\frac{uv}{\hbar i}\}_{*n+1}^{(\pm)}}-\frac{n!}{\{1+z\pm\frac{uv}{\hbar i}\}_{*n+1}^{(\pm)}}$$

これより

$$B_*(z\pm\frac{uv}{\hbar i},n+2)=\frac{(n+1)!}{\{z\pm\frac{uv}{\hbar i}\}_{*n+2}^{(\pm)}}$$

を得る。 □

この節で $*$-gamma 関数の無限積公式を与える。まず Lemma 17 より

$$\int_{-\infty}^{0}e_*^{\tau(z\pm\frac{uv}{\hbar i})}(1-e^{\tau})^n d\tau=\frac{n!}{\{z\pm\frac{uv}{\hbar i}\}_{*n+1}^{(\pm)}},\quad \mathrm{Re}\,z>-\frac{1}{2}.$$

がわかり、左辺で e^{τ} を $\frac{1}{n}e^{\tau'}$ で置き換え (i.e. $\tau=\tau'-\log n$) て、$e_*^{(\log n)(z\pm\frac{uv}{\hbar i})}$ を両辺にかけると,

$$\int_{-\infty}^{\log n}e_*^{\tau'(z\pm\frac{uv}{\hbar i})}(1-\frac{1}{n}e^{\tau'})^n d\tau'=\frac{n!}{\{z\pm\frac{uv}{\hbar i}\}_{*n+1}^{(\pm)}}*e_*^{(\log n)(z\pm\frac{uv}{\hbar i})}. \tag{92}$$

となる。

Lemma 18 $n\to\infty$ とすると, *Weyl*順序表示で $\int_{-\infty}^{\infty}e_*^{\tau'(z\pm\frac{uv}{\hbar i})}e^{-e^{\tau'}}d\tau'$ は $Hol(\mathbb{C})$ の中に収束する.

証明 明らかに $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n}e^{\tau'})^n=e^{-e^{\tau'}}$ は τ' の 関数として広義一様収束する. Weyl 順序表示では容易に

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\log n}e_*^{\tau'(z\pm\frac{uv}{\hbar i})}e^{-e^{\tau'}}d\tau'=\int_{-\infty}^{\infty}e_*^{\tau'(z\pm\frac{uv}{\hbar i})}e^{-e^{\tau'}}d\tau'$$

は $Hol(\mathbb{C}^2)$ の元となる. したがって

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\log n}e_*^{\tau'(z\pm\frac{uv}{\hbar i})}(e^{-e^{\tau'}}-(1-\frac{1}{n}e^{\tau'})^n)d\tau'=0$$

が $Hol(\mathbb{C}^2)$ で存在することを示せば十分である. これは Weyl 順序表示では容易で, intertwiner を経由して望みの結果が得られる. □

式 (92) の右辺は次と等しい:

$$e_*^{(\log n-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}))(z\pm\frac{uv}{\hbar i})}*(z\pm\frac{uv}{\hbar i})_{*\pm}^{-1}*\prod_{k=1}^{n}\Big((1+\frac{z\pm\frac{uv}{\hbar i}}{k})_{*\pm}^{-1}*e_*^{\frac{z\pm\frac{uv}{\hbar i}}{k}}\Big),\quad \mathrm{Re}\, z>-\frac{1}{2}.$$

左辺は収束して $\lim_{n\to\infty}e_*^{(\log n-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}))(z\pm\frac{uv}{\hbar i})}=e_*^{\gamma(z\pm\frac{uv}{\hbar i})}$ は明らかだろう．但し γ は Euler 定数である．$*$-積 $e_*^{s\frac{uv}{\hbar i}}*$ の連続性より

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}*\Big((1+\frac{1}{k}(z\pm\frac{uv}{\hbar i}))_{*\pm}^{-1}*e_*^{\frac{1}{k}(z\pm\frac{uv}{\hbar i})}\Big).$$

の空間 $Hol(\mathbb{C}^2)$ 内での収束がわかる．

これより、無限積公式が $Hol(\mathbb{C}^2)$ の中で収束していることがわかる。

$$\varGamma_*(z\pm\frac{uv}{\hbar i})=e_*^{-\gamma(z\pm\frac{uv}{\hbar i})}*(z\pm\frac{uv}{\hbar i})_{*\pm}^{-1}*\prod_{k=1}^{\infty}*\Big((1+\frac{z\pm\frac{uv}{\hbar i}}{k})_{*\pm}^{-1}*e_*^{\frac{z\pm\frac{uv}{\hbar i}}{k}}\Big)\tag{93}$$

両辺に $\prod_{k=1}^{N}\big(1+\frac{1}{k}(z\pm\frac{uv}{\hbar i})\big)e_*^{-\frac{1}{k}(z\pm\frac{uv}{\hbar i})}$ をかけて

$$\lim_{N\to\infty}\prod_{k=N}^{\infty}\Big((1+\frac{z\pm\frac{uv}{\hbar i}}{k})_{*\pm}^{-1}*e_*^{\frac{z\pm\frac{uv}{\hbar i}}{k}}\Big)=1$$

が $Hol(\mathbb{C}^2)$ の中で成立していることがわかる．

$n_1,\cdots,n_N$ を正整数の有限集合とし, $\mathbb{N}'=\mathbb{N}-\{n_1,\cdots,n_N\}$ とする．

Proposition 18 任意の正整数 $n_1,\cdots,n_N$ に対して積

$$\prod_{i=1}^{N}(1+\frac{1}{n_i}(z+\frac{1}{i\hbar}uv))e_*^{-\frac{1}{n_i}(z+\frac{1}{i\hbar}uv)}*\varGamma_*(z+\frac{uv}{\hbar i})$$

は *well defined* である．これは $\prod_{\mathbb{N}'}*(1+\frac{1}{k}(z+\frac{1}{i\hbar}uv))_{*+}^{-1}e_*^{-\frac{1}{k}(z+\frac{1}{i\hbar}uv)}$ が収束していることも表す．

11 $\sin_*\pi(z+\frac{1}{i\hbar}uv)$ との積

この節で、積 $\sin_*(z+\frac{1}{i\hbar}uv)*\varGamma_*(z+\frac{1}{i\hbar}uv)$ が z に関する整関数として定義できることを示す。これは Euler の reflection formula を思い出せば $\frac{1}{\varGamma_*(1-z-\frac{1}{i\hbar}uv))}$ にあたるものが定義されたと思ってもよいだろう。

この場合, $*$-積は積分

$$2i\sin_*\pi(z+\frac{1}{i\hbar}uv)*\varGamma_*(z+\frac{1}{i\hbar}uv)=\lim_{T,T'\to\infty}\int_{-T}^{T'}(e_*^{\pi i(z+\frac{1}{i\hbar}uv)}-e_*^{-\pi i(z+\frac{1}{i\hbar}uv)})*e^{-e^{\tau}}e_*^{\tau(z+\frac{uv}{i\hbar})}d\tau$$

で定義する。積の定義をご都合主義的に色々使っていると思うかもしれないが、これは超関数論ではあたりまえのことで, うまく定義できるものを選んで計算する．しかしその場その場で変えたりしてはいけない．

$$=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^{\tau}}(e_*^{(\tau+\pi i)(z+\frac{uv}{i\hbar})}-e_*^{(\tau-\pi i)(z+\frac{uv}{i\hbar})})d\tau$$

κ-順序表示で計算する.

$$=\int_{-\infty+\pi i}^{\infty+\pi i} e^{-e^{\tau-\pi i}} e_*^{\tau(z+\frac{uv}{i\hbar})}d\tau-\int_{-\infty-\pi i}^{\infty-\pi i} e^{-e^{\tau+\pi i}} e_*^{\tau(z+\frac{uv}{i\hbar})}d\tau$$

$e^{-e^{\tau-\pi i}}=e^{-e^{\tau+\pi i}}$ であるから, これは積分

$$(\int_{-\infty+\pi i}^{\infty+\pi i}-\int_{-\infty-\pi i}^{\infty-\pi i})e^{e^{\tau}} e_*^{\tau(z+\frac{uv}{i\hbar})}d\tau$$

で与えられる. 一見すると一周積分だが, これは一周積分ではないことに注意しておく. これらは $\mathbb{C}$ の稠密開集合内の κ を使った κ-表示でで定義される.

次のことが大切である:

Theorem 7 $\mathrm{Re}\,\kappa>0,\quad \kappa\in\mathbb{C}-\{\kappa>1\}\cup\{\kappa<-1\}$ なる κ-順序表示で

$$\sin_*(z+\frac{1}{i\hbar}uv)*\mathit{\Gamma}_*(z+\frac{1}{i\hbar}uv)$$

は z の整関数として定義でき, しかも $z\in\mathbb{N}+\frac{1}{2}$ の所で消える.

さらに (76) 式を使って

$$\sin_*(-n-\frac{1}{2}+\frac{1}{i\hbar}uv)*\mathit{\Gamma}_*(-n-\frac{1}{2}+\frac{1}{i\hbar}uv)=1-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}(\frac{1}{i\hbar}u)^k*\varpi_{00}*v^k. \tag{94}$$

もわかる。これより無限積公式

$$\sin_*(z+\frac{1}{i\hbar}uv)*\mathit{\Gamma}_*(z+\frac{1}{i\hbar}uv)=\prod_{k=1}^{\infty}{}_*\Big(\big(1-\frac{1}{k}(z+\frac{uv}{\hbar i})\big)_* * e_*^{\frac{1}{k}(z+\frac{uv}{\hbar i})}\Big).$$

を得る。

$\sin_*(z+\frac{1}{i\hbar}uv)*\mathit{\Gamma}_*(z+\frac{1}{i\hbar}uv)$ は $\frac{1}{\mathit{\Gamma}_*}(1-(z+\frac{1}{i\hbar}uv))$ のように思うことができるだろうから、これを $\frac{1}{\mathit{\Gamma}_*}(1-(z+\frac{1}{i\hbar}uv))$ の定義式として採用しておくと

$$\frac{1}{\mathit{\Gamma}_*}(1-(z+\frac{1}{i\hbar}uv))\Big|_{z=\frac{1}{2}}=0.$$

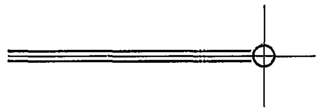
となる。これは $(\frac{1}{2}+\frac{1}{i\hbar}uv))$ は $\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots\}$ を動く不定元と思えるという描像をあたえるが、話はもう一つの逆元を使っても同様にできるから $(\frac{1}{2}+\frac{1}{i\hbar}uv))$ は $-\mathbb{N}$ を動く不定元であるという描像をもあたえる. どちらと思ってもよいが $\mathbb{Z}$ 全体を動く不定元と思うことはできないと言っているのである.

11.1 離散描像を支持するもうひとつの公式

$\frac{1}{\hbar i}uv$ の離散描像を (証明ではないが) 支持するもう一つの公式をあたえておこう。Hankel の公

式という gamma 関数の逆数を直接与える公式がある

$$\frac{1}{\Gamma(s)}=\frac{1}{2\pi i}\int_C e^t t^{-s}dt, \quad (\text{cf.}[19]\ \text{p.}244)$$



但し積分路 C はまず $-\infty$ から $-\delta$ までとりそれから半径 δ の円を正の向きに回り, さらに $-\delta$ から $-\infty$ へ帰るものとする.

上で示した離散描像を別の角度から支持するものとして次の式を示す: $\int_C e^t t_*^{\frac{1}{\hbar i}u*v}dt=0$.

$t=e^{\tau+\pi i}$ と置けばこの積分が次のようになることはすぐわかる

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} e^t t_*^{-(\frac{1}{\hbar i}uv)}dt &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{e^{\tau+\pi i}} e_*^{(\tau+\pi i)(1-\frac{1}{\hbar i}uv)}d\tau\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{e^{\tau+\pi i}} \frac{e^{\tau+\pi i}}{\cosh(\tau+\pi i)} e^{\frac{1}{\hbar i}uv\tanh(\tau+\pi i)}d\tau.\end{aligned}$$

だから積分

$$\int_{-\infty}^{0} e^t t_*^{-(\frac{1}{\hbar i}uv)}dt=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^{\tau}}\frac{e^{\tau}}{\cosh(\tau)}e^{-\frac{1}{\hbar i}uv\tanh(\tau)}d\tau.$$

は存在し, C の部分の積分は消える. そこで $t=e^{\tau}e^{i\theta}$ と置き, 固定した実数 $\tau<<0$ で考えれる

$$: A_*(z+\frac{uv}{\hbar i}) :_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{e^{\tau}e^{i\theta}+(\tau+i\theta)}e_*^{-(\tau+i\theta)(z+\frac{1}{\hbar i}uv)}d\theta.$$

これは次のようになる:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{e^{\tau}e^{i\theta}}e^{-z(\tau+i\theta)}\frac{e^{\tau+i\theta}}{\cosh(\tau+i\theta)}e^{\frac{1}{\hbar i}uv\tanh(\tau+i\theta)}d\theta$$

だから

$$A(z+\frac{1}{\hbar i}uv)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{e^{\tau}e^{i\theta}}e^{-z(\tau+i\theta)}\frac{2}{1+e^{-2(\tau+i\theta)}}e^{\frac{1}{\hbar i}uv\tanh(\tau+i\theta)}d\theta$$

と定義し, $z=0$ と置けば次のことがわかる

Lemma 19 $\lim_{\tau\to-\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{e^{\tau}e^{i\theta}+(\tau+i\theta)}e_*^{-(\tau+i\theta)(\frac{2}{\hbar i}uv)}d\theta=0$.

この補題は $\left.\frac{1}{\Gamma_*^{(+)}(z+\frac{u*v}{\hbar i})}\right|_{z=0}=0$, ということを間接的に支持していると思える.

$(1-\frac{1}{n}(z+\frac{1}{i\hbar}uv))_{*-}^{-1}$ は $n-z\in-\mathbb{N}-\frac{1}{2}$ で singular, i.e. $z\in k+\frac{1}{2}$ for $k\geq n$ だが積

$$\frac{1}{\Gamma_*}(1-(z+\frac{1}{i\hbar}uv))*(1-\frac{1}{n}(z+\frac{1}{i\hbar}uv))_{*-}^{-1}*e_*^{\frac{1}{n}(z+\frac{1}{i\hbar}uv)}$$

を考えれば, ちょっとみには

$$\prod_{k\neq n}(1-\frac{1}{k}(z+\frac{1}{i\hbar}uv))_* * e_*^{\frac{1}{n}(z+\frac{1}{i\hbar}uv)}$$

は z に関して整関数のように見えるかもしれない.

しかし, すでに見たように

$$\sin_*\pi(z+\frac{1}{i\hbar}uv)*\big(\Gamma_*(z+\frac{1}{i\hbar}uv)*(1-\frac{1}{n}(z+\frac{1}{i\hbar}uv))_{*-}^{-1}\big)$$

は整関数としては定義されていないのである. つまり, もうこれ以上は割れないのである.

11.2 $e_*^{\zeta(z+\frac{1}{i\hbar}uv)}$ の ζ に関する留数

まず Weyl 順序表示で計算する．κ-順序表示は intertwiner を経由して求める．次はおなじみの事実：

Lemma 20 C_k を半径 $\frac{\pi}{4}$, 中心が $\zeta=i\pi(k+\frac{1}{2})$ にある円とする．一周積分 $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_k}{:}e_*^{\zeta(z+\frac{1}{i\hbar}2uv)}{:}_0d\zeta$ が $X=(z,\frac{1}{i\hbar}2uv)$ に関する整関数の ζ に関する留数をあたえる．

積 $(z+\frac{1}{i\hbar}2uv)*$ の連続性より上に関数は微分方程式

$$(z+\frac{1}{i\hbar}2uv)*_0\int_{C_k}{:}e_*^{\zeta(z+\frac{1}{i\hbar}2uv)}{:}_0d\zeta=0. \tag{95}$$

を満たす．これは (95) が $\int_{C_k}\frac{d}{d\zeta}e_*^{\zeta(z+\frac{1}{i\hbar}2uv)}d\zeta$. となるからである．記号を簡略に次のように置く：

$$x=\frac{1}{i\hbar}2uv,\quad \Phi_k(z,x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_k}{:}e_*^{\zeta(z+\frac{1}{i\hbar}2uv)}{:}_0d\zeta.$$

(95) 式は $(z+x)*_0\Phi_k(z,x)=0$ だから, Moyal 積公式で, $\Phi_k(z,x)$ は微分方程式

$$(z+x)f(x)-f(x)'-xf(x)''=0, \tag{96}$$

を満たす (k に無関係になる). $z{=}0$ なら, これの整関数解は $cJ_0(x)$, $c\in\mathbb{C}$ であることがわかっている．但し,$J_0(x)$ は固有値 0 の Bessel 関数である．$f(x)=e^{\pm ix}g(x)$ と置くと, (96) 式は次のように書きなおせる：

$$xg''(x)+(1\pm 2ix)g'(x)-(z\pm i)g(x)=0.$$

変数を $w=\mp 2ix$ と変換してみると, $h(w)=g(x)$ は Laguerre 方程式

$$wh''(w)+(1-w)h'(w)+\frac{1}{2}(1\mp iz)h(w)=0 \tag{97}$$

を満たすことがわかる．

これの整関数解は w について指数関数の増大度を持っているが, Laguerre 関数と呼ばれているものである．

これを用いて (96) の解は

$$\Psi_z(x)=e^{-ix}L^{(0)}_{\frac{1}{2}(z-1)}(2ix),\quad \Psi_z(x)=e^{ix}L^{(0)}_{-\frac{1}{2}(z+1)}(-2ix),$$

とかかれる．但し Laguerre 関数 $L^{(0)}_{\frac{1}{2}(z-1)}(2iw)$ は次で与えられる:

$$L^{(0)}_{\nu}(w)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\nu)_n}{(n!)^2}w^n,\quad \nu=\frac{1}{2}(\mp z-1).$$

ここで, 次の記号が使われている

$$(a)_n=a(a+1)\cdots(a+n-1),\quad (a)_0=1.$$

これらの結果を使うと $\Psi_z(x)\in\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$, で c_k を複素定数として $\Phi_k(z,x)=c_k\Psi_z(x)$ となることがわかる.

定数 c_k を知るには $\Psi_z(x)$ が z に関して analytic であることを使って z=0 の場合を計算する. まず

$$\Phi_k(0,x)=c_k\Psi_0(x)=c_k(-1)^k(-i)J_0(x). \tag{98}$$

に注意する.

他方, $e_*^{t(\frac{1}{i\hbar}uv)}$ の $t=i\pi(k+\frac{1}{2})$ における留数は次の補題で計算するのである.

Lemma 21 $\frac{1}{\cosh\zeta}e^{(\frac{1}{i\hbar}\tanh\zeta)2\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{u}\rangle}$ の $\zeta=i\pi(k+\frac{1}{2})$ における留数は

$$(-1)^k(-i)\sqrt{2\pi}J_0(\frac{2}{\hbar}uv).$$

である.

証明 積分

$$-\int_{-\infty}^{\infty}e_*^{(t+\pi i(k+1))\frac{1}{i\hbar}2\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{u}\rangle)}dt+\int_{-\infty}^{\infty}e_*^{(t+\pi ik)\frac{1}{i\hbar}2\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{u}\rangle)}dt \tag{99}$$

を Weyl 順序表示で考える.

この積分は幅が 1 に帯領域での一周積分とみなせる. 被積分関数はこの領域の中にある一つだけ特異点 $t=\pi i(k+\frac{1}{2})$ の $2\pi i\times$ 留数を与える.

$e_*^{(t+\pi ik)\frac{1}{i\hbar}2\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{u}\rangle)}=(-1)^ke_*^{t\frac{1}{i\hbar}2\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{u}\rangle)}$, に注意すると

$$2(-1)^k\int_{-\infty}^{\infty}{:}e_*^{t\frac{1}{i\hbar}2\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{u}\rangle}{:}_0dt=2(-1)^k\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\cosh t}e^{(\frac{1}{i\hbar}\tanh t)2\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{u}\rangle}dt.$$

Bessel 関数についての Hansen-Bessel の公式より:

$$\begin{aligned}J_n(w)=&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}e^{iw\cos\tau}e^{in(t-\frac{\pi}{2})}d\tau,\\=&\frac{i^{-n}}{\pi}\int_0^{\pi}e^{iw\cos\tau}\cos n\tau d\tau\quad n=0,1,2,\cdots.\end{aligned} \tag{100}$$

これを $n=0$ の場合に使い, さらに $\cos\tau=\tanh t$ と置いて,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\cosh t}e^{(\frac{1}{i\hbar}\tanh t)2\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{u}\rangle}dt=\pi J_0(\frac{1}{\hbar}2\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{u}\rangle). \tag{101}$$

これより留数は $(-1)^k(-i)J_0(\frac{1}{\hbar}2\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{u}\rangle)$. □

$J_0(w)$ の展開公式より, $J_0(\frac{1}{\hbar}2\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{u}\rangle)$ は $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^{2m})$ の元であることがわかる.

これより留数がわかるが, 同時に κ-順序表示に連続性がなくなることも示せたことになる.

参考文献

[1] G. S. Agawal, E. Wolf, *Calculus for functions of noncommuting operators and general phase-space method of functions*, Physcal Review D, vol.2, no.10, 1970, 2161-2186.

[2] G. Andrews, R. Askey, R. Roy, SPECIAL FUNCTIONS, Encyclopedia Math, Appl. 71, Cambridge, 2000.

[3] A. Connes, NONCOMMUTATIVE GEOMETRY. Academic Press, 1994.

[4] I.M.Gel'fand, G.E.Shilov, GENERALIZED FUNCTIONS, 2, Academic Press, 1968.

[5] M. Gerstenhaber, A. Giaquinto, *Deformations associated to rigid algebras.* preprint, 2005.

[6] V. Guillemin, S. Sternberg, GEOMETRIC ASYMPTOTICS. A.M.S. Mathematical surveys, 14, 1977.

[7] N. Hitchin, *Lectures on special Lagrangian submanifolds,* arXiv:math.DG/9907034vl 6Jul, 1999.

[8] M. Kontsevitch Deformation quantization of Poisson manifolds, I, qalg/9709040.

[9] H. Omori, Y. Maeda, N. Miyazaki, A. Yoshioka, *Deformation quantization of Fréchet-Poisson algebras, –Convergence of the Moyal product–,* in Conférence Moshé Flato 1999, Quantizations, Deformations, and Symmetries, Vol II, Math. Phys. Studies 22, Kluwer Academic Press, 2000, 233-246.

[10] H. Omori, *One must break symmetry in order to keep associativity,* Banach center publ. vol.55, 2002, 153-163.

[11] H. Omori, *Noncommutative world, and its geometrical picture,* A.M.S translation of Sugaku expositions, 2000.

[12] H. Omori, PHYSICS IN MATHEMATICS,(in Japanese) Tokyo Univ. Publications,2004.

[13] H. Omori, *Toward geometric quantum theory,* to appear

[14] H.Omori, Y.Maeda, QUANTUM THEORETIC CALCULUS, SpringerTokyo,2004.(in Japanese)

[15] H.OMORI, T.KOBAYASHI, *Singular star-exponential functions,* SUT Jour, Mathematics 37, no.2,(2001), 137-152.

[16] H.Omori, Y.Maeda, N.Miyazaki and A.Yoshioka : *Strange phenomena related to ordering problems in quantizations,* Jour. Lie Theory vol. 13, no 2, 481-510, 2003..

[17] H.Omori, Y.Maeda, N.Miyazaki and A.Yoshioka : *Star exponential function as two-valued elements,* in The breadth of symplectic and Poisson geometry, Progress in Math. 232, Birkhäuser,2004, 483-492.

[18] H.Omori, Y.Maeda, N.Miyazaki and A.Yoshioka : *Geometric objects in an approach to quantum geometry,* to appear

[19] E. T. Whittaker, G. N. Watson, A COURSE OF MODERN ANALYSIS, Cambridge Press 1940.