q-超幾何関数における３つの基本問題
(q-差分方程式、漸近展開、接続問題)

青本和彦 (京都産業大学・理学部)

06/March/19(於 Oka Symposium)

1 q-超幾何関数とは? (Heine q-超幾何関数の場合)

q は $0 < q < 1$ を満たす任意の実数とする。

Heine の級数 $\psi(x)$ は原点 $x = 0$ で

$$\psi(x) = {}_2\varphi_1\begin{pmatrix} a, b \\ c \end{pmatrix}; x\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n (b;q)_n}{(c;q)_n (q;q)_n} x^n \quad (|x| < 1) \tag{1}$$

の形に展開される $\mathbf{C}^*$ 上の有理型関数のことである。ただし

$$(a;q)_\infty = \prod_{n=0}^{\infty}(1 - aq^n),\ (a;q)_n = (a;q)_\infty/(aq^n;q)_\infty \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

$a = q^\alpha, b = q^\beta, c = q^\gamma$ とおき、$q \to 1$ のとき ${}_2\varphi_1$ は通常の超幾何関数

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix}; x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n n!} x^n$$

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$$

に帰着するので、q-類似超幾何関数あるいは底 (“noum ”) つき超幾何関数など (basic hypergeometric function) とも呼ばれる (底のことを “noum” とも呼ぶことがある) 。$\psi(x)$ は線形の 2 階 q-差分方程式を満たす:

$$(ab - c/q)\psi(q^2x) + \{1 + c/q - (a+b)x\}\psi(qx) + (x-1)\psi(x) = 0. \tag{2}$$

(2) はまた

$$(1 - T_x)(1 - c/qT_x)\psi = x(1 - aT_x)(1 - bT_x)\psi$$

とも表される。ここで T_x は変数 x についての q-移動 (q-shift) を表す作用素

$$T_x f(x) = f(qx)$$

を表す。

原点 $x = 0$ の近傍で

$$\psi(x) = x^\lambda(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots)$$

の形に表される (2) の解は

$$\psi_1 = {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x\right),\ \psi_2 = x^{1-\gamma}{}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} aq/c, bq/c \\ q^2/c \end{matrix}; x\right)$$

であって (2) の解はすべて ψ_1, ψ_2 の 1 次結合

$$\psi(x) = C_1\psi_1(x) + C_2\psi_2(x) \tag{3}$$

で表される。微分方程式の解を基本解の 1 次結合で表す場合、係数は定数であるが、q-差分の場合は定数ではなく q-移動に関して不変な擬定数 (pseudo-constant) でなければならない。すなわち C_1, C_2 は

$$C_1(x) = C_1(qx),\ C_2(x) = C_2(qx)$$

を満たす x の関数 (正確には x の擬有理型関数すなわち適当なベキ関数因子をのぞいて有理型関数) である。

q-差分方程式 (2) はまた $x = \infty$ において Laurent 展開

$$\psi(x) = x^\lambda(c_0 + c_1/x + c_2/x^2 + \cdots)$$

で表される 1 次独立な 2 個の解 ψ_1, ψ_2 をもつ。それらはそれぞれ

$$\psi_1(x) = x^{-\alpha}{}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} a, qa/c \\ qa/b \end{matrix}; \frac{qc}{abx}\right),\ \psi_2(x) = x^{-\beta}{}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} b, qb/c \\ qb/a \end{matrix}; \frac{qc}{abx}\right)$$

と表される。したがってベキ級数解 (1) は $x = \infty$ の近傍まで解析接続した場合 (3) の表示をもつ：

$${}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x\right) = C_1\psi_1(x) + C_2\psi_2(x) \tag{4}$$

ここで C_1, C_2 は擬定数

$$C_1 = \frac{(b;q)_\infty(c/a;q)_\infty\theta(ax;q)}{(c;q)_\infty(b/a;q)_\infty\theta(x;q)}x^\alpha,\ C_2 = \frac{(a;q)_\infty(c/b;q)_\infty\theta(bx;q)}{(c;q)_\infty(a/b;q)_\infty\theta(x;q)}x^\beta$$

ここで $\vartheta(x;q) = (x;q)_\infty(q/x;q)_\infty(q;q)_\infty$ は Jacobi のテータ関数を表す。

(4) のように同一の q-差分方程式を満たす解の間の 1 次従属関係を与える表示式を接続関係あるいは接続公式 (connection formula) という。

以下の節では

(i) q-超幾何関数がどのように定式化されるか？

(ii) q-差分方程式はどのようにして求められるか？

(iii) q-超幾何関数の漸近的振る舞い

(iv) 接続関係式

などの問題を q-超幾何関数に付随するトーリック多様体上の q-乗法関数に関する q-de Rham コホモロジーを定式化し、その幾何学的考察を通して議論することにする。

2 q-乗法関数

$X=(\mathbf{C}^*)^n$ を n 次元代数的トーラス、$X_{\mathbf{Z}}$ を $\mathbf{Z}^n$ に同型である X の n 次元格子部分群であるとする。$\mathbf{Z}^n$ の標準基底を $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$ とすると $\mathbf{Z}^n$ の任意の元 ν は

$$\chi=\sum_{k=1}^{n} l_k \chi_k \quad (l_k \in \mathbf{Z})$$

と表されるがこれを $X_{\mathbf{Z}}$ の元と見るときは $q^{\chi}=(q^{l_1},\dots,q^{l_n})$ で表す。χ による q-移動は

$$q^{\chi}: X \ni t=(t_1,\dots,t_n) \longrightarrow q^{\chi}t=(t_1 q^{l_1},\dots,t_n q^{l_n}) \in X$$

あるいは X 上の関数に対して

$$T^{\chi}f(t)=f(q^{\chi}t)$$

によって定義される。特に

$$T_k f(t)=f(q^{\chi_k}t)$$

とおけば明らかに $T^{\chi}=T_1^{l_1}\cdots T_n^{l_n}$.

$\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}^n,\mathbf{C}), \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}^n,\mathbf{Z})$ でそれぞれ $\mathbf{Z}^n$ から $\mathbf{C}, \mathbf{Z}$ への準同型全体のなすアーベル群とする。

さて $\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}^n,\mathbf{C})$ および $\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}^n,\mathbf{Z})-\{0\}$ の有限部分集合 M に対して X 上の擬有理型関数

$$\Phi(t)=t^{\alpha}\prod_{\mu\in M}\frac{(a'_{\mu}t^{\mu};q)_{\infty}}{(a_{\mu}t^{\mu};q)_{\infty}} \tag{5}$$

(ここで $t^{\alpha}=t_1^{\alpha(\chi_1)}\cdots t_n^{\alpha(\chi_n)}$, $t^{\mu}=t_1^{\mu(\chi_1)}\cdots t_n^{\mu(\chi_n)}$) を考える。

$\Phi(t)$ は次の q-差分方程式を満たす:

$$b_\chi(t) = T^\chi \Phi(t)/\Phi(t) = q^{\alpha(\chi)} \prod_{\mu\in M} \frac{(a_\mu t^\mu; q)_{\mu(\chi)}}{(a'_\mu t^\mu; q)_{\mu(\chi)}} \tag{6}$$

$R(X)$ は X 上の有理関数全体とする。$R^\times(X) = R(X) - \{0\}$ は X 上の 0 ではない有理関数全体のなす乗法群とすると、$\{b_\chi(t)\}_{\chi\in\mathbf{Z}^n}$ は $R^\times(X)$ に値をもつ $\mathbf{Z}^n$ 上の 1 次元コサイクルを定義する。すなわち

$$b_0(t) = 1, \tag{7}$$
$$b_{\chi+\chi'}(t) = b_\chi(t)\cdot T^\chi b_{\chi'}(t) \quad (\chi,\chi' \in \mathbf{Z}^n) \tag{8}$$

を満たす。実は逆が成り立つ。

命題 2.1 $R^\times(X)$ に値をもつ $\{b_\chi(t)\}_\chi$ が (7), (8) を満たすものとする。このとき $\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}^n,\mathbf{C})$ および $\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}^n,\mathbf{Z}) - \{0\}$ の有限部分集合 M が存在して $b_\chi(t)$ は 1 次元コホモロジーの代表元 (6) の形をもつ。言い換えればある $g(t) \in R^\times(X)$ が存在して

$$b_\chi(t) = T^\chi(g(t)\Phi(t))/(g(t)\Phi(t)) \sim T^\chi(\Phi(t))/\Phi(t).$$

証明については $q=1$ のときには [28] 参照。q 一般のときにも同様な方法で証明できる。

文献 [29] では上のような関数 $\Phi(t)$ を "phase function" と呼んでいる。

3 Jackson 積分と q-類似 de Rham コホモロジー

この節では $\Phi(t)$ は (5) の形に表されているものとする。以下の議論は [3], [11] に従う。

$\mathbf{C}[t,t^{-1}]$ を X 上の Laurent 多項式環とする。$R(X)$ の部分空間で次のように定義される $\mathbf{C}[t,t^{-1}]$ モジュールを V とおく:

$$V = \bigcup_{l\geq 0} \frac{\mathbf{C}[t,t^{-1}]}{\prod_{\mu\in M}(a_\mu q^{-l} t^\mu; q)_l \cdot (a'_\mu t^\mu; q)_l}.$$

X 上の関数 $f(t)$ に対して共変 q-差分

$$\nabla^\chi f(t) = \frac{f(t) - b_\chi(t) T^\chi f(t)}{1-q}$$
$$\nabla_k f(t) = \nabla^{\chi_k} f(t)$$

は V をそれ自身に写す線形写像である。Φ に付随する n 次元有理的 de Rham コホモロジー $H^n(X, \Phi, \nabla_q)$ は

$$H^n(X, \Phi, \nabla_q) = V / \sum_{k=1}^{n} \nabla_k V \cong V / \sum_{\chi \in \mathbf{Z}^n} \nabla^\chi V$$

として定義される。今 $\varphi(t) \in V$ をひとつ固定する。$\xi \in X$ を任意にとって ξ の $X_{\mathbf{Z}}$-軌道

$$\langle \xi \rangle = X_{\mathbf{Z}} \cdot \xi$$

上での和

$$\begin{aligned} \int_{\langle \xi \rangle} \Phi(t)\varphi(t)\varpi_q &= (1-q)^n \sum_{\chi \in X} \Phi(q^\chi \xi)\varphi(q^\chi \xi) \qquad (9) \\ \varpi_q &= \frac{d_q t_1}{t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{d_q t_n}{t_n} \end{aligned}$$

は、もし収束するならば $\Phi(t)\varphi(t)$ の Jackson 積分と言われる。もしも $q^\chi \xi$ が $\Phi(t)\varphi(t)$ の極になっている場合にはその正則化 (regularization) として留数をとる。和が発散する場合に、格子上の和のかわりに適当な輪郭 (contour) 積分に取り替える必要もある。

(9) は φ, ξ との積分による対

$$\langle \varphi, \xi \rangle \longrightarrow \int_{\langle \xi \rangle} \Phi(t)\varphi(t)\varpi_q \in \mathbf{C} \qquad (10)$$

を与える。(9) は φ の $H^n(X, \Phi, \nabla_q)$ の中でのコホモロジーの類のみに依存する。すなわち射 (10) は $H^n(X, \Phi, \nabla_q)$ の双対元を与えるわけである。

以後 $\langle \xi \rangle$ およびその正則化を (n 次元) サイクルと呼ぶことにする。

(9) は ξ について q-移動に関して不変な擬有理型関数であるが、われわれの興味は ξ のみならず、α, a_μ, a'_μ についてのホロノミック (holonomic) q-差分構造、$|\alpha| = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \to \infty$, $a_\mu, a'_\mu \to 0, \infty$ での漸近展開、そして種々の漸近展開を与える Jackson 積分の間の接続関係式である。

次の仮定をおく。

[Hyp 1]

(i) $a_\mu a'_\mu \neq 0$, $(\forall \mu \in M)$

(ii) $\{a_\mu, a'_\mu\}$ は互いに非合同すなわち

$$\begin{aligned} a_\mu / a_\nu &\neq 1, q^{\pm 1}, q^{\pm 2}, \ldots \quad \forall \mu \neq \nu \\ a'_\mu / a'_\nu &\neq 1, q^{\pm 1}, q^{\pm 2}, \ldots \quad \forall \mu \neq \nu \\ a'_\mu / a_\nu &\neq 1, q^{\pm 1}, q^{\pm 2}, \ldots \quad \forall \mu, \nu \end{aligned}$$

[Hyp 2]

(i) ある $\omega \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}^n, \mathbf{Z}) - \{0\}$ が存在して、任意の 1 次独立な $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in M$ に対して

$$[\omega, \mu_1, \ldots, \mu_{k=1}, \mu_{k+1}, \ldots, \mu_n](-1)^{k-1} > 0. \quad (1 \leq k \leq n)$$

(ii) 方程式系

$$a_{\mu_1} t^{\mu_1} = a_{\mu_2} t^{\mu_2} = \ldots = a_{\mu_n} t^{\mu_n} = 1$$

は $\big|[\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n]\big|$ 個の相異なる解をもつ。ここで $[\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n]$ は $n \times n$ 行列 $(\mu_j(\chi_k))_{j,k}$ の行列式を表す。

定理 3.1 [Hyp1], [Hyp2] の下で $H^n(X, \Phi, \nabla_q)$ は有限次元である。そして

$$\dim H^n(X, \Phi, \nabla_q) = \sum_{\{\mu_1, \ldots, \mu_n\} \subset M} [\mu_1, \ldots, \mu_n]^2$$

が成り立つ。

以下 $\dim H^n(X, \Phi, \nabla_q)$ を κ とおく。

4 q-差分方程式

$b_\chi(t)$ を Laurent 多項式の比で表すことができる:

$$\begin{aligned} b_\chi(t) &= u^\chi b_\chi^+(t)/b_\chi^-(t), \\ b_\chi^+(t) &= \prod_{\mu(\chi)>0} (a_\mu t^\mu; q)_{\mu(\chi)} \prod_{\mu(\chi)<0} (a'_\mu q^{\mu(\chi)} t^\mu; q)_{-\mu(\chi)}, \\ b_\chi^-(t) &= \prod_{\mu(\chi)>0} (a'_\mu t^\mu; q)_{\mu(\chi)} \prod_{\mu(\chi)<0} (a_\mu q^{\mu(\chi)} t^\mu; q)_{-\mu(\chi)}. \end{aligned}$$

$u = q^\alpha \in X$ すなわち $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $u_1 = q^{\alpha_1}, \ldots, u_n = q^{\alpha_n}$ とおく。

定理 4.1 (9) の右辺を u の関数とみて $F(u)$ とおくとき $F(u)$ は次のようにホロノミックな q-差分方程式系を満たす。

$$\{b_\chi^-(T_u) u^{-\chi} - b_\chi^+(T_u)\} F(u) = 0, \quad (\chi \in \mathbf{Z}^n) \tag{11}$$

ここで $b_\chi^\pm(T_u)$ は Laurent 多項式の各変数 t_k に変数 u に関する q-移動 T_{u_k} を代入した作用素を表す。q-差分系 (11) が κ 個の 1 次独立な擬有理型関数の解をもつ。

定理 3.1 および定理 4.1 の証明は、変数 u について空間 X の適当な方向での無限遠点での漸近展開を分類することにより与えられる。通常の積分の漸近展開を求める鞍部点法の類似である離散的な最急降下法を用いる ([3], [4], [11] を参照)。

$\omega \in \mathbf{Z}^n - \{0\}$ を [Hyp 2] を満たすような generic な点とする。$\langle\xi\rangle = X_{\mathbf{Z}} \cdot \xi$ 上の Jacksonn 積分は 適当な ξ をとるとき、ξ を頂点とするある扇 (fan) に含まれる $\langle\xi\rangle$ の部分集合 (それを $\langle\xi\rangle^+$ とおく) 上でのみの和として表される。X 上の準位関数

$$L(t) = \Re\{\langle\omega, \log_q t\rangle\} = \sum_{k=1}^{n} \omega_k \log_q |t_k|$$

($\langle\omega, \log_q t\rangle$ は双対な双 1 次形式を表し、$\Re$ は実部を表す) は $\langle\xi\rangle^+$ においては $t = \xi$ でのみ最小値をとる。定理 3.1, 定理 3.2 は

$$\alpha = \omega N + \hat{\alpha} \quad (N = 0, 1, 2, \ldots)$$

とおくとき、積分 (9) が $N \to \infty$ のとき $|\alpha| \to \infty$ での適当な漸近展開を与える ξ を κ 個見出し、それらが (11) の 1 次独立な解であることを証明することによって示される。この場合の (9) の解 $F(u)$ の漸近展開は正則特異形

$$F(u) \approx C u_1^{\lambda_1} \cdots u_n^{\lambda_n} (1 + O(1/N)) \tag{12}$$

の形をしている。

注意. $H^n(X, \Phi, \nabla_q)$ の有限次元性についてはもっと一般な仮定で C.Sabbah によって証明されている ([27] 参照)。

[例] 高次 q-超幾何関数あるいは q-類似 Jordan–Pochhammer type

$n = 1$ で

$$\Phi(t) = t^{\alpha} \prod_{k=1}^{m} \frac{(a'_k t; q)_\infty}{(a_k t; q)_\infty} \tag{13}$$

このとき $\kappa = m$. q-差分方程式は $x = q^{\alpha}$ について

$$\prod_{k=1}^{m} (1 - q^{-1} a'_k T_x) F - x \prod_{k=1}^{m} (1 - a_k T_x) F = 0.$$

特に $m = 1$ のときの Jackson 積分は Ramanujan の ${}_1\psi_1$ 和に他ならない。また $m = 2$ のとき $q^{\alpha} = x, a_1 = a, a_2 = b, a'_1 = c, a'_2 = q$ とおくときは Heine の超幾何級数 (1) の場合である。$\xi = 1, \xi = 1/a, 1/b$ のときそれぞれ §1 の ${}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x\right)$,$\psi_1(x), \psi_2(x)$ を与える。

5 問題の設定

[**問題 1**] q-差分方程式を求める。

ひとつの代表元 $\varphi_1, \ldots, \varphi_\kappa \in V$ が $H^n(X, \Phi, \nabla_q)$ の基底を与えるものとする。このとき任意の $\varphi \in V$ に対して

$$\varphi \sim \sum_{k=1}^{\kappa} c_k \varphi_k.$$

パラメータ u_k, a_μ, a'_μ についての q-移動 $T_{u_k}, T_{a_\mu}, T_{a'_\mu}$ に対して、V はそれ自身に写される。故に $H^n(X, \Phi, \nabla_q)$ において q-差分方程式

$$T_{u_k}\langle \varphi_j, \xi \rangle = \sum_{l=1}^{\kappa} y_{lj}^{(u_k)} \langle \varphi_l, \xi \rangle \tag{14}$$

$$T_{a_\mu}\langle \varphi_j, \xi \rangle = \sum_{l=1}^{\kappa} y_{lj}^{(a_\mu)} \langle \varphi_l, \xi \rangle \tag{15}$$

$$T_{a'_\mu}\langle \varphi_j, \xi \rangle = \sum_{l=1}^{\kappa} y_{lj}^{(a'_\mu)} \langle \varphi_l, \xi \rangle \tag{16}$$

が得られる。

“適当な代表元 $\varphi_1, \ldots, \varphi_\kappa$ に対して (14),(15),(16) を明示的に計算せよ。”

定理 4.1 の (11) は T_u に関する方程式として一般的なもので、q-超幾何関数を特徴づけるものである。しかしこれとて (14) の方程式を自動的には与えていない。ましてや $T_{a_\mu}, T_{a'_\mu}$ を用いる q-差分方程式は一般には未知のままである。

[**問題 2**] 漸近展開を求める。

“ξ をひとつ固定する。u, a_μ, a'_μ が無限遠にいくとき Jackson 積分 (9) の漸近的振る舞いを求めよ。”

この問題をもっと正確にするためには無限大に行く方向を指定せねばならない。すなわち無限遠の方向 $\omega \in \mathbf{Z}^n, \eta_\mu \in \mathbf{Z}, \eta'_\mu \in \mathbf{Z}$ をひとつ固定して

$$\alpha = \omega N + \hat{\alpha},\ a_\mu = \eta_\mu N + \hat{a}_\mu,\ a'_\mu = \eta' N + \hat{a}'_\mu$$

のとき $N \to \infty$ に対して (9) の N に関する関数としての漸近展開を求めよ。

派生する問題として

[問題 2′] 漸近展開を分類する。

[問題 2] において一般には、方向をひとつ指定するごとに最急降下法によって決まる固有な漸近展開を与える固有なサイクル $\langle\xi\rangle$ が κ 個決まる。それを

$$\langle\xi(1)\rangle, \ldots, \langle\xi(\kappa)\rangle \tag{17}$$

とする。

“ 異なる種類の方向はどれだけあるか？および対応する固有なサイクル、固有な漸近展開の種類をすべて求めよ。”

[問題 3] 接続係数を求める。

ひとつの方向を指定して与えられる固有なサイクル (17) が与えられているとする。任意の ξ に対して $\langle\xi\rangle$ 上の Jackson 積分は

$$\langle\varphi,\xi\rangle = \sum_{k=1}^{\kappa} C_k \langle\varphi,\xi(k)\rangle \tag{18}$$

の形に表すことができる。ここで C_k は ξ の擬定数である。

“ C_k を求めよ。特に異なる方向の漸近展開を与える固有なサイクル $\langle\xi'(k)\rangle$ を (18) の形に表せ。”

この問題は様々な方向の漸近展開を具体的に求める実践的な方法を与える。

6 具体例

(18) に表れる係数 C_k を記号 $[\langle\xi\rangle : \langle\xi(k)\rangle]_\Phi$ で表すことにする。

[例 1] Ramanujan $_1\psi_1$ 和 ([8], [15] 参照)

(12) において $n=1, m=1$ の場合で $a_1 = b, a_1' = q$ とする。すなわち

$$\Phi(t) = t^\alpha \frac{(qt;q)_\infty}{(bt;q)_\infty} \quad (a = q^\alpha, \beta = q^\beta)$$

とするとき q-ベータ関数の公式

$$\int_{\langle 1\rangle} \Phi(t)\frac{d_q t}{t} = \frac{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)}{\Gamma_q(\alpha+\beta)}$$

が成立。ただし

$$\Gamma_q(\alpha) = (1-q)^{(1-\alpha)} \frac{(q;q)_\infty}{(q^\alpha;q)_\infty}$$

であるが、Ramanujan の公式により

$$\int_{\langle\xi\rangle}\Phi(t)\frac{d_qt}{t}=\xi^{\alpha}\frac{\theta(b;q)\theta(bq^{\alpha}\xi)}{\theta(bq^{\alpha};q)\theta(b\xi;q)}\int_{\langle 1\rangle}\Phi(t)\frac{d_qt}{t}.$$

すなわち

$$[\langle\xi\rangle:\langle 1\rangle]_{\Phi}=\frac{\theta(b;q)\theta(bq^{\alpha}\xi)}{\theta(bq^{\alpha};q)\theta(b\xi;q)}\xi^{\alpha}.$$

これが接続関係式に他ならない。さらにこれを ξ について q から 1 まで積分すればもうひとつの Ramanujan の公式

$$\int_0^{\infty}\Phi(t)\frac{dt}{t}=\frac{q^{-\alpha\beta}\pi}{(1-q)\sin\pi\alpha}\frac{(q^{1-\beta};q)_{\infty}(q;q)_{\infty}}{(q^{\alpha};q)_{\infty}(q^{\alpha-\beta+1};q)_{\infty}},\ (q^{\beta}\notin[0,\infty))$$

が得られる。

[例 2] Heine の q-超幾何関数

(13) において $m=2$ の場合。前節のように $q^{\alpha}=x, a_1=a, a_2=b, a_1'=c, a_2'=q$ とおく。$\kappa=2$ であるから 1 次独立なサイクルは 2 個とれる。たとえば $\langle 1/a\rangle,\langle 1/b\rangle$ ととることができる。故に接続関係式は任意の ξ に対して

$$\langle\xi\rangle=\frac{(1-q)(q;q)_{\infty}{}^3}{\theta(q^{-\alpha};q)}\left\{(\xi a)^{\alpha}\frac{\theta(q^{\alpha+1}a\xi;q)}{\theta(qa\xi;q)}\langle 1/a\rangle+(\xi b)^{\alpha}\frac{\theta(q^{\alpha+1}b\xi;q)}{\theta(qb\xi;q)}\langle 1/b\rangle\right\}$$

と表される。特に $\xi=1$ のときはこれは冒頭の関係式 (4) に他ならない。

$m>1$ の一般の場合の明示的な公式については [6], [25] などに記述されている。

[例 3] Selberg 型 Jackson 積分 (A-type root 型対称性をもつ場合)

定数 $\alpha_k, x_j\ (1\le j\le m), \beta,\gamma,\gamma'$ を

$$\alpha_k=\alpha_1+(k-1)(\gamma'-\gamma),\ \gamma+\gamma'=1$$

となるように任意に与える。

$$\Phi(t)=\prod_{k=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}t_k^{\alpha_k}\frac{(t_k/x_j;q)_{\infty}}{(q^{\beta}t_k/x_j;q)_{\infty}}\prod_{1\le i<j\le n}\frac{(q^{\gamma'}t_j/t_i;q)_{\infty}}{(q^{\gamma}t_j/t_i;q)_{\infty}}\tag{19}$$

とおく。$\Phi(t)$ は次の意味で A 型 Weyl 群対称性をもつ：

“ 変数 t_k についての任意の置換 σ に対して $\Phi(t),\sigma\Phi(t)$ は同じ q-差分方程式を満たす。言い換えれば $\sigma(b_{\chi}(t))$ は $\sigma\in\mathbf{S}_n$(n 次対称群) によらない。”

このとき

定理 6.1 ([12], [29] 参照)

$$\dim H^n(X, \Phi, \nabla_q) = m(m+n)^{n-1}$$

である。さらに $H^n(X, \Phi, \nabla_q)$ の歪対称部分 $H^n_{skew}(X, \Phi, \nabla_q)$ を考察することができる。その次元は

$$\dim H^n_{skew}(X, \Phi, \nabla_q) = \binom{n+m-1}{m-1}$$

で与えられる。

特に $m=1$ のときは後者は 1 に等しいので対応する Jackson 積分は積公式の表示をもつ。その明示的な公式については [12], [21], [22] などを参照。さらに一般のルート系への拡張については [17], [18], [19], [23] などを参照。

歪対称な場合の (19) の積分は応用上重要である。この場合、変数 α_1, x_r に関する q-差分方程式はすべて正則特異性をもっている。

$H^n_{skew}(X, \Phi, \nabla_q)$ の基底を適当にとる (すなわち、松尾の基底および Tarasov-Varchenko による拡張 [24],[29] をとる) ことによりパラメータ α についての q-差分方程式は、実質ひとつ α_1 のみに関するものである (しかし $m=2$ の場合を除いて明示的な公式は求められていないように見える。) そして $\alpha_1 \to \pm\infty$ での $F(u)$ の漸近展開は (12) と本質的に同じである。

他方、x_r に関する q-差分方程式はいわゆる R-行列を用いて書き表されるいわゆる q-KZ 方程式である ([29] 参照)。対応する漸近展開は漸近領域

$$|x_1| \gg |x_2| \gg \cdots \gg |x_m| > 0$$

において与えられる。さらにパラメータ x_j の置換 σ は漸近領域に置換をもたらし、それは x_j に依存する R-行列を、したがって Yang–Baxter の関係式を満たす解を与えている。そして x_j に関する q-差分方程式自身はこれら R-行列の積の形に表されることが知られる。しかも R-行列そのものが α_1 に関する q-差分方程式と密接に関連している。

さらに σ がもたらす接続関係式もまた楕円テータ関数を用いて表される R-行列である。

これらの話題については [2], [5], [14], [22], [24], [29] などを参照。

[例 4] BC_n 型 Jackson 積分

この場合には [例 3] と同様なことが期待されるが、その構造は一層複雑である。

$m = 2s+2,\ s = -1, 0, 1, 2, \ldots; l = 0, 1, 2, \ldots$ とし、パラメータ $a_1 = q^{\alpha_1}, \ldots, a_m = q^{\alpha_m}$; $x_1, \ldots, x_l$ をもつ q-乗法関数

$$\Phi(t) = \prod_{k=1}^{n} t_k^{m/2-\delta+(n-k)(l-2k)\tau} \prod_{j=1}^{m} \frac{(qt_k/a_j;q)_\infty}{(a_jt_k;q)_\infty}$$
$$\prod_{r=1}^{l} \prod_{1\le j<k\le n} \frac{(qt_j/x_rt_k;q)_\infty (qt_jt_k/x_r;q)_\infty}{(x_rt_j/t_k;q)_\infty (x_rt_jt_k;q)_\infty} \tag{20}$$

を考察する。ここで

$$q^\delta = a_1a_2\cdots a_m,\ q^\tau = x_1x_2\cdots x_l$$

とおいた。このとき $\Phi(t)$ は C_n 型の Weyl 群対称性をもつ。[例 2] と同様に n 次元コホモロジー $H^n(X, \Phi, \nabla_q)$ およびその歪対称部分 $H^n_{skew}(X, \Phi, \nabla_q)$ を考察する。次の事実が成り立つ。

定理 6.2

$$\kappa = \dim H^n(X, \Phi, \nabla_q) = \{m + 2(n-1)l\}^n \tag{21}$$
$$\kappa_0 = \dim H^n_{skew}(X, \Phi, \nabla_q) = \binom{s+(n-1)l}{n} \tag{22}$$

実際 $H^n_{skew}(X, \Phi, \nabla_q)$ の基底を与える代表元として C_n 型既約指標 $\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_{\kappa_0}$ を用いて $\varphi_1 = \tilde{\varphi}_1\Delta(t), \ldots, \varphi_{\kappa_0} = \tilde{\varphi}_{\kappa_0}\Delta(t)$ を選ぶことができる。ここで

$$\Delta(t) = \sum_{\sigma\in W} \mathrm{sgn}(\sigma)\, \sigma(t_1^n t_2^{n-1}\cdots t_n).$$

定理 6.2 の結果として (9) およびその歪対称な部分は、q-移動 T_{a_k}, T_{x_r} に関してそれぞれ (15)-(16) タイプの κ, κ_0 次のホロノミックな q-差分方程式を満たす。しかしそれらの明示的な表式については、今のところごく限られた場合にしか与えられていない。ただ周期行列式は明示的に求めることができる ([9], [10] 参照)。

特に $s = l = 1$ の場合は $\kappa_0 = 1$ である。W を C_n 型 Weyl 群として、$\varphi(t) = \Delta(t)$ をとるとき (9) は $a_1, \ldots, a_4, x_1$ の関数として Γ_q-関数の積をもちいて表すことができる。これらの詳細については [18], [19], [30] などを参照。

最後に $n = 1$ の場合に歪対称部分の Jackson 積分に関する q-差分方程式、接続関係などの明示的な公式について最近の伊藤雅彦氏らの計算結果などを紹介する ([20] 参照)。$m = 2s+2$ に注意して

$$\Phi(t) = \prod_{k=1}^{2s+2} t^{1/2-\alpha_k} \frac{(qt/a_k;q)_\infty}{(a_kt;q)_\infty}$$

とするとき、$H^1_{skew}(X, \Phi, \nabla_q)$ の次元は s で、基底として $\varphi_k = t^k - t^{-k}$ $(1 \leq k \leq s)$ をとることができる：

$$H^1_{skew}(X, \Phi, \nabla_q) \cong \langle \varphi_1, \ldots, \varphi_s \rangle.$$

φ_k の Jackson 積分 (9) を J_k で表すとき q-差分方程式は

$$T_{a_k}(J_j) = -(a_k + 1/a_k)J_j + J_{j+1} + J_{j-1} \quad (1 \leq j \leq s-1), \tag{23}$$

$$T_{a_k}(J_s) = -(a_k + 1/a_k)J_s + J_{s-1} + \sum_{r=1}^{s} (-1)^{s-r} \frac{\epsilon_{s-r+1} - \epsilon_{s+r+1}}{1 - \epsilon_{2s+2}} J_r. \tag{24}$$

ここで ϵ_r は $a_1, a_2, \ldots, a_{2s+2}$ の r 次基本対称式。

これらのホロノミック q-差分方程式は非正則特異 (irregular singularity) である。J_k の漸近展開について一般的な構造はわからないが、特別な方向の無限遠

$$a_k = \hat{a}_k q^{(s+1)N} \ (1 \leq k \leq s), \ a_k = \hat{a}_k q^{-sN} \ (s+1 \leq k \leq 2s+2), \quad N \to \infty$$

に対しては、簡単な考察で

$$J_j \approx -(1-q) q^{((s+1)N + \hat{\alpha}_j)(sN/2 - \hat{\delta}/2 + s + 1 - k)} (q;q)_\infty \prod_{k=1}^{s} (q\hat{a}_j/\hat{a}_k; q)_\infty \quad (1 \leq k < \infty)$$

が得られる。ただし $q^{\hat{\alpha}_k} = \hat{a}_k$, $q^{\hat{\delta}} = \hat{a}_1 \cdots \hat{a}_{2s+2}$.

この漸近展開の公式は複雑ではあるが $n > 1$ の場合にも拡張することができる ([10] 参照)。さらに接続関係式について

$$[\langle \xi \rangle : \langle a_k \rangle]_\Phi = \sum_{k=1}^{s} \frac{\Theta(\xi)}{\Theta(a_k)} \prod_{\substack{1 \leq j \leq s \\ j \neq k}} \frac{\theta(a_j \xi; q)\theta(a_j/\xi; q)}{\theta(a_j a_k; q)\theta(a_j/a_k; q)} \tag{25}$$

が成立。ここで

$$\Theta(\xi) = \xi^{s - \sum_{k=1}^{2s+2} \alpha_k} \frac{\theta(\xi^2; q)}{\prod_{k=1}^{2s+2} \theta(a_k \xi; q)}.$$

これらの接続関係式は R-行列の BC_n 版類似であることは明らかであるが、これがどのような定式化をもって一般化されるか？また対応する q-差分方程式との関連は興味深いところである。

非正則特異なホロノミックな q-差分方程式の扱いについては筆者にはまだ未知のことばかりである。たとえば q-差分方程式系 (23), (24) の基本解の構成の方法についても差分方程式の立場からは今のところわかっていない。

Remark 6.3 最近、(23) ,(24) について著者は次のような解が存在することを示した *(see* [31]*)*。

すなわち、(23) ,(24) は $y_k = \langle \varphi_k, \xi \rangle$ とおくことにより次のように 1 階の行列形に書き表される。ベクトル関数 $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_s)$ に関して

$$T_{a_k}\mathbf{y} = \mathbf{y}A_k \tag{26}$$

いま行列 $B = \sum_{j=1}^{s-1}(E_{j,j+1} + E_{j+1,j})$ の対角化を

$$B = V\sum_{j=1}^{s} \cos(j\pi/(s+1))E_{j,j}V^{-1}$$

とおく。ただし $E_{i,j}$ は i, j 成分のみ 1 で他の成分が 0 である行列。

このとき、原点 $(a_k)_{1\leq k\leq m} = 0$ の近傍において漸近展開

$$Y \approx \sum_{j=1}^{s}\prod_{k=1}^{m} \theta(a_k; q)(\cos(j\pi/(s+1))a_k; q)E_{j,j}(1+ \mod \{ \text{ higher terms than 1st order}\})$$

を持つ *(26)* の基本解がただひとつ存在する。

しかし、この解と *Jackson* 積分 $\langle \varphi_k, \xi \rangle$ との関係については今のところ筆者にとっては不明である。

また BC_n 型についても類似の漸近形が存在するかどうかも不明である。1 変数の場合の最近の結果 *(*追加文献 [32],[33] 参照*)* を利用して、多変数ホロノミック系についても標準形が求められるのではないかと期待している。

References

[1] G.E. Andrews, q-series : their development and application in analysis, number theory, and computer algebra. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 66. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the AMS, Providence, RI, 1986.

[2] K. Aomoto, A note on holonomic q-difference systems. Algebraic Analysis,I, 25-28, Academic Press, 1988.

[3] K. Aomoto, q-analogue of de Rham cohomology associated with Jackson integrals I,II. Proc. Japan Acad. Ser.A Math.Sci. 66(1990),161-164; 240-244.

[4] K. Aomoto, Connection formulas in the q-analogue de Rham cohomology. Functional Analysis on the eve of the 21st century, Vol.1 (New Brunswick, NJ, 1993), 1-12, Progr.Math.,131, Birlhäuser Boston, Boston, MA,1995.

[5] K. Aomoto, Gauss decomposition of connection matrices and application to Yang-Baxter equation, I,II. Proc. Japan Acad., 69, Ser. A, No.7(1993),238-242; No.8(1993),341-344.

[6] K. Aomoto, Gauss matrix decomposition and a solution of the Yang-Baxter equation. J. Math. Anal. and Appli., 182(1994), 127-133.

[7] K. Aomoto, Analytic difference equations and connection problem, Open problems and conjectures. JDEA 4(1998), 597-603.

[8] R. Askey, Beta integrals in Ramanujan's papers, his unpublished work and further examples. Proc.,of the Centenary Conf., Univ. of Illinois at Urbana-Champain, 1987, 561-590.

[9] K. Aomoto and M. Ito, On the Structure of Jackson integrals of BC_n-type. Preprint, 2005.

[10] K. Aomoto and M. Ito, A determinant formula for a holonomic q-difference system associated with Jackson integrals of type BC_n. Preprint, 2006.

[11] K. Aomoto and Y. Kato, A q-analogue of de Rham cohomology associated with Jackson integrals. Special Functions (Okayama 1990), 30-62, ICM-90 Satell. Conf. Proc., Springer, Tokyo, 1991.

[12] K. Aomoto and Y. Kato, Connection formula of symmetric A-type Jackson integrals. Duke Math. J., 74(1994), 129-143.

[13] K. Aomoto and Y. Kato, Gauss decomposition of connection matrices for symmetric A-type Jackson integrals. Selecta Math., New Series, I(1995), 623-666.

[14] K. Aomoto and Y. Kato, Derivation of q-difference equation from connection matrix for Selberg type Jackson integrals. Jour. of Difference Equations and Appli., 4(1998), 247-278.

[15] G. Gasper and M. Rahman, Basic Hypergeometric Series. Encyclopedia of Math., Cambridge UP., 1990.

[16] A.O. Gelfond, Calculus of Finite Differences. Hindustan, 1971.

[17] M. Ito, Symmetry classification for Jackson integrals associated with irreducible reduced root systems. Compositio Math. 129 (2001), 325-340.

[18] M. Ito, Symmetry classification for Jackson integrals associated with the root system BC_n. Compositio Math. 136 (2003), 209-216.

[19] M. Ito, q-difference shift for a BC_n type Jackson integrals arising from 'elementary' symmetric polynomials. Advances in Math, to appear.

[20] M. Ito and Y. Sanada, On the Sears-Slater basic hypergeometric transformations. Preprint, 2006.

[21] K.W.J. Kadell, A proof of Askey's conjectured q-analogue of Selberg's integral and a conjecture of Morris. SIAM J. Math. Anal. 19(1988), 969-986.

[22] J. Kaneko, q-Selberg integrals and Macdonald polynomials. Ann. Sci. École Norm Sup., 29(1996), 583-637.

[23] I.G. Macdonald, A formal identity for affine root systems. Lie groups and symmetric spaces. 195-211, AMS Translation , Ser.2, 210, AMS., Providence, RI, 2003.

[24] A. Matsuo, Quantum algebra structure of certain Jackson integrals. Comm. Math.Phys., 157(1993), 479-498.

[25] K. Mimachi, Connection problem in holomomic q-difference system associated with a Jackson integral of Jordan-Pochhammer type. Nagoya Math. J., 116(1989), 149-161.

[26] K. Mimachi and M. Noumi, An integral representation of eigenfunctions for Macdonald's q-difference operators. Tôhoku Math. J., 49(1997), 517-525.

[27] C. Sabbah, Systèmes holonomes d'équations aux q-différences. D-modules and microlocal geometry (Lisbon, 1990), 125-147, de Gruyter, Berlin, 1993.

[28] M. Sato, T. Shintani and M. Muro, Theory of prehomogeneous vector spaces (Algebraic Part), Appendix. Nagoya Math. J., 120(1990), 1-34.

[29] V. Tarasov and A. Varchenko, Geometry of q-hypergeometric functions, quantum affine algebras and elliptic quantum groups. Astérisque 246(1997), 1-135.

[30] J.F. van Diejen, On certain multiple Bailey, Rogers and Dougall type summation formulas. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 33(1997), 483-508.

文献追加

[31] K.Aomoto, A nomal form of holonomic q-difference equations for BC_1 type. Preprint, 2006.

[32] J.P.Ramis, J.Sauloy, Ch. Zhang, La variété des classes analytiques d'equations aux q-différences dans une classe formelle. C.R.Acad.Sci.Paris, Ser.I 338(2004)277-280.

[33] J.P.Ramis, J.Sauloy, Ch. Zhang, Développement asymptotiques et sommabilité des solutions des équations linéares aux q-différences. C.R.Acad.Sci.Paris, Ser.I 342(2006)515-518.