正則写像の不動点をめぐって

上田 哲生 *

1 序

多変数複素関数論では，１変数の場合には見られない新しい現象がいくつか現れる．そのうちで最も重要なものは，ある領域ではその上で正則な関数がすべて，より大きい領域にまで解析接続されるという現象である．解析関数の自然な存在域となりうる領域（正則領域）を擬凸という幾何学的かつ局所的な性質で特徴付けること（Hartogs の逆問題）は，関連した一群の問題と共に，岡潔の仕事によって解決されたのであった．

１変数と２変数以上の場合の違いは，次のような点にも現れる．

(a) 複素数平面 $\mathbb{C}$ の単連結部分領域はそれが $\mathbb{C}$ 自身でない限り，単位円板に等角同値である（Riemann の写像定理）．ところが $n \geq 2$ の場合には $\mathbb{C}^n$ の球に同相な部分領域で互いに正則同値でないものが無数にある．さらに $\mathbb{C}^n$ の真部分領域であって $\mathbb{C}^n$ と正則同値なものが存在する．このような領域は Fatou-Bieberbach 領域と呼ばれている．（以下では F-B 領域と略称する．）

単連結真部分領域が互いに写りあえるという意味では１変数写像の方が柔軟であるが，真部分領域で $\mathbb{C}^n$ に写るものがあるという点から見ると多変数の方が柔軟な写像であると考えられるのは面白い．次の性質も多変数の柔軟さを示している．

(b) $\mathbb{C}$ の正則自己同型写像は整一次変換 $z \mapsto az+b$ に限られるが，$n \geq 2$ のとき，$\mathbb{C}^n$ の正則自己同型写像は無数にある．

これら (a), (b) の現象は互いに無関係ではない．F-B 領域の最初の例は正則自己同型写像とその吸引不動点をもとにしてつくられたのである．

この小論では，吸引不動点と，その極限の場合である半吸引不動点から F-B 領域を構成する方法を２変数の場合に論じよう．

まずその道筋を概観する．M を２次元複素多様体とする．（実際に使うのは $M = \mathbb{C}^2$

---

* 京都大学総合人間学部（現所属：理学研究科）

の場合.）M の正則自己同型写像 $F: M \to M$ で，ある点 $p_0 \in M$ を不動点とするもの，すなわち $F(p_0) = p_0$ なるものを考える．F の p_0 における微分 $(F_*)_{p_0} : T_{p_0}M \to T_{p_0}M$ の固有値を λ, μ とする．

■吸引不動点　固有値 λ, μ の絶対値が 1 より小さいとき，p_0 を F の吸引不動点という．F の反復写像列 $F^n = F \circ \cdots \circ F$ (n 回)　($n = 1, 2, \ldots$) によって不動点 p_0 に収束する点全体を D とする：

$$D = \{p \in M \mid F^n(p) \to p_0\ (n \to \infty)\}.$$

このとき D は p_0 を含む領域であって $\mathbb{C}^2$ に双正則同値である．したがって，$M = \mathbb{C}^2$ で D が M の真部分領域ならば，D は F-B 領域となっている．

具体例を挙げよう：$M = \mathbb{C}^2$ の座標を (x, y) として $F = F_{\lambda,\mu} : (x, y) \mapsto (x_1, y_1)$ を

$$x_1 = \lambda x + (\lambda x + \mu y)^2, \quad y_1 = \mu y - (\lambda x + \mu y)^2$$

で定める．この逆写像は

$$x = \frac{1}{\lambda}\{x_1 - (x_1 + y_1)^2\}, \quad y = \frac{1}{\mu}\{y_1 + (x_1 + y_1)^2\}$$

で与えられるので F は $\mathbb{C}^2$ の自己同型写像である．$|\lambda|, |\mu| < 1$ ならば $p_0 = (0, 0)$ は F の吸引不動点である．$\lambda \neq \mu$ ならばもう一つ不動点

$$q_0 = \Big(\frac{(1-\lambda)(1-\mu)^2}{\lambda + \mu - 2\lambda\mu}, \frac{(1-\lambda)^2(1-\mu)}{\lambda + \mu - 2\lambda\mu}\Big)$$

があるから p_0 への収束領域 D は q_0 を含まず，F-B 領域の例となっている．（1 変数の場合 $\mathbb{C}$ の正則自己同型は整 1 次変換しかないから，不動点を 2 個以上もてば恒等写像となり，このような議論ができないことに注意しよう．）

■半吸引不動点　次の場合にも F-B 領域を得ることができる．$(F_*)_{p_0}$ の固有値が $\lambda = 1, |\mu| < 1$ の場合を考える．不動点 p_0 の周りの局所座標 (x, y) を

$$F : (x, y) \mapsto \Big(x + \sum_{i+j \geq 2} a_{ij}x^i y^j,\ \mu y + \sum_{i+j \geq 2} b_{ij}x^i y^j\Big)$$

となるように，すなわち線形項が対角化されるようにとることができる．ここで，さらに x^2 の係数 $a_{20} \neq 0$ という条件を仮定する（この条件は局所座標系のとり方に依らない）．

$$D = \{p \in M \mid F^n (n = 1, 2, \ldots) \text{ が } p \text{ のある近傍で定値写像 } p_0 \text{に一様収束する}\}$$

とおくと D は $\mathbb{C}^2$ と双正則同値な領域である．また不動点 p_0 は D の境界に含まれる．

具体例としては，先に定義した $M=\mathbb{C}^2$ の自己同型写像 $F_{\lambda,\mu}$ で $\lambda=1$ の場合がある．$F_{1,\mu}$ の唯一の不動点は $p_0=(0,0)$ は上の条件をみたしているので，一様収束領域 D は F-B 領域となる．

■　半吸引不動点は吸引不動点の極限であると考えられる．このことを上に挙げた例 $F_{\lambda,\mu}$ について見よう．μ ($|\mu|<1$) を固定して，パラメータ λ に正則に依存する自己同型写像族 $F_{\lambda,\mu}$ を考える．p_0 への（一様）収束領域を $D_{\lambda,\mu}$ とする．λ が単位円 $|\lambda|<1$ 内から (non-tangential に) 1 に近づくとき領域 $D_{\lambda,\mu}$ は $D_{1,\mu}$ に近づく．また正則同値を与える写像 $\Phi_{\lambda,\mu}: D_{\lambda,\mu}\to\mathbb{C}^2$ を λ について連続であるように作ることができる．

このような F-B 領域の構成は２つの段階に分けることができる．

(i) 局所的考察： 不動点の近傍に標準的な局所座標系を定めること．

(ii) 大域的考察： (i) で得られた局所座標系を M 全体にまで拡張（解析接続）すること．

以下では吸引，半吸引の場合のそれぞれについて，この (i), (ii) をもうすこし詳しく述べる．また (i) の局所的考察は，１変数の場合の自然な一般化である．そこでこの部分は，１変数写像の場合をまず概観してから，２変数以上の場合に移るという順序で述べる．

付記では不動点によらずに F-B 領域の構成する Rosay-Rudin の方法を最も簡単な場合について紹介した．

注意 F-B 領域は当然正則領域であるが，これが常に Runge 領域となるかどうかは知られていないようである．ここにあげた構成法から得られる F-B 領域はすべて Runge 領域である．

２次元の場合には，F-B 領域の外点全体の集合も（空でなければ）正則領域になる．

2　吸引不動点

写像 F の不動点 p_0 の近傍の点がすべて F の反復列によって p_0 に収束するとき，p_0 は F の吸引不動点であるという．容易にわかるように，吸引不動点であるためには，F の p_0 における微分 $(F_*)_{p_0}$ の固有値（乗数）の絶対値がすべて１より小さいことが必要十分である．以下では F_* が可逆のときのみを考える．

■一変数の場合　複素数平面 $\mathbb{C}$ の 0 の近傍 U で定義された正則関数 f で 0 を不動点とするものを考える：

$$f(z)=\lambda z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots$$

乗数が条件 $|\lambda|<1$ をみたすとき，0 は f の吸引不動点である．

定理 2.1 上の f について $0<|\lambda|<1$ の場合，0 の近傍 $V\subset U$ で $f(V)\subset V$ となるもの，および V で正則な関数 $\varphi(z)$ で $\varphi(0)=0, \varphi'(0)=1$ かつ，関数方程式 (Schröder 方程式)

$$\varphi(f(z))=\lambda\varphi(z)$$

を満たすものが存在する．

このことは，次のように言い換えることができる：f は $\zeta=\varphi(z)$ によって線形写像に共役である：

$$\varphi\circ f\circ\varphi^{-1}:\zeta\mapsto\lambda\zeta.$$

あるいは，f は局所座標 ζ に関して線形写像となる．

この証明じたいは難しくはないのだが，あえて何種類かの証明を試みる．より複雑な場合を考えるための手がかりとなるであろう．

方法 1　k を $k^2<|\lambda|<k<1$ となるようにとり，r を十分小さくとれば $V=\{|z|<r\}$ で $|f(z)|\leq k|z|$ が成り立つ．このとき $z\in V$ ならば，すべての $n\geq 0$ について $f^n(z)$ が定義できて $|f^n(z)|\leq k^n|z|$ が成り立つ．

さて，Schröder 方程式の解 $\varphi(z)$ があるとすると，任意の n について $\varphi(f^n(z))=\lambda^n\varphi(z)$ が成り立つ．これより

$$\varphi(z)=\frac{1}{\lambda^n}\varphi(f^n(z))=\frac{1}{\lambda^n}f^n(z)\frac{\varphi(f^n(z))}{f^n(z)}$$

$n\to\infty$ のとき $f^n(z)\to 0$ だから $\varphi(f^n(z))/f^n(z)\to\varphi'(0)=1$．したがって求める解があるなら，それは

$$\varphi(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda^n}f^n(z)$$

の形でなくてはならない．またこの極限が存在すれば

$$\varphi(f(z))=\lim_{n\to\infty}\lambda^{-n}f^n(f(z))=\lambda\lim_{n\to\infty}\lambda^{-(n+1)}f^{n+1}(z)=\lambda\varphi(z)$$

で，$\varphi(0)=0, \varphi'(0)=1$ も容易にわかる．

関数列 $\varphi_n(z)=\lambda^{-n}f^n(z)\quad(n=1,2,\ldots)$ が V で一様収束することを示そう．まず $|f(z)-\lambda z|\leq L|z|^2$ となる L がとれる．z を $f^n(z)$ で置き換えれば

$$|f^{n+1}(z)-\lambda f^n(z)|\leq L|f^n(z)|^2$$

したがって

$$|\varphi_{n+1}(z)-\varphi_n(z)|\leq\left(\frac{k^2}{|\lambda|}\right)^n\frac{Lr^2}{|\lambda|}$$

最初の k の選び方により $k^2/|\lambda| < 1$ であるから，一様収束することがわかる．

方法２　$\varphi(z)$ が Schröder 方程式の解ならば，その導関数は

$$\varphi'(f(z))f'(z) = \lambda\varphi'(z)$$

を満たさなければならない．そこで 0 の近傍で正則な関数 $h(z)$ で

$$h(f(z))f'(z) = \lambda h(z), \quad h(0) = 1$$

となるものを求める．

$$h(z) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{f'(f^n(z))}{\lambda}$$

が収束し，条件を満たすことは容易に確かめられる．

$$\varphi(z) = \int_0^z h(z)dz$$

が求めるものである．

方法３（巾級数の方法） 求める φ の逆関数を ψ とすると ψ が満たすべき関数方程式は

$$f(\psi(\zeta)) = \psi(\lambda\zeta)$$

ここで

$$\psi(\zeta) = \zeta + \sum_{k=2}^{\infty} c_k\zeta^k$$

とおいて上の方程式に代入すると

$$\lambda\Big(\zeta + \sum_{k=2}^{\infty} c_k\zeta^k\Big) + \sum_{j=2}^{\infty} a_j\Big(\zeta + \sum_{k=2}^{\infty} c_k\zeta^k\Big)^j = \lambda\zeta + \sum_{k=2}^{\infty} c_k\lambda^k\zeta^k$$

両辺の ζ^k の係数を比較すると

$$(\lambda^k - \lambda)c_k = P_k(a_2, \ldots, a_k, c_2, \ldots, c_{k-1}), \quad k \geq 2$$

ここで P_k は非負整数係数の多項式．これで

$$c_2 = \frac{a_2}{\lambda^2 - \lambda},\ c_3 = \frac{2a_2c_2 + a_3}{\lambda^3 - \lambda},\ \cdots$$

が順次定まり，$\psi(\zeta)$ が形式的巾級数としては唯一つ確定することがわかる．

この巾級数の収束半径が正であることを，優級数の方法で示すことができる．詳細は省略する．

注意 λ が1の巾根でなければこの方法で形式的巾級数としての $\psi(\zeta)$ を定めることはできる．しかし $|\lambda|=1$ の場合，この収束半径が正になるとは限らない．

ここでは結果だけを挙げておこう（Milnor [9] を参照されたい）．$\lambda=e^{2\pi\alpha i}$，ここで α は無理数で $0<\alpha<1$，という形に表わされる．このとき α の無限連分数展開を

$$\alpha=\frac{1}{a_1+}\frac{1}{a_2+}\cdots\frac{1}{a_n+}\cdots$$

とする．この第 n 近似分数の分母を q_n とする．

$$\frac{p_n}{q_n}=\frac{1}{a_1+}\frac{1}{a_2+}\cdots\frac{1}{a_n}$$

Bryuno は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log q_{n+1}}{q_n}$$

が収束するならば，級数の収束半径は正であることを示した．

この条件は円周 $|\lambda|=1$ の殆ど至る所の λ について満たされる．また Yoccoz は，この条件を満たさない λ を乗数とする写像で線形化できないものがあることを示した．

方法4（一意化定理の応用）　「単連結リーマン面は リーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}}$，複素平面 $\mathbb{C}$，または単位円板 のいずれかに等角同値である」という Koebe の一意化定理を応用する．これは鶏を割くに牛刀を用いる類ではあるが，考え方としては面白いと思う．

円板 U の可算個のコピー $V_n=\{(z,n)|z\in V\}$ $(n=1,2,\ldots)$ を用意して写像 $f_n:V_n\to V_{n+1}$ を $f_n:(z,n)\mapsto(f(z),n+1)$ で定める．単射正則写像の列

$$V_1\xrightarrow{f_1}V_2\xrightarrow{f_2}\cdots\xrightarrow{f_{n-1}}V_n\xrightarrow{f_n}\cdots$$

の帰納的極限 $\mathcal{R}=\varinjlim V_n$ をとる．各 V_n は自然に $\mathcal{R}$ の開集合とみなされ，$\mathcal{R}$ は V_n の増大列の極限だから単連結開リーマン面である．一意化定理によれば $\mathcal{R}$ は全平面 $\mathbb{C}$ または単位円板に等角同値である．$\mathcal{R}$ が $\mathbb{C}$ に等角同値であることを示そう．各 V_n において $\tilde{f}:(z,n)\mapsto(f(z),n)$ とおくことで全単射等角写像 $\tilde{f}:\mathcal{R}\to\mathcal{R}$ が定まる．これは $0=(0,1)$ を不動点としその乗数は λ である．単位円板の等角写像の不動点における乗数は絶対値1だから $\mathcal{R}$ は円板に等角同値ではない．$\mathcal{R}$ から $\mathbb{C}$ への等角写像の V_1 上への制限を φ とするとこれが Schröder 方程式の解になっている．

■2変数の吸引不動点　2変数複素数空間 $\mathbb{C}^2$ の変数を (x,y) で表し，原点を $0=(0,0)$ とする．0の近傍 U で定義された正則写像 $F:(x,y)\mapsto(f(x,y),g(x,y))$ で $F(0)=0$ なるものをとり，F の0の周りの線形項，すなわち F の0における微分 $(F_*)_0$ の固有値を λ,μ とする．

吸引不動点の場合，すなわち $0 < |\lambda|, |\mu| < 1$ の場合に，１変数の場合と同様に，適当な局所座標をとって F を線形化できるかというのは自然な考えである．しかし下の注意にあるように，２変数以上の吸引不動点は必ずしも線形化できない．

そこで標準形としてもう少し広い範囲の写像をとる．

定義 次のような 0 を不動点とする $\mathbb{C}^2$ の自己同型写像を考える．

$$
\begin{aligned}
L_{\lambda,\mu} &: (x, y) \mapsto (\lambda x, \mu y), \\
M_{\lambda;m} &: (x, y) \mapsto (\lambda x, \lambda^m y + x^m) \quad (m = 1, 2, \ldots).
\end{aligned}
$$

注意 $m \geq 2$ のとき L_{λ,λ^m} と $M_{\lambda,m}$ は 0 の周りの線形項は一致するが共役ではない．$M_{\lambda,m}$ は線形化できない．

定理 2.2 (Lattès) 吸引不動点をもつ２次元の正則写像は，局所的に上の標準形 $L_{\lambda,\mu}$ または $M_{\lambda;m}$ のいずれかに共役である．

これを言い換えれば次のようになる：λ, μ $(1 > |\lambda| \geq |\mu| > 0)$ を固有値として，

(1) どんな正整数 m についても $\lambda^m \neq \mu$ であるとき F は $L_{\lambda,\mu}$ に共役である．

(2) ある正整数 m について $\lambda^m = \mu$ となるとき F は $L_{\lambda,\mu}$ または $M_{\lambda,m}$ のどちらかに共役である．

この証明も１変数の場合同様いくつか考えられるが，ここでは方法２の一般化を略述する ([1], [17])．

(1)　0 の近傍の正則ベクトル場 $v(x)$ で

$$F_*(v(x)) = \mu v(F(x))$$

となるものを構成する．ここで $F_* : T_x\mathbb{C}^2 \to T_{F(x)}\mathbb{C}^2$ は F の微分をあらわす．そのために $(F_*)_0 : T_0\mathbb{C}^2 \to T_0\mathbb{C}^2$ の，固有値 μ に対応する固有ベクトルの一つを a として，$v^{(0)}(0) = a$ なる正則ベクトル場 $v^{(0)}$ を任意にとる．

$$v^{(n)}(x) = \mu^n F_*^{-n}(v^0(F^n(x))) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

とおくと，このベクトル場の列が収束し，極限 $v(x) := \lim_{n\to\infty} v^{(n)}(x)$ が $F_*(v(x)) = \mu v(F(x))$ を満たすことが証明できる．

(2)　常微分方程式の理論より，適当な局所座標系 (ξ, η) を $v(x) = \frac{\partial}{\partial\eta}$ となるようにとることができる．この座標系について F は $(\xi, \eta) \mapsto (f(\xi), \mu\eta + h(\xi))$ の形をしている．

(3)　１変数の吸引不動点に関する結果より，$f(\xi) = \lambda\xi$ となるように ξ を取り替えることができる．

(4)　さらに $\hat{\eta} = \eta + \ell(\xi)$ なる座標変換で F は $L_{\lambda,\mu}$ または $M_{\lambda;m}$ の形に帰着することができる．

■F-B 領域の構成　この結果を用いて序に述べた結果を示すことができる．

定理 2.3 $F : M \to M$ を2次元複素多様体 M の正則自己同型写像で $p_0 \in M$ を吸引不動点とするものとする．このとき領域 $D = \{p \in M \mid F^n(p) \to p_0\ (n \to \infty\}$ から $\mathbb{C}^2$ の上への双正則写像が存在する．

まず p_0 の十分小さい近傍 V を $F(V) \subset V$ となるようにとる．D は増大列 $F^{-n}(V), n = 1, 2, \ldots$ の極限である．

先にのべた局所的結果から，V から $0 \in \mathbb{C}^2$ の近傍 W の上への双正則写像 Φ_0 で $\Phi_0 \circ F = L \circ \Phi_0$ となるものがある．ここで $L = L_{\lambda,\mu}$ または $M_{\lambda,m}$

各 $F^{-n}(V)$ 上で $\Phi(p) = L^{-n} \circ \Phi_0 \circ F^n(p)$ と定めると Φ_0 は D から $\mathbb{C}^2$ の上への正則写像 Φ に拡張できる．

■N 変数の場合　この結果は N 変数の吸引不動点の場合に一般化されている．

定義　写像 $F : x = (x_1, \ldots, x_N) \mapsto F(x) = (f_1(x), \ldots, f_N(x))$ が次の形のとき下半三角型であるという：

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= \lambda_1 x_1 \\
f_2(x) &= \lambda_2 x_2 + h_2(x_1) \\
f_3(x) &= \lambda_3 x_3 + h_3(x_1, x_2) \\
&\cdots \\
f_N(x) &= \lambda_N x_N + h_N(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1})
\end{aligned}
$$

ここで h_k は $k-1$ 個の変数 $x_1, \ldots, x_{k-1}$ の正則関数．

吸引不動点をもつ写像 F は下半三角型写像に共役であることが示せるのだが，より強い形で結果を述べるために，次の定義をする：k 重指数全体の集合を

$$\mathbb{N} = \{(i_1, \ldots, i_k) \mid i_1, \ldots, i_k \text{は非負整数}\}$$

で表し，$k = 1, \ldots, N-1$ に対して $S_k \subset \mathbb{N}^k$ を

$$S_k = \{(i_1, \ldots, i_k) \mid \lambda_1^{i_1} \lambda_2^{i_2} \cdots \lambda_k^{i_k} = \lambda_{k+1}\}$$

と定める．

多重指数 $(i_1,\dots,i_k)\in S_k$ をもつ単項式 $x_1^{i_1}\cdots x_k^{i_k}$ の線形結合である k 変数多項式の全体を $\mathcal{P}_k$ $(k=1,\dots,n-1)$ で表わす．（S_k が空のときは $\mathcal{P}_k=\{0\}$ とする．）関数 $h(x_1,\dots,x_k)$ が $\mathcal{P}_k$ に属するための必要十分条件は

$$h(\lambda_1x_1,\dots,\lambda_kx_k)=\lambda_{k+1}h(x_1,\dots,x_k)$$

であることに注意する．

定理 2.4 **吸引不動点をもつ写像は局所的に $h_k(x_1,\dots,x_{k-1})\in\mathcal{P}_{k-1}$ $(k=2,\dots,N)$ なる下半三角型多項式写像に共役である．**

これから一般の N 次元についても 2 次元の場合の定理 2.3 と同様の結果が導かれる．

3 放物的不動点

ここでは乗数のひとつが 1 であるときを考える．

■ 1 変数の場合　乗数が 1 の 1 変数写像：

$$f(z)=z+a_2z^2+\cdots$$

で特に $a_2\neq 0$ の場合を述べる．座標を定数倍して $a_2=-1$ としてよい．

吸引不動点の場合と違って特徴的なのは，不動点 0 の近くの点でもその位置によって挙動が大きく異なるということである．z が 0 の右側にあれば $f(z)$ は 0 により近づくが，左側にあれば 0 から遠ざかる．0 に近づく点について次のことが成り立つ．

定理 3.1 *(1)* **不動点 0 を境界点とする単連結領域 V があって次の条件を満たす：**

(a) **$z\in V$ ならば $f(z)\in V$．したがって f^n $(n=1,2,\dots)$ が V 上で定義できる．** *(b)* **f^n は V において定値写像 0 に広義一様収束する．** *(c)* **$f^n(z)$ が 0 に収束するならばある n_0 があって $f^{n_0}(z)\in V$．**

(2) **領域 V 上の単葉正則関数があって Abel 方程式 $\varphi(f(z))=\varphi(z)+1$ を満たす．**

この (2) の意味は，$\zeta=\varphi(z)$ を V 上の局所座標とみなせば f は ζ に関して平行移動と見なされるということである．

これを示すには，座標変換 $\zeta=1/z$ によって $z=0$ のまわりの変換を $\zeta=\infty\in\widehat{\mathbb{C}}$ のまわりの変換

$$\hat{f}(\zeta)=1/f(1/\zeta)=\zeta+1+O(1/\zeta)$$

に移して考察する．

記号を改めて

$$f(z) = z + 1 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots \quad (z = \infty \text{ の近傍で})$$

を考えることにしよう.

(1) $R > 0$ を十分を大きくとれば, $\mathrm{Re}\, z > R$ のとき $\mathrm{Re}\, f(z) > \mathrm{Re}\, z + 1 - \delta$. したがって $V = \{\mathrm{Re}\, z > R\}$ なる半平面をとると $f(V) \subset V$ であって $z \in V$ ならば $f^n(z) \to \infty \ (n \to \infty)$

(2) 次のように定義される関数 $\varphi(z)$ は Abel 方程式の解になっている :

$$\varphi(z) = \lim_{n\to\infty} \{f^n(z) - n - a_2 \log f^n(z)\}$$

ここで V 上で $\log z$ の一価な分枝を定めておくとする.

■半吸引的不動点 上の結果を 2 変数の場合への拡張した [15], [16] の概要を述べる.

不動点 0 の近傍 $U \in \mathbb{C}^2$ で定義された正則写像

$$F : U \ni (x, y) \mapsto (f(x, y), g(x, y)) \in \mathbb{C}^2$$

で次の形のものを考える.

$$f(x, y) = x + \sum_{i+j\geq 2} a_{ij} x^i y^j, \quad (a_{20} \neq 0)$$
$$g(x, y) = \mu y + \sum_{i+j\geq 2} b_{ij} x^i y^j$$

前定理と同様の結果を示すために準備が必要である.

命題 3.2 **局所座標** (x, y) **を取り替えて** $f(0, y) \equiv 0, g(0, y) = \mu y$ **とすることができる.**

すなわち F で y 軸上の点 $(0, y)$ は y 軸上の点 $(0, \mu y)$ に写る. いま $\Gamma = \{(0, y) \mid |y| < r\} y$ を y 軸上の円板とする. ここで半径 r は十分に小なるようにとる.

定理 3.3 (1) Γ **を境界に含む領域** V **で次の条件を満たすものがある :**

(a) $p \in V$ **ならば** $f(p) \in V$. **したがって** f^n $(n = 1, 2, \ldots)$ **が** V **上で定義できる.** *(b)* f^n **は** V **において定値写像 0 に広義一様収束する.** *(c)* f^n **が** p **のある近傍で 0 に一様収束するならば, ある** n_0 **があって** $f^{n_0}(p) \in V$.

(2) **領域** V **上の単射正則写像** $\Phi = (\varphi, \psi)$ **があって**

$$\varphi(F(p)) = \varphi(p) + 1, \ \psi(F(p)) = \psi(p)$$

を満たす.

これを示すには，１変数の場合と同様，座標変換 $(x, y) \mapsto (z, w) = (1/x, y)$ によって $(\infty, 0) \in \widehat{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}$ の近傍に移って考える．この座標系に関して F は

$$(z, w) \mapsto \left(z + a_0(w) + \frac{a_1(w)}{z} + \cdots,\ \mu w + \frac{b_1(w)}{z} + \cdots\right), \quad a_0(0) \neq 0$$

の形をしている．さらに，座標変換によって，$a_0(w) \equiv 1$ で $a_1(w), \ldots; b_1(w), \ldots$ などは有限個まで定数とすることができる．R を十分大きく，r を十分小さくとって

$$V = \{\mathrm{Re}\, z > R, |w| < r\}$$

とおくと V は (1) の条件を満たす領域になる．また関数 φ も１変数の場合と同様にできる．ψ の構成は少し複雑なのでここでは省略する．

■　再び大域的な考察に戻って，２次元複素多様体 M の正則自己同型写像 F で p_0 を半吸引不動点とするものをとる．F は p_0 の周りで上に述べた条件を満たしているとする．

$$E := \{p \in M | F^n(p) \text{ は } p_0 \text{に収束する }\}$$
$$D := \{p \in M | F^n \text{は } p \text{ のある近傍で } p_0 \text{に一様収束する }\}$$

とすると，定義から $D \subset E$ で D は開集合である．

不動点 p_0 は E に属するが，D には属さない．したがって $D \neq E$.（吸引不動点の場合には $p_0 \in D = E$ であったことに注意する.）

次の定理は半吸引的不動点への収束領域 D が F-B 領域であることを示している．

定理 3.4 全単射正則写像 $D : \Omega \to \mathbb{C}^2$ が存在して $\Phi \circ F|D = L \circ \Phi$ が成り立つ.

ここで $\mathbb{C}^2$ の自己同型写像（平行移動）L を $L : (x, y) \to (x + 1, y)$ で表わす．

この場合も D は増大列 $F^{-n}(V)$ の極限である．V 上で定義された写像 Φ を D 全体に拡張してこの定理が得られる．

また集合 E は $F^{-n}(V \cup \Gamma)$ の増大列の和として得られる．

■　次の結果は２変数の吸引不動点と半吸引不動点をつなぐものである ([18]).

２次元複素多様体の正則自己同型の族 $\{F_\lambda\}_\lambda$ でパラメータ $\lambda \in \Lambda$ に正則に依存するものを考える．ここで $\Lambda \in \mathbb{C}$ は１を含む開集合．点 p_0 は常に F_λ の不動点であるとする．また微分 $(F_{\lambda *})_{p_0}$ の固有値が $\lambda, \mu(\lambda)$ で $|\mu(\lambda)| < 1$ $(\lambda \in \Lambda)$ であるとする．Λ_0 を円板 $\{|\lambda| < 1\}$ 内の１を頂点とする開角領域に点１を付け加えた集合とする．

定理 3.5 $\{(p, \lambda) \mid p \in D_\lambda, \lambda \in \Lambda_0\}$ は $M \times \Lambda_0$ の開集合である.

またパラメータ λ をもつ D_λ から $\mathbb{C}^2$ の上への双正則写像族 Φ_λ $(\lambda \in \Lambda_0)$ で Λ_0 で連続に， $\Lambda_0 - \{1\}$ では正則に λ に依存するものがとれる．さらに，$\Phi_\lambda = (\varphi_\lambda, \psi_\lambda)$ とするとき，関数方程式

$$\varphi(F(p)) = \lambda\varphi(p) + 1, \psi(F(p)) = \mu\psi(p) + h_\lambda(\varphi(p))$$

を満たすものがある．ここで $h(t)$ は１変数の整関数である．

4 付記

Fatou-Bieberbach 領域を構成する方法として最初に見出されたものは，正則写像の不動点への収束領域であるが，不動点に依らない方法が Rosay-Rudin [12] によって与えられている．これを述べる．

補題 4.1 原点 $0 \in \mathbb{C}^2$ を中心とする半径 R の開球を $B(R)$ とする．$B(R)$ に属さない２点 p_1, p_2，および $\varepsilon > 0$ が与えられたとき，多項式自己同型写像 $F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2)$ で次の条件を満たすものが存在する：

(1) $z \in B(R)$ ならば $\|F(z) - z\| < \varepsilon$；

(2) $F(p_1) = p_2$.

(証明) (1) 2点 p_1, p_2 を結ぶ複素直線が $B(R)$ を通らない場合：座標のユニタリ変換で，この直線は $x = \alpha$ $(|\alpha| > R)$ であるとしてよい．$p_1 = (\alpha, \beta_1), p_2 = (\alpha, \beta_2)$ とする．１変数の多項式 $f(x)$ を $|f(x)| < \varepsilon$ $(|x| \leq R)$ かつ $f(\alpha) = \beta_2 - \beta_1$ となるようにとり多項式自己同型写像 F を $F(x, y) = (x, y + f(x))$ によって定めるとこれは条件を満たす．

(2) 一般の場合：δ を $< \delta < \varepsilon/2$ かつ $p_1, p_2 \notin \bar{B}(R + \delta)$ となるようにとる．点 p_1 を通り $\bar{B}(R + \delta)$ と交わらない直線 L_1 と p_2 を通り $\bar{B}(R + \delta)$ と交わらない直線 L_2 をとる．L_1, L_2 の交点を p_0 とする．多項式自己同型 F_1 を $\|F_1(z) - z\| < \delta$ $(z \in \bar{B}(R))$ かつ $F_1(p_1) = p_0$ となるように，F_2 を $\|F_2(z) - z\| < \delta$ $(z \in \bar{B}(R + \delta))$ かつ $F_2(p_0) = p_2$ となるようとり $F = F_2 \circ F_1$ とばよい． □

この補題を用いて Fatou-Bieberbach 領域を構成しよう．

球の増大列 $\{B(k)\}_{k=1,2,\ldots}$ を考え，点列 $\{p_k\}_{k=1,2,\ldots}$ を $p_k \notin \bar{B}(k)$ となるようにとる．各 k について $F_k \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2), (k = 1, 2, \ldots)$ を

$$\|F_k(z) - z\| < 2^{-k} \quad (z \in B(k)) \quad \text{かつ } F_k(p_k) = p_{k+1}$$

となるようにとり $\Phi_k = F_k \circ \cdots \circ F_1$ とおく．

$\Omega_k = \Phi_k^{-1}(B(k))$ とおけば $\{\Omega_k\}$ は増大列である．実際，各 k について $F_{k+1}(B(k)) \subset B(k+1)$ だから，この両辺を Φ_{k+1}^{-1} で写して $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$ を得る．

$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k$ とおくと，Ω は $\mathbb{C}^2$ の真部分領域である．実際 $\Phi_k(p_1) = p_{k+1} \notin B(k)$ だから p_1 はどの Ω_k にも含まれない．

各 Ω_j 上で写像列 Φ_k は一様収束する．実際，$z \in \Omega_j$ のとき，$k \geq j$ ならば $z \in \Omega_k$ で $\Phi_k(z) \in B(k)$ だから

$$\|\Phi_{k+1}(z) - \Phi_k(z)\| = \|F_{k+1}(\Phi_k(z)) - \Phi_k(z)\| < 2^{-k}$$

これより，$\Phi = \lim_{k\to\infty} \Phi_k : \Omega \to \mathbb{C}^2$ とおくと，各 Ω_k 上で $\|\Phi(z) - \Phi_k(z)\| < 1$ となる．また Φ_k は Ω_k を $B(k)$ に双正則に写しているから，Φ は Ω を $\mathbb{C}^2$ の上に双正則に写していることがわかる．

注意 Rosay-Rudin は Ω が $\mathbb{C}^2$ の稠密な真部分領域とできることを示している．また Stensönes [13] は同様の方法で C^∞ 級の境界をもつ F-B 領域がつくれることを示している．

参考文献

[1] 足立幸信，平井悦子，柏原紘子，西村保一郎，寺田俊明，上田哲生，「多変数の複素力学系」，Topics in Complex Analysis 1993.

[2] 上田哲生，谷口雅彦，諸沢俊介，「複素力学系序説—フラクタルと複素解析」培風館 1995.

[3] L. Bieberbach, Beispiel zweier ganzer Funktionen zweier komplexer Variablen, welche eine schlicht volumetreue Abbildung des R_4 auf einen Teil seiner selbst vermitteln, Preuss. Akad. Wiss. Sitzungsber, (1933) 476–479

[4] E. Bedford and J. Smillie, Fatou Bieberbach domains arising from polynomial automorphisms, Indiana Univ. Math. J., 40 (1991), 789-792.

[5] R.L. Devaney, An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, second ed., Addison-Wesley (1989)

[6] P. Fatou, Sur certains fonctions uniformes de deux variables, C. R. Acad. Sci. Paris 175 (1922), 1030-1033.

[7] P. Fatou, Substitutions analytiques et équations fonctionelles à deux variables, An. Sc. Ec. N. Sup. (1924), 67-142.

[8] S. Friedland and J. Milnor, Dynamical properties of plane polynomial automorphisms, Ergodic Theory Dynamical Systems, 9 (1989) 67-99.

[9] J. Milnor, Dynamics in One Complex Variable, Vieweg, 1999.

[10] S. Morosawa, Y. Nishimura, M. Taniguchi, T. Ueda, Holomorphic dynamics, Cambridge U. Press, 2000. ([2] の増補英訳版)

[11] Y. Nishimura, Automorphismes analytiques admettant des sou variété de points fixes attractives dans la direction transversale, J. Math. Kyoto Univ. 23 (1983),289-299.

[12] J.-P. Rosay and W. Rudin, Holomorphic maps from C^n to C^n, Trans. Amer. Math. Soc. 310 (1988), 47-86.

[13] B. Stensönes, Fatou-Bieberbach domains with C^∞ smooth boundary, Ann. Math. 145 (1997) 365-377.

[14] S. Sternberg, Local contraction and a theorem of Poincaré, Amer. J. Math. 79 (1958) 809-824.

[15] T. Ueda, Local structure of analytic transformations of two complex variables, I, J. Math. Kyoto Univ., 26 (1986), 233-261.

[16] T. Ueda, Local structure of analytic transformations of two complex variables, II, J. Math. Kyoto Univ., 31 (1991), 695-711.

[17] T. Ueda, Normal forms of attracting fixed points of holomorphic maps, Math. J. Toyama Univ. 22 (1999), 23-34.

[18] T. Ueda, Simultaneous linearization of attracting and semi-attracting fixed points of two complex variables, (in preparation).