形状因子の空間について

東大数理科学研究科
神保道夫

1. 始めに

表題の「形状因子」(form factor) とは、場の演算子のある種の行列要素のことをいう。形状因子という関数の列によって演算子に名前をつけることができる。これは演算子を取り扱う方法としてはいささか不器用ではあるが、生で扱う際の曖昧さを回避することができるという利点を持っている。形状因子を用いて、可積分な場の理論の中に局所場 (local field) がどれだけ存在するかを調べたい。この問題は（いくつかの仮定のもとに）数学的にはある多変数の多項式列を数え上げることに帰着する。それが量子群の表現論で記述できることを紹介したい。

かなり技術的な内容なので、前半の 2–4 節は問題の背景説明にあてて「お話」として述べる。考察するモデルは 5 節で提示する。6–7 節で問題を設定し、知られている結果をまとめる。最後の 8 節で結果を述べる。

本稿は第 3 回岡潔シンポジウムでの話をほぼ再録したものです。この場をお借りして、話す機会を与えて下さった世話人の森本徹先生, 角田秀一郎先生，山口博史先生に感謝します。

2. 格子模型と場の理論

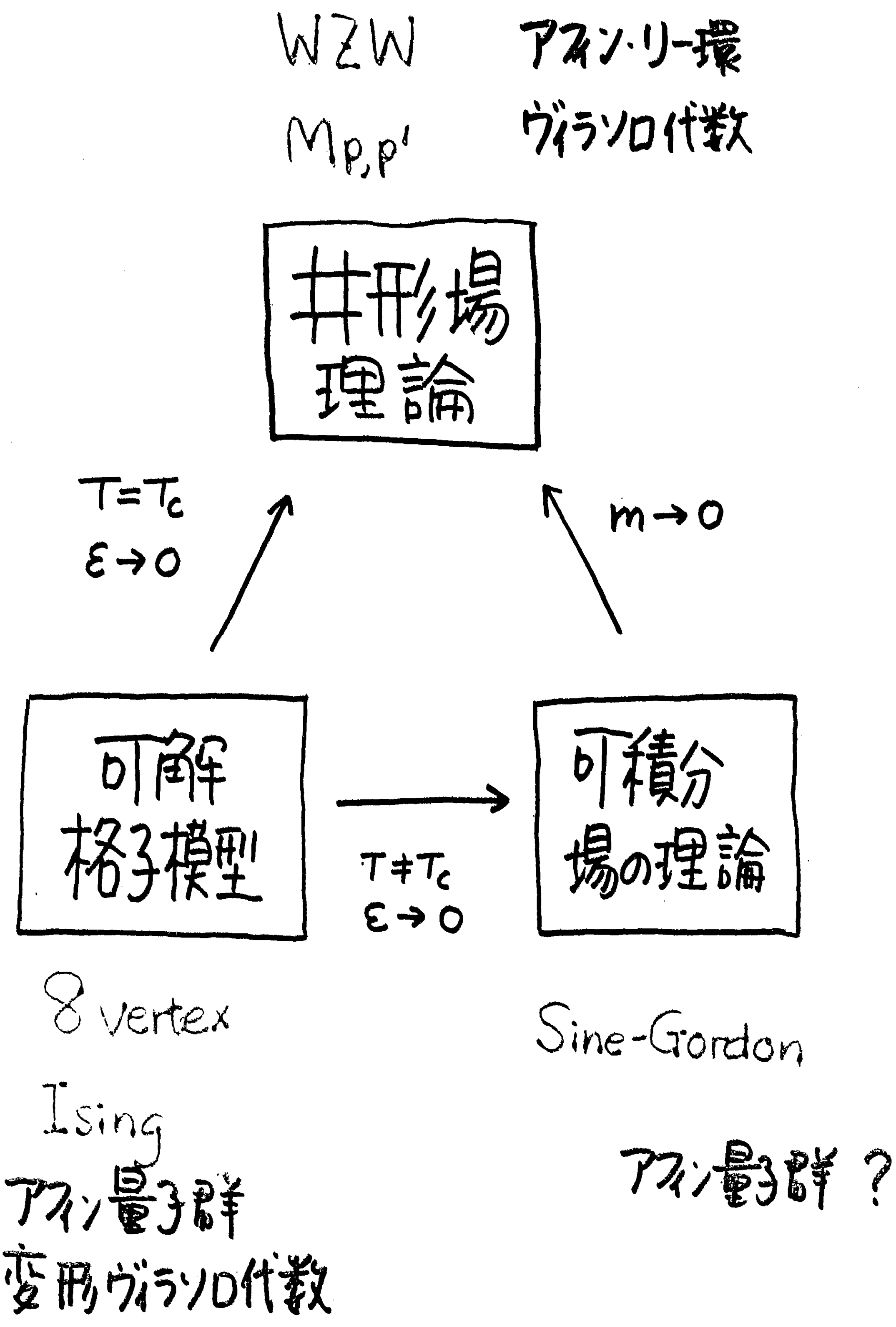
量子可積分系の研究対象のなかでも

(i) 可解格子模型

(ii) 共形場理論

(iii) (massive) 可積分場の理論

の 3 つは中心的な役者であろう。以下の話は 2 次元のモデルに限定する。(i) は文字通り格子上の離散的モデルであり、(ii),(iii) は連続体における場の理論である。(ii) は理論にあらわれる粒子の質量が 0 の場合を、(iii) は質量が正の場合を扱う。これらはよく次の頁のような図に描かれる（「可積分系の大三角形」)。


WZW
$M_{p,p'}$
アフィン・リー環
ヴィラソロ代数
共形場理論
$T=T_c$
$\varepsilon\to 0$
$m\to 0$
可解格子模型
$T\neq T_c$
$\varepsilon\to 0$
可積分場の理論
8 vertex
Ising
アフィン量子群
変形ヴィラソロ代数
Sine-Gordon
アフィン量子群 ?

これらの内容を、よく知られたIsingモデルに即して眺めてみよう。

2次元Isingモデルは次のように設定される。2次元格子の各点 (i,j) に $+1,-1$ の値をとる確率変数 $\sigma_{i,j}$ を考え、そのエネルギーを

$$E(\sigma) := -J\sum_{i,j}(\sigma_{i,j}\sigma_{i+1,j}+\sigma_{i,j}\sigma_{i,j+1})$$

と定める。J は正の定数である。和が意味を持つように最初は有限の格子で考え、あとで格子サイズを無限大にする。

物理量（確率変数の関数）$\mathcal{O}$ の期待値を

$$\langle\mathcal{O}\rangle := \lim_{\text{格子サイズ}\to\infty}\frac{\sum_\sigma \mathcal{O}\, e^{-\beta E(\sigma)}}{\sum_\sigma e^{-\beta E(\sigma)}}$$

と定義する。ここで $\beta=1/(k_BT)$ T は温度, k_B は正の定数（ボルツマン定数）である。たとえば $\mathcal{O}=\sigma_{0,0}$ の場合、その期待値は自発磁化と呼ばれる。$\langle\sigma_{0,0}\rangle$ はある臨界温度 T_c を境目にして、$T<T_c$ では正の値をとり、$T>T_c$ では $\langle\sigma_{0,0}\rangle=0$ となっている。

$\mathcal{O}=\sigma_{0,0}\sigma_{M,N}$ の場合を2点相関関数という。2点間の距離 $R=\sqrt{M^2+N^2}$ を大きくしていったとき、2点相関関数は $T\neq T_c$ のもとで

$$\langle\sigma_{0,0}\sigma_{M,N}\rangle-\langle\sigma_{0,0}\rangle\langle\sigma_{M,N}\rangle=O(e^{-R/\xi})\qquad(R\to\infty)$$

のように振る舞う。ここで $\xi=\xi(T)>0$ は相関距離と呼ばれる。臨界温度に近いとき、相関距離は

$$\xi(T)\sim\frac{1}{|T-T_c|}\qquad(T\to T_c)$$

のように発散することが知られている。このとき

(i) $R\approx 1$

(ii) $1\ll R\ll\xi$

(iii) $R\approx\xi$

の3つのスケール領域が考えられる。領域 (i) は（臨界的）格子模型, (ii) が共形場理論、(iii) がmassiveな場の理論でそれぞれ記述される。なお、スケール極限

$$R/\xi=mr\text{:固定},\quad R\to\infty, T\to T_c$$

において、正の定数 $\mathcal{M}_\pm$ をうまく選ぶと2点相関関数の非自明な極限

$$\lim_{T\to T_c\pm 0}\mathcal{M}_\pm^{-2}\langle\sigma_{0,0}\sigma_{M,N}\rangle=\tau_\pm(r)$$

が存在し、$m>0$ のとき $\tau_\pm(r)$ はパンルヴェのIII型と同値な非線形微分方程式を満たす。これに対し $m=0$（共形場理論）の場合は $\tau_\pm(r)=r^{-1/4}$ と簡単になってしまう。

以上はよく知られた事実である。より一般の場合でも、可解格子模型・共形場理論・(massive)可積分場の理論は一体のもので、原理的には互いに極限でつながっている。しかし Ising モデル以外の場合に極限移行を実際に追跡するのは困難である。現時点ではそれぞれが三者三様の、独自の論理と方法によって展開されている。

3. Local Fields

以下複素座標系の記号 $z = x^1 + ix^2, \bar{z} = x^1 - ix^2$ を用いる[1]。二つの場の演算子 $A(z, \bar{z}), B(z, \bar{z})$ に対し、任意の期待値について

$$\langle \cdots A(z_1, \bar{z}_1) B(z_2, \bar{z}_2) \cdots \rangle = \langle \cdots B(z_2, \bar{z}_2) A(z_1, \bar{z}_1) \cdots \rangle$$

が成り立つとき A, B は互いに local であるという。共形場理論、可積分場の理論において local fields がどのように記述されるかをみておこう。

共形場理論

（2 次元の）共形場理論は Virasoro 代数の表現論によって純代数的に記述できる。Viraosoro 代数 $\mathcal{V}$ は基底 $\{L_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, c$ と交換関係

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0},$$
$$[L_n, c] = 0$$

で定義されるリー環である。最高ウエイト $\Delta \in \mathbb{Q}$ をもつ既約最高ウエイト表現を

$$\mathcal{H}_\Delta = U(\mathcal{V})|\Delta\rangle,$$
$$L_n|\Delta\rangle = 0 \quad (n > 0), \qquad L_0|\Delta\rangle = \Delta|\Delta\rangle$$

とすると、共形場理論における場の演算子の働く空間（状態空間）は $\mathcal{V} \oplus \mathcal{V}$ の表現空間

$$\mathbf{V} = \oplus_{\Delta,\bar{\Delta}} \mathcal{H}_\Delta \otimes \mathcal{H}_{\bar{\Delta}}$$

である。著しいことは、状態と演算子の間に 1 対 1 の対応（頂点作用素代数の構造）

$$\mathbf{V} \ni u \otimes v \mapsto \mathcal{O}^{u\otimes v}(z, \bar{z})$$

が存在することである。$\mathcal{O}^{u\otimes v}(z, \bar{z})$ は互いに local な場になる。（正確には、交換したときに定数倍がでるような ‘quasilocal fields’ も考える必要がある。）すなわち、共形場理論における局所場全体の空間とは $\mathcal{V} \oplus \mathcal{V}$ の表現空間 $\mathbf{V}$ に他ならない。

---

[1] ミンコフスキー計量空間からユークリッド計量空間に解析接続している

massive 可積分場理論

状態と演算子の対応は共形場理論特有の現象で、massive な理論には類似物はない。massive な場の理論では、漸近状態なるベクトル

$$|\beta_1, \cdots, \beta_n\rangle$$

が状態空間の基底をなす。$|\beta_1, \cdots, \beta_n\rangle$ は無限の過去において自由粒子が n 個存在する状態をあらわし、$(p_j^0, p_j^1) = (m \cosh \beta_j, m \sinh \beta_j)$ はそれらのエネルギー・運動量である。local field $\mathcal{O}(z, \bar{z})$ に対して、行列要素

$$f_n^{\mathcal{O}}(\beta_1, \cdots, \beta_n) := \langle \mathrm{vac} | \mathcal{O}(0,0) | \beta_1, \cdots, \beta_n \rangle$$

を n 粒子状態の形状因子という。(あとで考えるように粒子に内部自由度がある場合、形状因子は一般にベクトル値関数になる。) 局所場に形状因子の列を対応させる対応

$$\mathcal{O} \longrightarrow \left(f_n^{\mathcal{O}}(\beta_1, \cdots, \beta_n) \right)_{n=0}^{\infty}$$

は定数倍をのぞいて 1 対 1 であることが知られている。後で述べるように、可積分場の理論では形状因子は有理型関数になり、その満たすべき性質が公理化されている。

すなわち、可積分場の理論における場の演算子は、関数の無限列という数学的にはわかりやすい対象によって記述される。

4. 数え上げの問題

可積分場の理論の重要な多くの例は、共形場理論からの摂動として得られている。このような状況においては、可積分場の理論における local fields と、摂動する前の共形場理論における local fields とのあいだに 1 対 1 対応がつくのではないかと期待される。しかし 2 つの理論における local fields は、上で見たように全く異なる方法で記述されており、それらをどのように関係づけたらよいのか現在の知識ではわからない。そこで一歩退いて、ひとまず「数はあっているか？」を問題にする。

Virasoro 代数の表現空間 $\mathbf{V}$ には、Virasoro 代数の元 L_0 (およびそのコピー $\bar{L}_0$) により、bi-grading $\mathbf{V} = \oplus \mathbf{V}_{d,\bar{d}}$ が入る。ここで $\mathbf{V}_{d,\bar{d}}$ は $L_0, \bar{L}_0$ に対する固有値 $(d, \bar{d})$ の同時固有空間である。($L_0 - \bar{L}_0$ はローレンツ変換に関するスピン、$L_0 + \bar{L}_0$ はスケール変換に対応する。) 状態-演算子対応により、共形場理論の local fields は 2 つの次数 $(d, \bar{d})$ を持つ。それらの数は次元の母関数 (指標) $\sum_{d,\bar{d}} q^d \bar{q}^{\bar{d}} \dim \mathbf{V}_{d,\bar{d}}$ で与えられる。

massive な理論における local fields を数えあげるには、その形状因子を数えればよい。その結果上の指標と同じ答えを得れば、「数の上での 1 対 1 対応」を確かめたことになろう。このような試みは 1990 年代に物理学者によってなされた ([2],[6] など)。粒子が内部自由度を持

たない場合、形状因子は共通のスカラー因子を除くと変数 $z_j = e^{\beta_j}$ の対称ローラン多項式になり、後者にはさらに形状因子の公理から従う性質が科される。このような対称多項式の数え上げがいくつかの例で研究された。内部自由度がある場合には問題はずっと困難で、[12],[1] などの重要な仕事があるが解決には至らなかった。最近中屋敷厚氏は、ある仮定のもとにこの数え上げを直接の方法で実行した。本稿では中屋敷氏の結果の表現論的な方法による再構成と、その拡張について述べる。

5. $SU(2)$ 不変 Thirring モデル

以下ではもっとも基本的な例である $SU(2)$ 不変 Thirring モデル (ITM) の形状因子を考察する。[2]

$V = \mathbb{C}^2$ とし、行列 $S(\beta) \in \mathrm{End}(V \otimes V)$ を次の式で定めよう。

$$S(\beta) = \frac{\zeta(-\beta)}{\zeta(\beta)} \frac{\beta I - \pi i P}{\beta - \pi i}.$$

ここで I は identity, $P(u \otimes v) = v \otimes u$ は置換作用素である。スカラー因子 $\zeta(\beta)$ はある有理型関数であるが、具体形は省略する。

ベクトル値関数の無限列

$$\mathbf{f} = (f_n)_{n=0}^{\infty}, \qquad f_n = f_n(\beta_1, \cdots, \beta_n) \in V^{\otimes n}$$

が以下の性質を満たすとき、これを ITM の形状因子と呼ぶ。

(A0)　f_n は $\beta_i - \beta_j = l\pi i$ $(i \neq j,\ l \in \mathbb{Z})$ にのみ極を持つ有理型関数であり,

$\mathrm{Re}\,\beta_j \to \pm\infty$ のとき, ある $L > 0$ に対して $f_n = O(e^{|\beta_j|^L})$,

(A1)　$f_n(\ldots, \beta_{j+1}, \beta_j, \ldots) = P_{j,j+1} S_{j,j+1}(\beta_j - \beta_{j+1}) f_n(\ldots, \beta_j, \beta_{j+1}, \ldots)$,

(A2)　
$$f_n(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, \beta_n + 2\pi i) = e^{\frac{n\pi i}{2}} P_{n,n-1} \cdots P_{2,1} f_n(\beta_n, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}),$$

(A3)　$\beta_n - \beta_{n-1} = \pi i$ は simple pole で

$$\begin{aligned}&\mathrm{res}_{\beta_n = \beta_{n-1} + \pi i} f_n(\beta_1, \ldots, \beta_n) \\ &= (I + e^{-\frac{n\pi i}{2}} S_{n-1,n-2}(\beta_{n-1} - \beta_{n-2}) \cdots S_{n-1,1}(\beta_{n-1} - \beta_1)) \\ &\quad \times f_{n-2}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \otimes (v_+ \otimes v_- - v_- \otimes v_+).\end{aligned}$$

---

[2] 講演では sine Gordon モデルに言及したが、$SU(2)$ 不変 Thirring モデルは前者の相互作用定数 ξ を ∞ に特殊化したモデルである。

ここで $P_{ij}, S_{ij}(\beta)$ はそれぞれテンソル積の i,j 成分への $P, S(\beta)$ の作用をあらわす。また v_+, v_- は V の標準基底である。これらの性質は対応する場の演算子の locality を保証する条件として Smirnov が公理化したものである [11]。条件の形から、実際には $(f_n)_{n:\mathrm{odd}}$, $(f_n)_{n:\mathrm{even}}$ を別々に扱って良い。

V(したがって $V^{\otimes n}$) にはリー環 $\mathfrak{sl}_2 = \mathbb{C}E \oplus \mathbb{C}F \oplus \mathbb{C}H$ が働く。$\mathbf{f} = (f_n)$ が形状因子ならば, $x \in \mathfrak{sl}_2$ に対し $x\mathbf{f} = (xf_n)$ も形状因子である。そこで、最高ウエイト条件

$$\text{(A4)} \qquad \text{ある } m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ に対し} \quad Ef_n = 0, \quad Hf_n = mf_n \qquad (\forall n \equiv m \bmod 2)$$

を満たすものに考察を限定しても一般性を失わない。このとき $\mathbf{f}$ はウエイト m を持つという。

6. 積分表示

(A1),(A2) より、各 f_n は（有理）qKZ 方程式とよばれる次の線形差分方程式系において $p = -2\pi i$ とおいたものを満たすことがただちにわかる：

$$\begin{aligned} f_n(\beta_1, \ldots, \beta_j + p, \ldots, \beta_n) &= \pm S_{j,j-1}(\beta_j - \beta_{j-1} + p) \cdots S_{j,1}(\beta_j - \beta_1 + p) \\ &\times \; S_{j,n}(\beta_j - \beta_n) \cdots S_{j,j+1}(\beta_j - \beta_{j+1}) f_n(\beta_1, \ldots, \beta_n). \end{aligned}$$

一般に $-2 - p/\pi i$ を qKZ 方程式のレベルという。形状因子の各成分 f_n はレベル 0 の qKZ 方程式の解である。

qKZ 方程式の解については Tarasov-Varchenko らの浩瀚な研究があり、今の場合には次のような l 重積分表示が知られている [11],[14],[10]:

$$f_P(\beta_1, \cdots, \beta_n) = e^{\frac{n}{4}\sum_{j=1}^{n}\beta_j} \prod_{i<j} \zeta(\beta_i - \beta_j) \times \psi_P(\beta_1, \ldots, \beta_n), \tag{0.1}$$

$$\begin{aligned} \psi_P(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \int_{C^l} \prod_{p=1}^{l} d\alpha_p \prod_{p=1}^{l} \phi(\alpha_p; \beta_1, \ldots, \beta_n) \\ \times \mathbf{w}(\alpha_1, \ldots, \alpha_l | \beta_1, \ldots, \beta_n) P(X_1, \ldots, X_l | z_1, \ldots, z_n). \end{aligned} \tag{0.2}$$

ここで $l = (n-m)/2$, また

$$X_p := e^{-\alpha_p}, \quad z_j := e^{\beta_j}$$

とおいた。

詳細は文献にゆずり、概略のみ述べよう。(0.2) の被積分関数の構成要素のうち、ϕ はあるガンマ関数の積、$\mathbf{w}$ は $V^{\otimes n}$ に値を取る $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ と $\beta_1, \cdots, \beta_n$ の有理関数である。C は一

定の規則で極を避けつつ $-\infty$ から ∞ に向かう積分路である。これらはすべて固定されている。最後に $P(X_1,\cdots,X_l|z_1,\cdots,z_n)$ は、次の条件を満たすものとする。

(C1) P は $X_1,\cdots,X_l$ の反対称多項式かつ $z_1,\cdots,z_n$ の対称ローラン多項式,

(C2) $\deg_{X_p} P \le n-1$.

(C1),(C2) のもとに、積分は収束して f_P は (A1),(A2),(A4) を満たす。さらにこれらが (A1),(A2),(A4) の「一般解」であることも知られている ([13] 参照)。以下 X_p 変数を主変数とみて、P を単に多項式ということがある。(C1),(C2) を満たす多項式を変形サイクル, P のうちで積分すると 0 になるようなものを null サイクルとよぶ。null サイクルはつぎのように決定されている。

命題 1. [13] $\psi_P \equiv 0$ となるためには, ある反対称多項式 Q_1, Q_2 を用いて

$$P = \Sigma_1 \wedge Q_1 + \Sigma_2 \wedge Q_2$$

と書けることが必要十分である。ここで $\Sigma_1(X_1)$, $\Sigma_2(X_1, X_2)$ はある（具体的に書ける）多項式である。また 2 つの多項式 P_1, P_2 に対して積 $P_1(X_1,\cdots,X_{l_1})P_2(X_{l_1+1},\cdots,X_{l_1+l_2})$ の反対称化を $P_1 \wedge P_2$ で表わす。

形状因子の条件のうち、残るのは (A3) である。これについてはつぎの事実がある。

命題 2. *([12],[9],[3])* $m \ge 0$ と $i = 0, 1$ を固定する。*(C1),(C2)* を満たす多項式の列 $\mathbf{p} = (P_{n,l})_{\substack{n,l\ge 0\\ n-2l=m}}$ が次の条件を満たすならば $\mathbf{f} = (f_{P_{n,l}})_{\substack{n,l\ge 0\\ n-2l=m}}$ は条件 *(A3)* を満たす。

$$\text{(C3)}\quad P_{n,l}(X_1,\cdots,X_{l-1},z^{-1}|z_1,\cdots,z_{n-2},z,-z)$$
$$= z^{-n+1+i}\prod_{p=1}^{l-1}(1-X_p^2z^2)\times P_{n-2,l-1}(X_1,\cdots,X_{l-1}|z_1,\cdots,z_{n-2}).$$

[3] では (C1)–(C3) を満たす多項式列 $(P_{n,l})_{\substack{n,l\ge 0\\ n-2l=m}}$ をウェイト m の ∞ サイクルと呼んでいる[3]。以上のことから、形状因子は ∞ サイクルでパラメトライズされることになる。(C3) は形状因子を与えるための十分条件であるが、われわれは今後その逆も成り立つことを仮定する。

ウェイト m の ∞ サイクル全体の空間を $Z^{(i,j)}_{\sqrt{-1}}[m] (j = 0, 1, i-j \equiv m)$ と記し、

$$Z^{(i,j)}_{\sqrt{-1}} := \oplus_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ m\equiv i-j \bmod 2}} Z^{(i,j)}_{\sqrt{-1}}[m]$$

とおく。（記号 $\sqrt{-1}$ の意味は後述する。）上述のことから、最高ウェイト条件を満たす形状因子の空間は商空間

$$Z^{(i,j)}_{\sqrt{-1}} \Big/ \left(\Sigma_1 \wedge Z^{(i,j)}_{\sqrt{-1}} + \Sigma_2 \wedge Z^{(i,j)}_{\sqrt{-1}}\right)$$

[3] これらの条件自身は $m \ge 0$ に限らず $m \in \mathbb{Z}$ について意味を持つ

とみなすことができる。言い換えればこの商空間が、ITM の local fields のうちで $\mathfrak{sl}_2$ の作用に関して最高ウェイトとなるもの全体のなす空間である。われわれの目標は、∞ サイクルの空間とは何か、そして商をとる操作は何かを明らかにすることである。

7. 量子アフィン代数 $U_{\sqrt{-1}}(\widetilde{\mathfrak{sl}}_2)$ の作用

∞ サイクルに対する条件、特に (C3) はすぐには意味のわからない条件である。これらを統制するためには量子アフィン代数の作用が有効な手がかりを与えてくれる。

少し記号を準備しよう。$\mathfrak{sl}_2$ 上のアフィン・リー代数を $\widehat{\mathfrak{sl}}_2' = \mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c$, その q 変形である量子アフィン代数を $U_q = U_q'(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ と記す。正確な定義は文献に譲るが、U_q は生成元 $x_n^{\pm}$ $(n \in \mathbb{Z})$, b_r $(r \in \mathbb{Z}\backslash\{0\})$, $K^{\pm 1}, C^{\pm 1}$ で生成される $\mathbb{C}(q)$ 上のホップ代数である ('$q \to 1$' で x_n^+, x_n^-, b_n がそれぞれ $E \otimes t^n, F \otimes t^n, H \otimes t^n$ に対応する)。q を複素数 $\epsilon \in \mathbb{C}^\times$ （とくに ϵ が 1 のベキ根の場合）に特殊化した代数 U_ϵ は、いわゆる divided power

$$(x_n^{\pm})^{(s)} := \frac{(x_n^{\pm})^s}{[s]!} \qquad ([s]! = [1][2]\cdots[s], [s] = \frac{q^s - q^{-s}}{q - q^{-1}})$$

を付加したものとして定義する。$\widehat{\mathfrak{sl}}_2'$ は $V \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ に $x \otimes t^n \mapsto xz^n$, $c \mapsto 0$ として自然に作用する。この U_ϵ における対応物を V_z と記す。

さて、$z_1, \cdots, z_n$ の有理関数を係数とする変数 $X_1, \cdots, X_l$ の反対称多項式であって、各 X_j につきたかだか $n-1$ 次のものの全体を $\mathcal{F}_{n,l}$、$\mathcal{F}_n = \oplus_{l=0}^n \mathcal{F}_{n,l}$ としよう。

命題 3. [14, 3] $\mathcal{F}_n$ は $U_{\sqrt{-1}}$ 加群の構造をもち, $U_{\sqrt{-1}}$ 加群の単射準同型

$$V_{z_1} \otimes \cdots \otimes V_{z_n} \longrightarrow \mathcal{F}_n$$

が存在する。この作用により *null*サイクル Σ_j は $1 \in \mathcal{F}_n$ から

$$\Sigma_1 = x_0^- 1, \quad \Sigma_2 = (x_0)^{(2)} 1$$

として得られる。

定義から、n を固定したときの変形サイクルのなす空間は空間 $\mathcal{F}_n$ の部分空間である。さらにこの部分空間は $U_{\sqrt{-1}}$ の作用で不変であることも示される。命題から、null サイクルによる商をとることは x_0^- による作用（および divided power$(x_0)^{(2)}$ による作用）で割ることに対応する。

多項式の無限列 $\mathbf{p} = (P_{n,l})$ に対しても, $U_{\sqrt{-1}}$ の作用は成分ごとに $x\mathbf{p} = (xP_{n,l})$ とおいて定義できる。

命題 4. [3] $\mathbf{p}$ が ∞ サイクルならば $x\mathbf{p}$ *(*$x \in U_{\sqrt{-1}}$*)* も ∞ サイクルである。すなわち条件 *(C3)* は $U_{\sqrt{-1}}$ の作用で保たれる。

この命題により $Z_{\sqrt{-1}}^{(i,j)}$ は $U_{\sqrt{-1}}$ の表現空間になることがわかる。その構造を次節で述べる。

注　変形パラメタが $\sqrt{-1}$ となる（表面的な）理由はつぎの通りである。qKZ 方程式においてレベルが generic な場合には、Tarasov-Varchenko による積分表示の一般論があり、上と同様にその被積分関数（変形サイクル）に U_ϵ の作用が定義される。このとき変形パラメタは $\epsilon = e^{\pi^2/p}$ で与えられる。したがってレベルが 0、すなわち $p = -2\pi i$ のとき $\epsilon = \sqrt{-1}$ となる。

なおこのことからも予測されるが、qKZ 方程式の理論において、形状因子に対応するレベル 0 の場合は generic レベルにくらべて非常に特別な性格のものになっている。ベキ根のうちでも $\sqrt{-1}$ の場合には、b_n (n:odd) が $U_{\sqrt{-1}}$ のすべての元と可換になってしまうなどの表現論的に特殊な事情がおこる。 □

8. 結果

量子アフィン代数 U_q のレベル 1 の既約最高ウェイト加群を $V(\Lambda_i)$, レベル -1 の既約最低ウェイト加群を $V(-\Lambda_i)$ としよう ($i = 0, 1$)。それらの $\sqrt{-1}$ への特殊化を $V_{\sqrt{-1}}(\Lambda_i), V_{\sqrt{-1}}(-\Lambda_i)$ と記す[4]。∞ サイクルの空間に関する結果は次の通りである。

定理 5. $U_{\sqrt{-1}}(\widetilde{\mathfrak{sl}}_2)$ 加群の同型

$$\varphi \ : \ V_{\sqrt{-1}}(\Lambda_i)\widehat{\otimes}_{\mathcal{F}} V_{\sqrt{-1}}(-\Lambda_j) \longrightarrow Z_{\sqrt{-1}}^{(i,j)}$$

が存在する。

ここで無限和を許容するために左辺はテンソル積の完備化をしているが、ここでは立ち入らない。

証明には、まず generic q で類似の写像を構成する。構成には q-vertex operator と命題 3 を組み合わせて用いる。この写像は $\sqrt{-1}$ に特殊化できることがわかる。同型を示すには柏原正樹氏による大域結晶基底の理論と extremal weight module の構造に関する結果 [5] を援用する。

∞ サイクルの各元 $P_{n,l}$ は変数 $z_1, \cdots, z_n$ についてローラン多項式である。特にこれらが多項式（負べきをゆるさない）であるもののなす部分空間を $Z_{\sqrt{-1}}^{(i,j),chiral}$ と記し chiral subspace とよぼう。

---

[4] Lusztig の意味の整格子を指定して特殊化を定義する。$\epsilon = \pm\sqrt{-1}$ の場合のみこれらの加群は既約でなくなる.

命題 6. 上の写像により同型

$$\varphi\ :\ \mathbb{C}v_i \otimes V_{\sqrt{-1}}(-\Lambda_j) \longrightarrow Z^{(i,j)}_{\sqrt{-1}}$$

が引き起こされる。

とくに両者の指標は等しい。この結果は直接多項式列を構成する方法により、[7, 8] で初めて得られた。

最後に共形場理論との対応を見ておこう。ITM に対応する共形場理論は、$\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ のレベル 1 表現に付随する WZW 模型と呼ばれる。始めに述べたように、共形場理論では局所場の空間と状態空間が同一視される。いまの場合にはそれがテンソル積の直和

$$\oplus_{i,j=0,1} V(\Lambda_i) \otimes V(-\Lambda_j)$$

になっている（ただし右辺は $q=1$ の場合である）。

一方、第 6 節でおいた仮定の下で、最高ウェイト条件を満たすような ITM の局所場のなす空間は、∞ サイクルの空間 $Z^{(i,j)}_{\sqrt{-1}}$ を $x_0^-, (x_0^-)^{(2)}$ の作用で割った商空間と同一視された。この空間は, テンソル積の $\mathfrak{sl}_2$ の作用による最高ウェイトベクトルの空間と見なすことができる。すべての局所場はこれらから $\mathfrak{sl}_2$ の作用で得られていた。したがって定理 5 の内容は期待された結果と一致している。

これで「数勘定」のレベルでは一応もっともらしい関係がついたことになる。しかしこれは内容に立ち入った対応ではないことに不満がある。量子アフィン代数は形状因子ではなく被積分関数の空間という補助的な空間に働くにすぎない。形状因子の上に作用する自然な代数が見つからないものであろうか。

References

[1] O. Babelon, D. Bernard and F. Smirnov, Null vectors in integrable field theory, *Commun. Math. Phys.* **186** (1997), 601–648.

[2] J. Cardy and G. Mussardo, Form factors of descendent operators in perturbed conformal field theories, *Nucl. Phys.***B340** (1990), 387–402.

[3] M. Jimbo, T. Miwa, E. Mukhin and Y. Takeyama, Form factors and space of infinite cycles, Commun. Math. Phys. (2003) .

[4] B. Feigin, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa, E. Mukhin and Y. Takeyama, A functional model for the tensor product of level 1 highest and level -1 lowest modules for the quantum affine algebra $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$, math.QA/0310284, to appear in European J. Math.

[5] M. Kashiwara, On level zero representations of quantized enveloping algebras, *Duke Math. J.* **112** (2002), 117–195.

[6] A. Koubek, The space of local operators in perturbed conformal field theories, *Nucl. Phys.* **B435**[FS] (1995), 703–734.

[7] A. Nakayashiki, Residues of q-hypergeometric integrals and characters of affine Lie algebras, math.QA/0210168.

[8] A. Nakayashiki, The chiral space of local operators in $SU(2)$-invariant Thirring model, math.QA/0303192, Commun.Math.Phys. 245 (2004) 279-296.

[9] A. Nakayashiki and Y. Takeyama, On form factors of the $SU(2)$ invariant Thirring model, in MathPhys Odyssey 2001, Integrable Models and Beyond- in honor of Barry M. McCoy, ed. M. Kashiwara and T. Miwa, Progr. in Math. Phys., Birkäuser, 2002, 357–390.

[10] A. Nakayashiki, V. Tarasov and S. Pakulyak, On solutions of the KZ and qKZ equations at level 0, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **71** (1999), 459–496.

[11] F. Smirnov, Form factors in completely integrable models in quantum field theory, World Scientific, Singapore, 1992.

[12] F. Smirnov, Counting the local fields in SG theory, *Nucl. Phys. B453* **B453** [FS] (1995), 807–824.

[13] V. Tarasov, Completeness of the hypergeometric solutions of the qKZ equations at level 0, *Amer. Math. Soc. Translations Ser.2* **201** (2000), 309–321.

[14] V. Tarasov and A. Varchenko, Geometry of q-hypergeometric functions as a bridge between Yangians and quantum affine algebras, *Inventiones Math.* **128** (1997), 501–588.