ベルグマン核に現れる解析と幾何

小松 玄 (大阪大学・大学院理学研究科)

強擬凸領域のベルグマン核が面白い理由のひとつは, その特異性を調べるのにいろいろな解析の方法が使われていて, また最終的には幾何の具体的な情報をとりだせることだと思う. 学校で習ったこと (または数学の常識) にちょっと付け足した程度の知識でいろいろ遊べるのは楽しい. とはいうものの, ちょっとずつたくさんというのは結構難物で, 身構えたり勘違いしたりしていて, なかなか勉強が進まない. そういう経験をしてきた身として, これから勉強したいという人たちに,

ベルグマン核に現れる解析と幾何は怖くない

というメッセージをエールとして送りたい. 怖くないというメッセージなのだから, 不思議なことに出会ったり, その理由 (仕組) を知りたいと思ったり, ああそういうことだったのだと納得してみたりという, そういう経験については, いま (同時には) 伝えられないが, お許しいただきたい.

講演は OHP 原稿を使っておこなった. 口と併せて意味を成すわけだが, 書き直すと OHP のレイアウトが死んでしまうので, OHP 原稿を再録して, それに notes を付け足すことにした. (こう決心するまでに時間がかかって, 組織委員の皆様に大変ご迷惑をおかけしました. おわびします.) なお, 参考文献をつけることも考えたが, 怖くないということを伝えるという主旨から考えて (基本的には) やめた. 平地健吾君との共著の総合報告があるので ([1]), それの文献表からたいていたどれると思う. もう少し新しい論文 [2] の序文は, レフェリーの要請で長くしたので, 参考になるかもしれない. 最後に, [1] にも [2] にも引用していない重要な論文 [3] を, ひとつだけ引用しておく.

[1] K. Hirachi and G. Komatsu, Invariant theory of the Bergman kernel, in CR-Geometry and Overdetermined Systems, Advanced Studies in Pure Mathematics **25**, pp. 167–220, Math. Soc. Japan, 1997.

[2] K. Hirachi, G. Komatsu and N. Nakazawa, CR invariants of weight five in the Bergman kernel, Advances in Math. **143** (1999), 185–250.

[3] N. Nakazawa, Asymptotic expansion of the Bergman kernel for strictly pseudoconvex Reinhardt domains in $\mathbb{C}^2$, Osaka J. Math. **31** (1994), 291–329 (announcement in Proc. Japan Acad. **66** (1990), 39–41).

内容の目次

レイアウトの目次

§1 (ベルグマン核) の notes

まずベルグマン核の定義 (完全正規直交系を使う) を述べて, 球の場合 (ベルグマン核が具体的に計算できる例) に形を書いた. 領域の定義函数 (キーワードである) を使ってベルグマン核の特異性の形を書くのだが, 球の場合から始めて強擬凸領域にいたる. 式番号がふたつだけあって, それらは:

(1) 球の場合のベルグマン核の形,
(2) 強擬凸領域のベルグマン核の特異性の形.

特異性は局所化可能であることを注意した後に, 変換則 (双正則写像の下での) を書いた. 一変数の場合と多変数との違いで著しいことは, リーマンの写像函数があるかないかと, グリーン函数で書けるか書けないかである (多変数だとグリーン作用素が $\overline{\partial}$-ノイマン問題の解作用素にかわる). 考える問題は式 (2) に現れるふたつの函数 φ^{B}, ψ^{B} の幾何的な記述で, 講演の際にはその場で下手な図を描いた (熱核とリーマン幾何の対応の場合と比較して難点を説明した). 話のプランは

§2 (⋯ 現れる) 解析　　　§3 (⋯ 現れる) 幾何

であり, (⋯ 現れる) 解析の内訳は

(1°) $\mathbf{K}^{\mathrm{B}} = 1 - \overline{\partial}^{*}\mathbf{N}\,\overline{\partial}$ (Schiffer-Kohn の公式), $\overline{\partial}$-ノイマン問題
(2°) 特異性の形 (2) の由来 Fefferman (Boutet de Monvel-Sjöstrand)
(3°) 特異性の形 (2) の具体的計算 (柏原-Boutet de Monvel)

また (⋯ 現れる) 幾何の内訳は

(1°) 強擬凸領域の境界の幾何
(2°) (強擬凸領域の) 局所双正則幾何
(3°) 複素モンジュ・アンペール方程式の幾何 (強擬凸)

の予定だったが, (⋯ 現れる) 幾何の方はかけあしになってしまった.

最後に, 強擬凸領域とはどんなものかを老婆心から復習し, 人は何で数学するかを Q & A の形で反省した (妄言多謝).

§2 (ベルグマン核に現れる解析) の notes

偏微分方程式論の手法にはふたつあって, 函数解析的 (評価付) なのと代数解析的 (計算付) なのである. 函数解析的な方が人口が多いのでそちらから説明した. 線形偏微分方程式はふつう二階二変数の場合から習うが, その分類とからめて, フーリエ積分作用素・擬微分作用素・特異積分作用素とはどんなものか, 粗く述べた. 函数解析的手法にも二つある:

- o ディリクレ積分 (先験的評価式) の方法 (抽象的),
- o 基本解 (パラメトリックス) の方法 (具体的).

$\overline{\partial}$-ノイマン問題は前者で, ベルグマン核の特異性は後者で取り扱う. 後者に現れる擬微分作用素でも特異積分作用素でも, 積分核の代数として扱うわけだが, この代数を概説した. なお, この話全体の裏側で働いているアダマール変分の考え方について, 函数解析との関係を注意した.

以下, 多少の細部にはいる. まず $\overline{\partial}$-ノイマン問題を述べた. これは Hörmander の多変数函数論の教科書にもつながったが, 線形偏微分方程式 (準楕円性) の研究にも大きな影響を与えた. 次に, 1974年に出た三つの長い重要な論文に言及した:

1 C. Fefferman (Invent. Math.) ベルグマン核の特異性
2 Folland-Stein (Comm. Pure Appl. Math.) ハイゼンベルグ群
3 Chern-Moser (Acta Math.) モーザーの標準形

Chern-Moser は §3 の (… 現れる) 幾何を詳述すれば頻出する (詳述しないけど). Folland-Stein は境界付 (または境界上の) $\overline{\partial}$ 理論のモデル領域の境界は球面でなくハイゼンベルグ群であることを見抜き, その上での特異積分論を展開した. 境界上での $\overline{\partial}$ 理論を考えれば自然に Szegö 核 (ゼゲー核) にいたる. これはベルグマン核の親戚であり, 類似の扱いができる (ベルグマン核より簡単なこともあれば, 難しいこともある). なお前に式番号はふたつだけと書いたが, 厳密にいうとふたつ目 (強擬凸領域のベルグマン核の特異性の形) の変種がここに出て来る:

$(2)^{\mathrm{S}}$ 強擬凸領域の Szegö 核の特異性の形.

これを調べる最も素朴な方法は Kerzman-Stein (Duke Math. J. 1978) だろうが, これとの関連で Ligocka (Studia Math. 1984) によるベルグマン核版に触れ, 次いでこの話のメインテーマである Fefferman (1974) による特異性 (2) の構成, Boutet de Monvel と Sjöstrand によるその平易化 (1976) につなげた.

代数解析的手法による具体的な計算にはいる前に, 少し対称性を仮定して領域のクラスを限ったときの話をした. こうすると不変量が一斉に退化することもあり得るが, 例えば (強擬凸な) 柱状領域 (またはラインハルト領域) では, 目下具体的な計算が可能なところまでは退化していないことがわかる. (中澤則之による. 詳しくは, [3] の方法で [2] の結果まで得られる.) このことは著しい.

§2 の残りの部分で BK (ベルグマン核) と SK (Szegö 核 = ゼゲー核) の具体的な計算方法を説明した (柏原-Boutet de Monvel の公式を使う; これは Boutet de Monvel-Sjöstrand とは違う). 復習すると, 佐藤超函数の理論では δ-函数はコーシーの積分公式に現れる積分核 $1/(2\pi i\,z)$ であり, これから微分と不定積分により

$$\frac{\varphi(z)}{z^\ell}+\psi(z)\log z \quad (\varphi(z) \text{ と } \psi(z) \text{ は正則函数で } \ell\in\mathbb{N}_0)$$

という形の特異性が得られる ($\log z$ はその多価性を通して Heaviside 函数 $Y(z)$ の定数倍をあらわす). よって領域 $\{\rho>0\}$ の境界の δ-函数は $1/\rho$ の定数倍で, Heaviside 函数 $Y(\rho)$ は $\log\rho$ の定数倍である. これら $1/\rho$ または $\log\rho$ のどちらを基準にしてもよいが, これから生成される積分核の代数がベルグマン核やゼゲー核の特異性を含む. モデルの領域 (即ちハイゼンベルグ群を境界とする強擬凸なジーゲル領域) を $\{\rho_0>0\}$ として $\delta_0\coloneqq\delta(\rho_0)$, $Y_0\coloneqq Y(\rho_0)$ とおくと

$$Y=Y(\rho)=A^{\mathrm{B}}\,Y_0,\quad \delta=\delta(\rho)=A^{\mathrm{S}}\,\delta_0$$

をみたす作用素 A^{B}, A^{S} を具体的につくれるが, 柏原-Boutet の公式というのは

$$K^{\mathrm{B}}=(A^{\mathrm{B}})^{*-1}\,K_0^{\mathrm{B}},\quad K^{\mathrm{S}}=(A^{\mathrm{S}})^{*-1}\,K_0^{\mathrm{S}}$$

である (K^{B} と K^{S} はベルグマン核とゼゲー核で, モデル領域のとき K_0^{B}, K_0^{S} と書いた). A^{B} (または A^{S} も同様) は $\rho=0$ をグラフとする函数を ρ_0 変数でテイラー展開するような作用素 (実際はもう少し複雑な無限階の微分作用素) であり, これだけ直截だからこそ, 転置の逆 $(A^{\mathrm{B}})^{*-1}$, $(A^{\mathrm{S}})^{*-1}$ を具体的にいくらでも先まで漸近的に計算できる (フーリエ積分作用素のように定式化すると具体的には全然計算できない). でも, だから Hadamard 変分みたいな感じになるので, formal calculus になる (解析性を仮定しても気休めにならない). 柏原-Boutet の公式は, ベルグマン核を特徴付ける (斉次) ミクロ微分方程式系 (柏原による) を使って証明される (ゼゲー核のときも同様).

§3 (ベルグマン核に現れる幾何) の notes

まず Subsection 3.1 (序) では, 熱核とリーマン幾何の対応の場合と比較して, ベルグマン核に対応する局所幾何の説明を始めた (大域幾何は殆どできていない). 局所幾何は境界上の CR 幾何で, 境界点の近傍での局所双正則幾何が補助的に必要となる. Subsection 3.2 (双正則変換則) では, 別行の式 (2) (強擬凸領域のベルグマン核の特異性の形) または $(2)^{\mathrm{S}}$ (強擬凸領域の Szegö 核の特異性の形) に現れる函数 $\varphi^{\mathrm{B}}, \psi^{\mathrm{B}}, \varphi^{\mathrm{S}}, \psi^{\mathrm{S}} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ を領域の定義函数 $\rho \in C^\infty(\overline{\Omega})$ で

$$\varphi^{\mathrm{B}} = \sum_{j=0}^{n} \varphi_j^{\mathrm{B}}\, \rho^j + O(\rho^{n+1}), \quad \varphi^{\mathrm{S}} = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j^{\mathrm{S}}\, \rho^j + O(\rho^n),$$

$$\psi^{\mathrm{B}} = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_{j+n+1}^{\mathrm{B}}\, \rho^j + O(\rho^\infty), \quad \psi^{\mathrm{S}} = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_{j+n}^{\mathrm{S}}\, \rho^j + O(\rho^\infty)$$

と展開することを考えている (但し $\varphi_j^{\mathrm{B}}, \varphi_j^{\mathrm{S}} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ は境界上の函数でないところがミソである). 領域の定義函数 ρ は熱核の時間変数 t に対応するから函数 φ_j^{B}, φ_j^{S} のウェイトを

$$(\#)_j \qquad \mathrm{w}(\varphi_j^{\mathrm{B}}) = j, \quad \mathrm{w}(\varphi_j^{\mathrm{S}}) = j$$

と測りたいところだが, この測り方は

$$(\#)_\rho \qquad \exists\rho \in C^\infty_{\mathrm{def}}(\overline{\Omega}) \ \ (C^\infty \text{ 定義函数}) \ \ \text{s.t.} \ \ \mathrm{w}(\rho) = -1$$

ならばつじつまが合う. 詳しくは, 特異性の形 (2) および $(2)^{\mathrm{S}}$ をみればわかることだが, $(\#)_\rho$ と $(\#)_j$ $(j \in \mathbb{N}_0)$ は次の式と整合している (consistent):

$$\mathrm{w}(K^{\mathrm{B}}) = n+1, \quad \mathrm{w}(K^{\mathrm{S}}) = n;$$

またこれは, 双正則写像 $\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ の下での領域汎函数 $K = (K_\Omega)$ の変換則を以下の式で定めれば実現される:

$$K_{\Omega_1} = (K_{\Omega_2} \circ \Phi)|\det \Phi'|^{2w/(n+1)} \quad (w \in \mathbb{N}_0 \text{ がウェイト}).$$

実際, ベルグマン核はウェイト $n+1$ の双正則変換則をみたし, Szegö 核もそれを定義する境界上の面素を上手にとればウェイト n の双正則変換則をみたす (いまそういう面素だけを考えている).

このように, もし $(\#)_\rho$ が成り立つならば, ベルグマン核や Szegö 核について, 双正則変換則のウェイトと, 特異性を測る領域の定義函数 $\rho \in C^\infty(\overline{\Omega})$ のベキとの勘定がうまく合って, 美しい理論の予感がする. 現実には, $(\#)_\rho$ は近似的にしか成り立たない. 詳しくは, $(\#)_\rho$ の変換則 $\mathrm{w}(\rho) = -1$ を近似的にみたす ρ は容易に構成できるが (複素モンジュ・アンペール方程式の零ディリクレ境界値問題の C^∞ 近似解をとる), 正確にみたす C^∞ 定義函数 $\rho \in C^\infty_{\mathrm{def}}(\overline{\Omega})$ は存在しない (証明できる). でも, 近似が成り立つぎりぎりのところまでは理論ができる. さらに, がんばっているとごほうびで, この困難の迂回の仕方もわかってくる (→ 平地健吾, Ann. of Math. 2000). 詳しいことは省略する.

Subsection 3.3 (CR 変換則) では, (スカラー) CR 不変量の説明をした. ウェイト $w \in \mathbb{N}_0$ の CR 不変量は局所的に定義された境界汎函数 $K = (K_{\partial\Omega})$ であって, CR 同型写像 $\Phi : \partial\Omega_1 \to \partial\Omega_2$ の下での変換則

$$K_{\partial\Omega_1} = (K_{\partial\Omega_2} \circ \Phi)|\det \Phi'|^{2w/(n+1)}$$

をみたす (Φ を形式的に双正則に拡張しておく). 変換則 $(\#)_j$ が成り立つのはウェイト j が浅いところだが (そこでは変換則 $(\#)_\rho$ の近似が生きている), そのとき φ_j^{B}, φ_j^{S} の境界値はウェイト j の CR 不変量になる. φ_j^{B}, φ_j^{S} を $j = 0, 1, 2, \ldots$ と順に決めて行くのも楽しいが, 省略する.

こうして, ベルグマン核と CR (または擬共形) 幾何との関係が, 熱核とリーマン幾何の関係に負けない程度にわかった. いやまだ負けているかもしれないが, こちらには将来性がある. お手本もあるし, 新しい複雑さもあるし, 例には特殊函数やディリクレ級数も見えているし, ... それで? というわけだが, それを論じるのはここでは重すぎる.

1. ベルグマン核

定義. 領域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ (または複素多様体) 上の L^2 正則函数の空間 $H^{\mathrm{B}}(\Omega)$ の完全正規直交系 $\{h_j\}$ を任意にとって, 次のようにおく:

$$K^{\mathrm{B}}(z,w) := \sum h_j(z)\,\overline{h_j(w)} \quad (z,w \in \Omega),$$
$$K^{\mathrm{B}}(z) := K^{\mathrm{B}}(z,z) = \sum |h_j(z)|^2.$$

- z と $\overline{w}$ に関して正則である.
- 完全正規直交系の選び方に依存しない.
- h_j を正則 n-形式とすれば, 多様体上 (複素構造だけで) 定義される (エルミート計量は不要):

$$h(z) \wedge \overline{h(z)} \text{ は } 2n\text{-形式 } (\Omega \text{ 上積分できる}).$$

例. 球だと単項式が完全直交系をなす (計算できる). 単位球 $\{|z| < 1\} \subset \mathbb{C}^n$ のとき,

$$K^{\mathrm{B}}_{\mathrm{ball}}(z,w) = c^{\mathrm{B}}_n/(1 - z\cdot\overline{w})^{n+1}.$$

$\rho(z,w) := 1 - z\cdot\overline{w}$ とおくと, $\rho(z) := \rho(z,z)$ は球の定義函数である ($\rho(z,w)$ は $\rho(z)$ の複素化).

一般に $\Omega = \{\rho(z) > 0\} \subset \mathbb{C}^n$ 但し

$$|\mathrm{grad}\,\rho| \neq 0 \quad \text{on} \quad \rho = 0$$

(即ち $\rho \in C^\infty_{\mathrm{def}}(\overline{\Omega})$ 定義函数) のとき

$$(1) \qquad K^{\mathrm{B}}_{\Omega}(z) = \frac{\exists\varphi^{\mathrm{B}}(z)}{\rho(z)^{n+1}}, \quad \varphi^{\mathrm{B}} \in C^\infty(\overline{\Omega})$$

かというと,

$$n = 1 \text{ のときは (1) は正しい}$$

が, $n \geq 2$ のときは一般に (1) は正しくなくて,

$$\exists\psi^{\mathrm{B}}(z)\log\rho(z), \quad \psi^{\mathrm{B}} \in C^\infty(\overline{\Omega})$$

という形の弱い特異性が現れる (Fefferman, 1974):

$$(2) \qquad K^{\mathrm{B}}(z) = \frac{\exists\varphi^{\mathrm{B}}}{\rho^{n+1}} + \exists\psi^{\mathrm{B}}\log\rho.$$

但し

$\Omega \subset \mathbb{C}^n$ は強擬凸 (球を局所モデルとする問題).

なお特異性は局所化可能だから

Ω は mfd with bdry (複素多様体内の領域)

で OK.

注意 (変換則). 双正則写像 $\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ に対して

$$K^{\mathrm{B}}_{\Omega_1}(z) = K^{\mathrm{B}}_{\Omega_2}(\Phi(z))\,|\det\Phi'(z)|^2.$$

(複素化もできる.)

一変数の場合: 特異性は局所的に自明だが,

- 双正則写像 = Riemann の写像函数
- 変換則 $\leftrightarrow$ 写像函数によるベルグマン核の表示

  $$K^{\mathrm{B}}_{\Omega}(z,w) = K^{\mathrm{B}}_{\Delta}(\Phi(z),\Phi(w))\,\Phi'(z)\,\overline{\Phi'(w)}.$$

  $w = \Phi(w) = 0 \in \Delta = \{|z| < 1\}$, $\Phi'(w) > 0$ と正規化すれば $K^{\mathrm{B}}_{\Delta}(\Phi(z),\Phi(w)) = \mathrm{const}$.

  写像函数の境界正則性は局所化可能 $\leftarrow$ Schauder 評価の Cauchy 核版 (Warschawski)
- 一変数だとグリーン函数で書ける:

  $$K^{\mathrm{B}}(z,w) = (\mathrm{const})\,\frac{\partial^2 G}{\partial z \partial\overline{w}}(z,w).$$

  作用素版は $\mathbf{K}^{\mathrm{B}} = 1 - \overline{\partial}^*\mathbf{G}\,\overline{\partial}$ (Schiffer).

多変数だと違う ($\to$ $\overline{\partial}$-**Neumann** 問題).

作用素版は $\mathbf{K}^{\mathrm{B}} = 1 - \overline{\partial}^*\mathbf{N}\,\overline{\partial}$ (Kohn の公式).

考える問題.

- $\varphi^{\mathrm{B}} = \varphi^{\mathrm{B}}[\rho]$, $\psi^{\mathrm{B}} = \psi^{\mathrm{B}}[\rho]$
  (定義函数 $\rho \in C^\infty_{\mathrm{def}}(\overline{\Omega})$ に依存する)
- 知りたいのは φ^{B} と $\psi^{\mathrm{B}} \xleftarrow{\text{反映}} \partial\Omega$ の幾何 (CR)
- むつかしいのは Ω の幾何 (双正則) との関係

話のプラン $\begin{cases} (\cdots \text{ 現れる}) \text{ 解析 (の反省会)} \\ (\cdots \text{ 現れる}) \text{ 幾何 (の反省会)} \end{cases}$

(… 現れる) 解析

(1°) $\mathbf{K}^{\mathrm{B}} = 1 - \overline{\partial}^*\mathbf{N}\,\overline{\partial}$ (Schiffer-Kohn の公式). $\overline{\partial}$-Neumann 問題

(2°) 特異性の形 (2) の由来
Fefferman (Boutet de Monvel-Sjöstrand)

(3°) (2) の具体的計算 (柏原-Boutet)

(… 現れる) 幾何

(1°) 強擬凸領域の境界の幾何

(2°) (強擬凸領域の) 局所双正則幾何

(3°) 複素 Monge-Ampère 方程式の幾何 (強擬凸)

強擬凸領域

強擬凸 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 局所的に球の摂動
(各境界点の近傍で)

球 $\overset{\text{極端}}{\longleftarrow}$ 擬凸 $\overset{\text{極端}}{\longrightarrow}$ 多重円板

$\{|z|<1\}$ $\{|z_1|<1,\ldots,|z_n|<1\}$

$$z=(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{C}^n,\ \ |z|^2:=|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2.$$

擬凸 $\Longrightarrow$ 正則領域 Levi 問題
擬凸 $\Longleftarrow$ 正則領域 正しい (簡単)

正則領域 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 同時解析接続できない

同時解析接続 $\mathcal{O}(\Omega\setminus K)=\mathcal{O}(\Omega)|_{\Omega\setminus K}$

例. コンパクトな穴は除去可能 ($\Omega\setminus K$ は連結).

(注) $n\geq 2$ のとき, $z_n=0$ は複素超平面
(正則函数の零点は孤立できない)

(注) $\Omega\setminus K\subset\mathbb{C}^n$ でも $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ とは限らない
($\rightarrow$ 正則領域の正式の定義は複雑)

Q & A

問題. 局所 CR 不変量は CR 多様体を特徴付けるか?

仮定: CR 多様体は強擬凸, 超曲面型, . . .

(Q1) Yes か No か判ったらうれしいか?

(Q2) どの位うれしいか?

(A) $\left\{\begin{array}{l}\text{自分が解いたらうれしい}\\ \text{他人が解いたらくやしい}\end{array}\right.$

(Q3) そんなんでいいのか?

(A3) よくない

(Q4) Yes か No か判るとはどういう意味か?

(A4) 地図をつくるよろこび
路地裏 $\longleftarrow$ 地図 $\longrightarrow$ 象の背中に地球

(Q5) 地図が出来てもうれしくないのは誰?

(A5) 全然知らないやつ (cf. 覆面レスラーの正体)

(Q6) 地図が出来てうれしいのは誰?

(A6) 業界人! 専門家♪ マニア?
暴論です (やりすぎ)
でも反省しない $\rightarrow$ 不良のすすめ

2. (⋯ 現れる) 解析

PDE 手法 (偏微分方程式論) $\left\{\begin{array}{l}\text{函数解析的 (評価付)}\\ \text{代数解析的 (計算付)}\end{array}\right.$

1 双曲型 (波動方程式)

2 $\left\{\begin{array}{l}\text{楕円型 (ラプラシアン)}\\ \text{放物型 (熱方程式)}\end{array}\right.$

⋆ 1 と 2 の専門家では, 3 年 DE の講義が違う.

∘ 1 が教えると, 一階線形常微分方程式系に詳しい
(ジョルダン標準形もやる).
一階 (準線形) 偏微分方程式もやる
準線形 = quasi-linear
= 最高階の微分に関して線形

∘ 2 が教えると, 評価ばっかり (不等式だらけ).

⋆ $\overline{\partial}$ では 2 の解析が主に現れる (FIO も現れる).

∘ FIO (Fourier 積分作用素) は 1 によく現れる;
微分作用素を標準形に直すときにも使う (いま).

∘ ΨDO (擬微分作用素) は 2 に現れる;

∘ SIO (特異積分作用素) は ΨDO の先祖 (本家).

⋆ 函数解析的手法にも二つある:

∘ ディリクレ積分の方法 (抽象的)
リースの定理で解の存在をいう

$\leftarrow$ 先験的評価式 (Gårding 不等式)
$\rightarrow$ 解の regularity (微分可能性)

$\overline{\partial}$-Neumann 問題はこっち

∘ 基本解 (パラメトリックス) の方法 (具体的)
E. E. Levi にさかのぼる

L に対して $LK_0=1-E$ (E は誤差) をみたす
K_0 が求まれば $K:=K_0(1-E)^{-1}$ が解作用素

ベルグマン核の特異性はこっち

積分核の代数 $\left\{\begin{array}{l}\text{大きいと応用が広い}\\ \text{小さいと詳しい解析が可能}\end{array}\right.$

∘ 合成・共役について閉じている.

∘ 考えている微分作用素と解作用素を含む.

∘ 誤差の測り方がある (cf. 漸近展開の剰余項).
例えば, 微分で悪くなり, 不定積分でよくなる.
(例えば Bessel ポテンシャルで上げ下げする.)

特異積分作用素の積分核では, 基本は

$$\frac{1}{2}\,f(x)+\mathrm{PV}\int K(x,x-y)\,f(y)\,dy$$

即ち
$$\frac{1}{2}\,\delta\text{-函数} + \text{主値積分核}.$$

アダマール変分. 例えば自由境界問題を陰函数定理 (非線形函数解析) で解こうとするとき, 作用素の定義域を固定するために, ひとつの領域への引き戻しを考えると便利である (引き戻しの函数が方程式の未知函数になる). こうすれば微分 (変分) がとれて (線形化できて) 陰函数定理が使える. しかし, 初めの微分作用素がきれい (例えば Laplacian) でも, 線形化方程式はきたない. これを引き戻しの逆で元の領域に戻せば, 線形化方程式はきれいになる. これがアダマール変分である.

境界値問題 $(0,q)$-form $\begin{cases} q=1 & \text{欲しい} \\ q=n & \text{Dirichlet} \end{cases}$

先験的評価式は basic estimate ($\leftarrow s\psi c$)

$$\int_{\partial\Omega}|u|^2+\int_{\Omega}|u_{\overline{z}}|^2 \lesssim Q(u,u)$$

Dirichlet 形式 (右辺のカッコは $L^2(\Omega)$ 内積):

$$Q(u,v):=(\overline{\partial}u,\overline{\partial}v)+(\vartheta u,\vartheta v)+(u,v)$$

Morrey (1958), Kohn (1963):

$$\|u\|^2_{z,t}+\|u\|^2_{\overline{z}}+\|u\|^2 \lesssim Q(u,u)$$

$L_1,\dots,L_{n-1}$ $(0,1)$-type, tangential
$L_1,\dots,L_n$ 正規直交 (局所的)

$$\|u\|^2_{z,t}=\sum_{j=1}^{n-1}\|L_j\,u\|^2,\quad \|u\|^2_{\overline{z}}=\sum_{j=1}^{n}\|\overline{L}_j\,u\|^2$$

(正確には右辺の u は u の係数).

本当は $\displaystyle\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{n-1}|L_j\,u|^2$ で, $\displaystyle\sum\int$ でない.

劣楕円型評価式が出て (C^∞) 準楕円性やらコンパクト性やらが出る (1965 Kohn-Nirenberg).
二重交換子 $\to C^\omega$ は出ない.

$\overline{\partial}$-Neumann 問題

- PDE アプローチ　PDE 純粋理論は貧弱
  ルーツから活力を貰う

  勝手に係数を書いて楽しいか? $\begin{cases} \text{no} & \text{は正常} \\ \text{yes} & \text{もいる} \end{cases}$

  ルーツ $\begin{cases} \text{物理} \\ \text{幾何} \\ \text{(SCV)} \end{cases}$

- $\overline{\partial}$-補正の方法 (Levi もクザンも解ける)
  近似解を素手でつくり, 方程式を解いて補正する.

  難しい正則函数 h を求めたいとき, 近似 h_0 を作り, $u=h_0-h$ を $\overline{\partial}u=f$ の解として求める.

  1960 年前後 $\begin{cases} \text{Spencer, Morrey, Kohn} \\ \text{Ehrenpreis} \end{cases}$

- $\overline{\partial}$-Neumann 問題は境界値問題
  $\to$ 解の境界平滑性が出る可能性; 実際, 出る
  $\leftarrow$ 作用素の低階の項でなく境界形状に依存

  $\Box=\overline{\partial}\,\overline{\partial}^*+\overline{\partial}^*\overline{\partial}$ を (強) 擬凸領域 (開多様体) 上で考える. $\Box v=f$ が解けると $\overline{\partial}(\overline{\partial}^*v)=f$ である ($\leftarrow$ 適合条件). $v=Nf$ と書くと N が $\overline{\partial}$-Neumann 作用素 (と呼ばれる).

1973年4月 − 1975年3月 (タイムラグ有)

Folland-Kohn 1972 プリンストンの赤本
Kohn, J. Diff. Geom. (1972) 途中で出た.
Kohn (1963–64)
Kohn-Nirenberg (1965)
Hörmander (1965) Acta 論文
　　(1966) 多変数函数論教科書
Andreotti-Vesentini (1965)

1975年3月 − 4月

1 C. Fefferman (1974) ベルグマン核の特異性
2 Folland-Stein (1974) ハイゼンベルグ群
3 Chern-Moser (1974) モーザーの標準形

Chern-Moser ($\to$ 幾何)

Folland-Stein

- 一変数だと円も上半平面も一緒.
- 多変数でも球と Siegel 上半空間は一緒だが, ユニタリ群よりハイゼンベルグ群の方が基本的 (交換関係).
- ハイゼンベルグ群の上で $\Box_b := \overline{\partial}_b\overline{\partial}_b^* + \overline{\partial}_b^*\overline{\partial}_b$ (群不変) の基本解を構成 (モデル)

  $\longrightarrow$ 強擬凸な境界をハイゼンベルグ群で近似
- $\overline{\partial}$-Neumann は抽象論先行なのでこれは貴重

$\overline{\partial}_b$

- 一変数だと正則函数の境界値は特異積分方程式で特徴付けられる (Plemelj の公式).
- 多変数だと正則函数の境界値は $\overline{\partial}_b h = 0$ で特徴付けられる (線形連立偏微分方程式系).

  Cauchy-Riemann 方程式の接方向成分をとる (接 Cauchy-Riemann 方程式とも呼ばれる)

  Hans Lewy の解のない微分方程式とも関係している (溝畑作用素とも関係している).
- $\overline{\partial}$-Neumann 問題を境界上に帰着させたものは $\Box_b$ に似ている (同じに扱える).

Szegö 核 (ゼゲー核)

- ベルグマン核のときの $H^{\mathrm{B}}(\Omega) = \mathcal{O}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ をヒルベルト空間 $H^{\mathrm{S}}(\Omega) := \mathcal{O}(\Omega) \cap L^2(\partial\Omega)$ (の完全正規直交系 $\{h_j\}$) で置き換えると Szegö 核が定義される:

$$K^{\mathrm{S}}(z,w) := \sum h_j(z)\,\overline{h_j(w)} \quad (z, w \in \Omega).$$

  これは $L^2(\partial\Omega)$ を定義する面素に依存する.
- Szegö 核が定める $L^2(\partial\Omega)$ 上の積分作用素は, $\overline{\partial}_b$ の零空間への直交射影である (面素に依存).
- Szegö 核の特異性の形はベルグマン核のと似ているが, 負ベキがひとつずれている:

$$(2)^{\mathrm{S}} \qquad K^{\mathrm{S}}(z) = \frac{\exists\varphi^{\mathrm{S}}}{\rho^n} + \exists\psi^{\mathrm{S}} \log\rho.$$

  $\varphi^{\mathrm{S}}, \psi^{\mathrm{S}} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ は ρ と面素に依存する.

- 一変数の場合, Szegö 核は Cauchy 核に近い.

  Cauchy 核はエルミート対称に近い:

$$C_b^*(z,w) - C_b(z,w) =: i\,A_b(z,w)$$

  とおくと, $A_b(\cdot,\cdot) \in C^\infty(\partial\Omega \times \partial\Omega)$ はエルミート対称である; また, 積分作用素として

$$K^{\mathrm{S}} = C_b\,(1 - i\,A_b)^{-1}.$$

- 多変数の場合にも, 上と似た表示が成り立つ (C_b は Henkin 核で, A_b は有限次の平滑化). それから $(2)^{\mathrm{S}}$ も導ける (Kerzman-Stein).
- ベルグマン核の場合にも, 上と似た表示が成り立つ それから (2) も導ける (Ligocka).
- **Fefferman** による (2) の証明も, 作戦は一緒 (第 0 近似を素手で作ってノイマン級数で補正).

  但し, 第 0 近似の作り方が, 手が込んでいる.

  また, 積分核の代数を小さく取ろうとしている.

- **Boutet de Monvel** と **Sjöstrand** による $(2)^{\mathrm{S}}$ の証明は, 複素相函数をもつ FIO を使っている ($\overline{\partial}_b$ を標準形に直すとき現れる). 相函数

  $\rho(z,w)$ は定義函数 $\rho(z)$ の複素化 $\Leftarrow C^\omega$

  (C^∞ のときは複素化もどき $=$ 概解析的拡張).

  よってラプラス積分の表示を得る:

$$K^{\mathrm{S}}(z,w) = \int^\infty a(z,w,\lambda)\,e^{-\lambda\rho(z,w)}\,d\lambda,$$

$$a(z,w,\lambda) \sim \sum_{\ell=0}^{\infty} \lambda^{n-1-\ell} a_\ell(z,w).$$

  (2) の証明も同様である

  $\longleftarrow$ $\overline{\partial}$-Neumann 問題を境界上に帰着

- 少し対称性を仮定する (領域のクラスを限る)
  それでも不変量が退化しなければエライ
  (強擬凸な) 柱状領域 (またはラインハルト領域)
  中澤則之 (1994), $\cdots$
  Grauert tube (または Weyl tube)

- 例えばラインハルト領域では単項式は完全直交系をなす. 核函数の領域変分は正規化定数の変分に帰着されるが, ここでは領域依存が直截である. 柱状領域のときも同様である.

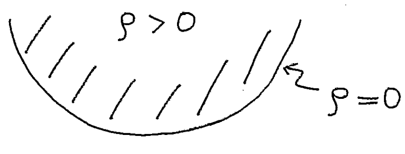
BK & SK の具体的な計算 (柏原-Boutet の公式を使う)

復習すると, 佐藤超函数の理論では

ミクロ微分作用素 (MDO) ≒ ΨDO

$\delta = \dfrac{\text{const}}{\rho} \quad \leftrightarrow \quad \delta$-函数 on $\{\rho = 0\}$

$Y = \log \rho \times \text{const} \quad \leftrightarrow$ Heaviside 函数: 特性函数 of $\{\rho > 0\}$



$Y_0 := Y(\rho_0), \qquad K_0^{\mathrm{B}} := K_{\mathrm{Siegel}}^{\mathrm{B}}$

$\delta_0 := \delta(\rho_0), \qquad K_0^{\mathrm{S}} := K_{\mathrm{Siegel}}^{\mathrm{S}}$

公式 $\exists A^{\mathrm{B}} = A^{\mathrm{B}}(z, \partial_z)$ ∞ 階の作用素 (具体的)
s.t.

$$Y = A^{\mathrm{B}} Y_0 \quad (\Longrightarrow \quad K^{\mathrm{B}} = (A^{\mathrm{B}})^{*-1} K_0^{\mathrm{B}})$$
$$\delta = A^{\mathrm{S}} \delta_0 \quad (\Longrightarrow \quad K^{\mathrm{S}} = (A^{\mathrm{S}})^{*-1} K_0^{\mathrm{S}})$$

A ≒ shift op (ずらしの作用素),
$(A^*)^{-1} \leftrightarrow$ Fourier 積分作用素

定理 (柏原).

(a) For $\forall P = P(z, \partial_z)$ 正則 **MDO**,
$\exists! Q^{\mathrm{B}} = Q^{\mathrm{B}}(\bar{z}, \partial_{\bar{z}})$ 反正則
s.t. $(P - Q^{\mathrm{B}}) Y = 0$.
このとき $(P - Q^{\mathrm{B}})^* K^{\mathrm{B}} = 0$.

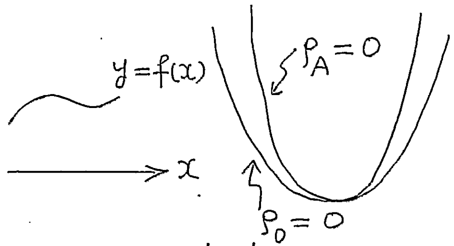
(b) もし $P_1, \ldots, P_{2n}$ が一次独立ならば,
$(P_j - Q_j^{\mathrm{B}}) Y = 0$ は Y を決定する
(定数倍を除いて); よって
K^{B} は (定数倍を除いて) 決まる
$\uparrow$
特異性 (ミクロ函数)

♪ Similarly for $K^{\mathrm{S}} \leftarrow K^{\mathrm{B}}$

Taylor 展開を復習すると,

$$f(x+h) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(x)}{m!} h^m$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h^m}{m!} \left(\frac{d}{dx}\right)^m f(x)$$
$$=: A(x, d/dx)\, f(x)$$

$A(x, d/dx)$　∞ 階の線形 "微分作用素"



$$\rho_0 = z_n + \overline{z}_n - z' \cdot \overline{z}'$$
$$\rho_A = \rho_0 - F_A\left(z', \overline{z}', \frac{z_n - \overline{z}_n}{2i}\right)$$

Moser の標準形

技術的な理由で, (Boutet の) 複素標準形を使う:

$$F_A \rightsquigarrow H_{\mathrm{B}}(z', \overline{z}', z_n)$$

3. (⋯ 現れる) 幾何

3.1. 序

o 熱核にリーマン幾何のスカラー不変量がはいっている.

これだけで面白いと思うかどうかで話が変わる.

面白い → ベルグマン核も面白い
違う → 熱核から大域不変量 (積分不変量) を取り出して見せる

大域不変量 $\left\{\begin{array}{l}\text{計量によらない — 位相不変量 (Atiyah-Singer)} \\ \text{計量に依存 — 固有値で多様体を識別 (固有値分布)}\end{array}\right.$

何で具体的に計算できるのか? それは,

MDE's (ミクロ微分方程式) ≒ ΨDE's

のシステム (連立方程式系) を忘れることができて, 次の図式だけをみればよいからである:

$$\begin{array}{ll} Y_0 = \log \rho_{\mathrm{Siegel}}(z, \overline{z}) & K_0^{\mathrm{B}}(z, \overline{z}) \\ \quad\downarrow A(z, \partial_z) & \quad\downarrow A^{*-1}(z, \partial_z) \\ Y = \log \rho_\Omega(z, \overline{z}) & K_\Omega^{\mathrm{B}}(z, \overline{z}) \end{array}$$

$A(z, \partial_z)$　(漸近展開としての全表象)

$$A(z, \partial_z) \longrightarrow A^*(z, \partial_z) \longrightarrow A^{*-1}(z, \partial_z)$$

計算可能　formal adjoint　逆作用素

気を付けて! **(Caution)**:

$\left.\begin{array}{l} Y_0 \ \&\ Y \\ K_0^{\mathrm{B}} \ \&\ K^{\mathrm{B}} \end{array}\right\}$ は違う特異性をもつ

$\Longrightarrow A = (A^{\ell}_{\alpha\overline{\beta}})$ のウェイトに関する展開が必要

(Hadamard 変分みたいな感じ)

o ベルグマン核のときは局所幾何と表現論も作らないといけない.

局所幾何 — CR 幾何 (擬共形幾何)
　　　— 実超曲面型 (sψc)
表現論 — 放物型部分群

ベルグマン核の特異性は熱核の特異性と違う.

熱核の特異性 — 変数 (x, t) が直積空間 $M \times$ 時間区間 を動く.

ベルグマン核の特異性 — $\partial\Omega$ の管状近傍を直積にするのは不自然 (定義函数の選択が最重要 → Monge-Ampère 境界値問題)

境界の幾何と内部の幾何の対応が崩れる (anomaly ← AdS/CFT)

境界不変量 — CR 不変式 ← Moser 標準形 (extrinsic)

内部不変量 ← ワイル多項式 (Fefferman の ambient 計量構成)

3.2. 双正則変換則. $\Phi:\Omega_1\to\Omega_2$ 双正則 のとき,
$$K^{\mathrm{B}}_{\Omega_1}(z)=K^{\mathrm{B}}_{\Omega_2}(\Phi(z))\,|\det\Phi'(z)|^2.$$
これを下の $w=n+1$ の場合と読む:
$$K_{\Omega_1}=(K_{\Omega_2}\circ\Phi)|\det\Phi'|^{2w/(n+1)}.$$
これを $\mathrm{w}(K):=w$ と書く ($K=K_\Omega$). よって
$$\mathrm{w}(K^{\mathrm{B}})=n+1\ (\textbf{weight}).$$
復習すると (強擬凸のとき)
$$K^{\mathrm{B}}(z)=\frac{\exists\varphi^{\mathrm{B}}}{\rho^{n+1}}+\exists\psi^{\mathrm{B}}\log\rho$$
だったが, $\begin{matrix}\varphi^{\mathrm{B}}+O(\rho^{n+1})\\ \psi^{\mathrm{B}}+O(\rho^\infty)\end{matrix}$ に意味がある. もし

(#) $\qquad \exists\rho\in C^\infty_{\mathrm{def}}(\overline{\Omega})$ s.t. $\mathrm{w}(\rho)=-1$

ならば
$$\varphi^{\mathrm{B}}=\sum_{j=0}^{n}\varphi^{\mathrm{B}}_j\,\rho^j+O(\rho^{n+1}),$$
$$\psi^{\mathrm{B}}=\sum_{j=0}^{\infty}\varphi^{\mathrm{B}}_{j+n+1}\,\rho^j+O(\rho^\infty)$$
s.t.
$$\varphi^{\mathrm{B}}_j\in C^\infty(\overline{\Omega}),\quad \mathrm{w}(\varphi^{\mathrm{B}}_j)=j.$$
が意味をもつが, (#) は正しくない.

定義函数の変換則 (#) は誤差付きでしか成り立たない: $\exists\rho\in C^\infty_{\mathrm{def}}(\overline{\Omega})$ s.t.
$$\mathrm{w}(\rho)=-1\mod O(\rho^{n+2}).$$

- mod $O(\rho^{n+3})$ では存在しない.
- mod $O(\rho^{n+2})$ では存在する (Fefferman).
  実際, 複素 Monge-Ampère 境界値問題
  $$J[u]=1\ \&\ u>0 \text{ in } \Omega,\ u|_{\partial\Omega}=0$$
  の C^∞ 近似解をとればよい. 但し $J[u]$ は Levi の行列式 (または複素 Monge-Ampère 作用素):
  $$(-1)^n\det\begin{pmatrix}u & \partial u/\partial\overline{z}_k\\ \partial u/\partial z_j & \partial^2u/\partial z_j\partial\overline{z}_k\end{pmatrix}.$$
- 誤差の出方をちゃんとみれば (任意性をパラメーターで書いて追跡する), 変換則 (#) が誤差なくなりたっているかのようにみなせる (平地).
  でも, 色々まわりくどいところがある.

3.3. CR 変換則. 境界上で変換則を要請すれば, ウェイト $\forall w\in\mathbb{N}_0$ の CR 不変量が定義される.

- CR 不変量 $\in I^{\mathrm{CR}}_k$ ($k\in\mathbb{N}_0$) は境界汎函数
  $$K=K_{\partial\Omega}:\partial\Omega\to\mathbb{C}$$
  であって, 境界上で変換則 $\mathrm{w}(K)=k$ をみたす.
- $K=K_{\partial\Omega}$ は (extrinsic な強擬凸超曲面の) Moser の標準形
  $$\rho_A:=2\,\mathrm{Re}\,z_n-|z'|^2-F(z',\overline{z'},\mathrm{Im}\,z_n),$$
  $$F=\sum A^\ell_{\alpha\overline{\beta}}\,z'_\alpha\,\overline{z'_\beta}\,(\mathrm{Im}\,z_n)^\ell$$
  トレース条件三つ

  の係数 $A=(A^\ell_{\alpha\overline{\beta}})$ の多項式 $P=P(A)$ と同一視される (境界不変式と呼べる).
- 境界不変式は内部「不変式」(局所双正則) の境界値として実現される.

それで?