層を超えて–不定域イデアルと層の差異–

奈良女子大学理学部
角田 秀一郎

1 はじめに

■ 岡が作り出した不定域イデアルあるいは層（とその概念）は20世紀後半の数学の推進力のひとつであった．いうまでもなく古くからある数学の問題「局所と大域」を扱うのに層はきわめて有効である．今後も多様な層（とコホモロジー）が導入されいろいろな数学の研究に役立つはずである．層は，何らかの意味において，局所と大域の問題を数値化する手段といえる．そしてだからこそ有効なのである．しかしそのために逆に限界もある．Poincare 予想は通常の特異コホモロジーの限界を示すものといえる．また，Riemann 予想は，有理整数環 $\boldsymbol{Z}$ に対応する空間 $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{Z})$ のコホモロジーを示唆するものと云えるが，逆に，現在ある層理論の限界を表すとも云える．もちろんこれらについて新しいコホモロジーが有効かもしれない．だがそのときはその新しいコホモロジーの限界がみえるに違いない．このような限界は局所と大域が完全には形式化できないことからしたがう必然なのである．本稿は本質的に層を超えた数学の構築を目指し局所と大域に対する新たな視点を与える．やろうとすることを簡単にいえば，局所と大域を陽に表示することでそれらの二項対立を明らかにし，その後局所と大域の境界を揺さぶる．その過程を追うことそのものが層と岡の不定域イデアルの違いを実感する契機になろう．通常層と不定域イデアルは数学的に同値ではあるがその「精神」は異なると理解されているようだ．私は精神的な差異を否定するものではないが興味はないし述べるつもりもない．あくまで数学的差異に言及するに留めるつもりである．たとえば適用範囲の違いのようなことについてのみ議論する．

■ よく知られたことではあるが念のため上述の数値化について説明しておこう．多くの数学者が知っているように，球面の1次（コ）ホモロジーは0であり実2次元トーラスのそれは2である．その作り方から位相だけによって決まるから（コ）ホモロジーは位相同型で不変で，したがって，球面と2次元トーラスは位相同型ではないと云われる．ここで

0と2は異なることが前提となっていることに注意しよう．冗談で云っているわけではない．いわんとすることを明確にするために説明を続けよう．位相同型のような（過去において）微妙だった概念が数の違いという明々白々の概念に平行移動していることに注意してほしい．曖昧模糊としたトポロジーの概念を収束させるのに人類は相当な年月を費やしている．そしてトポロジー以前の球面と2次元トーラスが同じか違うか分からなかった時代は人類が無知であったと云われる．だがしかし我々は過去を完全に分離し「球面と2次元トーラスが位相同型ではない」（もちろんある定められた公理系の範疇において）という言明を行う．そこに何か忘れているものはないだろうか．私はその「何か」が確かにあって，しかも，あるだけではなくてそれを忘れていることが数学の進展を阻害しているとさえ考える．数学的事実を手に入れた代償に失ったもの，それは何か．あなたが数学者か大学で数学教育を受けていた方なら，そんなものは存在しないというかもしれない．さてどうだろうか．

■ 蛇足をひとつ．0と2は確かに違う．しかし私がすぐに思いつく証明は0と2では1次（コ）ホモロジーが違うというものだ（半分冗談）．

■ 本稿ではいくつかの場面で数学には似つかわしくない弁証法が使われている．これは決して必要というわけではない．理解を助けるために使っていると思って頂きたい．

2 複雑系と数学

■ さて層を超えるものとは何か．本稿では数という概念が再考されるのだが，数を考え直すという要請は複雑系からも来ている．ここでの複雑系はカオスと考えて支障ない．複雑系は数学を大きく揺さぶる力を持つと私は考える．地動説と天動説にたとえていえば，複雑系が射程とする現象は水平線の向こうから来る船のマストから先に見える現象に相当する．マストが先に見えるのは面白い現象だが波がつねにあるからだと説明し地動説を保持することも可能であったろう．地球がいまの大きさではなくもっと巨大であったならいまだ地動説が主流かもしれない．一方，この現象をきっかけに地動説へと展開することも（実際おきたのだから当然）できる．現在数学はこの分岐点にいる．複雑系がたんに面白い現象で終わるか真に新しい数学へと移行するか．この意味で，コペルニクス的転回を示唆する思想に内部観測というのがある．内部観測とは聞き慣れない言葉かもしれない．内部観測の推進者は松野（[4]），郡司（[1]など）である．地動説がそうだったように内部観測も（数学を行う者にとって特に）受け入れやすいものではない．現在のところ理解が広

がっているとはいえないかもしれない．しかし最終的には内部観測が数学へ多大な影響を及ぼすと私は考えている．その影響の一端でも紹介できればよいと思っている．

■　複雑系を考える上で全体と部分という二項対立は避けられない．また，複雑系もっと狭めてカオスを真に数学化しようとするなら，理論と実践あるいはもう少し具体的に真の解と近似解という二項対立に直面する．全体を見渡せることを前提とする数学にはカオスは現れない．たとえば，きわめて大きな周期をもつ軌道の場合，そのグラフはカオスと区別が付かないが数学的にはあくまで周期解である．したがって，カオスは計算機を使ったシュミレーションに過ぎないと云われてしまう．内部観測の特徴はかかる対立から離陸しようという点であろう．それは容易な作業ではないことは想像にかたくない．人間は二項対立にはまりやすい．なにしろ人類は二項対立の横綱格と云える「認識論と存在論」の間を往復し今も揺れ動いているのだから．超越的立場に立って「人間とはそんなものだ」と云っておけば楽は楽だ．しかしそこで立ち止まってもいられない．我々が二項対立を成立せしめている基盤そのものを攻略しなければ，科学の一領域でしかない複雑系の研究すらおぼつかないしもっといえば数学の未来すらも危うい．

3　現実と数学

■　私は純粋数学と応用数学という対立の図式は不毛であると考える．数学も人間の行為のひとつである以上応用を見込んだ数学でなくても現実との接点を持ちうるのである．それを例示してみたい．この話は同時に後の話へのウォームアップにもなる．

■　幻肢という現象がある（Ramachandran [5]参照）．何らかの理由で失った手足などが存在するように（感覚レベルですら）感じてしまう人が多数いる．つい最近まで原因が特定されず的外れの処置も多くなされてきたらしい．これから幻肢と Russell のパラドクスは同じ構造をしていることを示す．幻肢研究の第一人者である Ramachandran は幻肢の「切断」に成功した．そこで切断と同様のやり方で Russell のパラドクスを解消してみようと思う．私はこの事例が応用数学として応用されるのとは異なるタイプの数学の直接的応用につながるのではないかと密かに期待している．この例を単なるメタファーとみなす向きもあろう．しかし私はモデルとメタファーの違いを大袈裟に喧伝する必要はないと思う．問題は主観と客観の間に存する．人間は自分のことになるとモデル（あるいはメタファー）を提示されても「私の脳ではそんなことはしていない」などと云うが，投げられたボールが微分方程式を解いているかいないかには頓着しない．

■ いうまでもないが Russell のパラドクスとは以下のようなものである．

> 集合には自分自身を要素とするものとしないものに分かれる．そこで集合 T を自分自身を要素としない集合全体のつくる集合とする．問題は T は T 自身を要素とするかしないかである．要素となるとしよう．そのとき T は T の要素となるべき条件，つまり自分を要素としないことを満たす．これは矛盾である．一方，要素とならないとしよう．すると T は T の要素となるべき条件を満たさないのであるから T は T を要素とすることになってしまう．再び矛盾である．どちらにしても矛盾を得るので T は T 自身を要素とするかどうか決定できないことになる．その要素が決定出来ない集合が出現したことになる．

さてこれを解決する前に通常の回避の方法を述べておく．

- T のようなものは考えない．たとえば任意の集合 x は $x \notin x$ を満たすとし，集合全体のなす集合などは存在しないものとする．これではどこまでを集合とするかが恣意的に決められる感じがする．
- T を集合ではなく別名（たとえば類など）で呼ぶ．T のような大きな「集まり」は集合とは異なるカテゴリーに属するとするわけである．これはこれで理解できるが，なぜ $\emptyset$ と $\{\emptyset\}$ は同じカテゴリーなのかという疑問は残る．
- T のような大きな集合は扱わないとかする．ある程度大きな集合を決めておいてすべてはその中の比較的小さい部分で行われるというわけで，現実的な解決ではあるがパラドクスに背を向けている．

数学としてはこれでよいのであろう．しかしこういった回避の方法は意識レベルで変更不可能な幻肢の解消にはつながらない．もうちょっとはっきりいえば，当時の数学者は真剣にパラドクスを考察しなかったかあるいは悩み方が足りなかったかのどちらかだろう．

■ Ramachandran は幻肢がニューロンの「配線」が変更されて一種の混線によって起きることを突き止めた．違うものが同じものになってしまうわけである．Russell のパラドクスにおいて幻肢に対応するものは公理的集合論における意味論である．公理的集合論においては，記号 $x \in X$ だけがありそれらと所与の規則にしたがって得られたものだけが正しい命題でありそれだけが有意味であるとする．x は X の要素であるといった意味論は不要であるとする．これによって空集合とは何かといった「形而上学」の議論を避けることができるとしたのが二十世紀の数学であった．誤解があるといけないので一言付言しておく．もちろんどんなに公理系を設定しても非標準モデルの存在を否定できない．し

たがって公理は系を定めるものというよりは数学的対象を探索する道具とみる方が適切である．ここで問題にしているのはそういった公理の役割ではなく公理の意味論である．実際数学者に聞いてみると「意味論を排除できるわけがないじゃないか」と返答する人も多い．してみると，数学をやるときに意味論を無視しているわけではないことを考慮すると，これは数学の外側の人間に対して数学の特権的地位を納得させる方便だったかもしれない．それはおくとしてパラドクスを解決するために明示的に意味論を復活させよう．しかし一旦統語論とは分離した形で導入する．その後再度はりあわせるのである．そうすることによって以下のような議論が可能となる．そこが重要なのだ．記号 $1 \in \{1,2,3\}$ は，1 は $\{1,2,3\}$ の要素であることにする．記号 $5 \in \boldsymbol{N}$ は，5 は $\boldsymbol{N}$ の要素であることを意味する．記号 $x \in X$ は，x は X の要素であることを意味する．以下同様である．だから，記号 $T \in T$ は，T は T の「要素ではない」ことを意味し，記号 $T \notin T$ は，T は T の「要素である」ことを意味する．これは決して書き間違いではない．記号の使い方が反対のように感じられ，また，心理的違和感があるが，それは多分に気分的なものである．T を論ずる以前にも T の要素の定義はなされている．にもかかわらずそれがどう適用されるかは適用後に理解されるのである．このことは記号 $T \in T$ が T は T の「要素である」ことと同値であるという主張と矛盾しない．問題にしているのはそこではない．ここで統語論と意味論が並列していることに注意されたい．統語論と意味論にステータスの違いを与えていない．両者を並べた上で関係付けている．こうすることで，$T \in T$ は，T が T に入る要件を満たさないことを意味することになる．したがって矛盾とはならない．$T \notin T$ についても同様である．T は T の要素となるかならないかはどちらでもよい問題となる．

■　この議論は他のパラドクスを導くような大きな集合へと接続できる．たとえば，いままでの議論に重ねて集合全体の集合を考えてもよい．先の議論全体を統語論的に記述されるものとし，意味論的記述を新たに作る．そうしておいてもう一度統語と意味を分離して貼り合わせればよい．実際のところ有限集合のような小さい集合でも同様のことがなされている．普段それに気が付かないだけである．

■　Ramachandran の本には数学からみて興味深い別の症例がある．それは自閉症で知能指数が 60 程度だがある分野に特定の才能を発揮する「サヴァン症候群」と呼ばれるものである．この症候群をもつ人の中には Da Vinci 風の絵を描く 6 歳の自閉症児がいる．自然数が素数かどうかを超人的に判断できる「素数サヴァン」がいる．たとえば 10037 から 10133 の間の素数をたったの 10 秒で全部決定してしまう，しゃべれない自閉症児もいる．はじめてこのような症例を聞くと，彼らは超人的速度で計算ができると考えがちである．事実そうかもしれないが私はこれを自然数の見直しへとつなげたいと考える．彼らの存在

をあらたな自然数の見方へのきっかけにしたいのである．これについては後述することにしよう．

4 復習

■ 不定域イデアルと層に関する事項を復習する．後の議論に必要な最小限の事項に限る．したがって記述は完全でもなければ体系的でもない．

■ 不定域イデアルはペア (U, f) を構成要素とする．U はどこかの開集合，f は U 上の関数である．関数といっても場合によって，多項式関数，正則関数，C^∞ 関数などが使われる．ここで U も f も固定されていない，つまり，動きうる．もちろんこのペアの集合がなんらかの条件を満たすとき不定域イデアルと呼ばれるのであるがその定義は使わないので省略する．ポイントはペア (U, f) が次のような不定性をもつことである．

- V を U の開部分集合とすれば $(V, f|_V)$（$f|_V$ は f の V への制限）は別のペアとなる．(U, f) はこの新たなペアを内包している．
- f は U よりも大きな開集合上の関数に拡張できるかもしれない．

(U, f) 自身にはこの二つとも書き込まれてはいない．しかし不定域イデアルにとってどちらも重要である．というか後者は不定域イデアルの意義とも云える．関数があればどうしても最大の定義域を先に考えてしまうのが自然である．それを乗り越えた結実が不定域イデアルである．(U, f) がこのような不定性をもつ．したがって，ペア (U, f) の意味は何かと問われた場合，正確に答えられないことになる．よりはっきりいえば，答えることに意味はない．私はこの種の曖昧さを否定しているのではない．むしろ本質的なものとさえ思っている．

■ 一方層は (U, f) と $(V, f|_V)$ を一旦分離する．まず気持ちとしては U 上の関数全体の集合なのであるが定義としては単なる環 $\Gamma(U, \mathcal{O})$ をとる．これでは U の部分集合上の情報がなくなるので，$\Gamma(U, \mathcal{O})$ から $\Gamma(V, \mathcal{O})$ への準同型 r を導入する．この写像は制限写像と呼ばれる．その出自からして妥当な命名である．ここで r は当然開集合 U，V による．したがって $r_{U,V}$ などと書くのが正当であるが，煩雑さを避けるため誤解のない範囲で記号を省略する．考えるカテゴリーにより環のところはアーベル群その他に変わりうる．こうすると関数の拡張などが多少なりともみやすくなる．開被覆 $U = \cup U_\alpha$ と $f_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{O})$ に対して $\Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, \mathcal{O})$ の中で $r(f_\alpha) = r(f_\beta)$ が成り立つとする（これは拡張されるための必要条件）．もしある $\Gamma(U, \mathcal{O})$ の要素 f で $\Gamma(U_\alpha, \mathcal{O})$ の中で $r(f) = f_\alpha$ を満たすものがあれ

ば $\{f_\alpha\}$ は $\Gamma(U,\mathcal{O})$ の要素に拡張されるということにしよう．そうすれば通常の関数のときと平行した議論が可能で，かつ，制限写像によって不定性が回収される．層は議論としては明快だが関数の性質を一時保留にしながら情報を保つためにどうしてもカテゴリーを指定する必要がある．ここが要点である．

■ 補足として延長できない「ずれ」を記述するコホモロジーを書いておく．開被覆 $X=\cup U_\alpha$ がある．このとき 1 次コホモロジーは剰余群として

$$\mathrm{H}^1(X,\mathcal{O})=\{(f_{\alpha\beta})\}/\{(g_\alpha-g_\beta)\}$$

という風に定義される．ただし，

$$f_{\alpha\beta}\in\Gamma(U_\alpha\cap U_\beta,\mathcal{O}),g_\alpha\in\Gamma(U_\alpha,\mathcal{O})$$

かつ

$$U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma \text{ 上 } r(f_{\alpha\beta})+r(f_{\beta\gamma})-r(f_{\alpha\gamma})=0$$

を満たすもののみを考えている．$(g_\alpha-g_\beta)$ と書けるものと $(f_{\alpha\beta})$ と書けるものがどれだけ違うかを記述しているわけで，これには普通ベクトル空間などの構造が入る．したがって次元という数値が重要となる．いままでの議論をもとに粗っぽく云えば不定域イデアルは内包的で層は外延的ということになろうか．

5 数再考

5.1

■ 層の本質を考えると層を超えるには関数概念の再構築が必要となることがわかる．そして必然のように自然数の再構築へと繋がる．さてそのような再構築を考える入り口として多少唐突ではあるが，整数環 $\boldsymbol{Z}$，位数 q の有限体 $\boldsymbol{F}_q$ 上の 1 変数多項式環 $\boldsymbol{F}_q[x]$，複素数体 $\boldsymbol{C}$ 上の 1 変数多項式環 $\boldsymbol{C}[x]$ の三位一体説から出発しよう．もう少し専門的には完備化によってさらに類似点が増すことが知られている．$\boldsymbol{Z}$ に

$$n\to\infty \text{ のとき } p^n\to 0$$

となるように位相を入れ完備化した $\boldsymbol{Z}_p=\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{Z}/p^n\boldsymbol{Z}$，1 変数形式的べき級数環 $\boldsymbol{F}_q[[x]]=\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{F}_q[x]/(x^n)$，収束べき級数環 $\boldsymbol{C}\{x\}$ の三位一体が考えられる．それぞれの環の前にスペック（Spec）を書くと，その環に対応する空間となる．空間の関数環がもとの環に対応すると思って頂いて差し支えない．$\mathrm{Spec}(R)$ は集合としては R の素イデアルの作る集合

で適当なやり方で位相空間となる．Spec($\boldsymbol{Z}$) には素数 p で生成されるイデアル $(p)=p\boldsymbol{Z}$ がある．そのイデアルを簡単のため p と書いてしまう．

■ さて，1 変数多項式環のスペックは射影空間という「コンパクト化」をもつ．たとえば，Spec($\boldsymbol{C}[x]$) のコンパクト化は 1 次元複素射影空間すなわち複素射影直線すなわち Riemann 球面である．三位一体説にしたがって Spec($\boldsymbol{Z}$) の「コンパクト化」は既に考えられている．それは ∞ なる点をひとつ付け加えたものである．ところがここでちょっとした問題が生ずる．それは ∞ での（正則）関数全体の集合は $\{a\in\boldsymbol{Q}|-1\le a\le 1\}$ になることである．これは，Riemann 球面の場合無限遠でのパラメターが $1/x$ になることを想起すると納得しやすい事実であろう．「関数」2 は平面「Spec($\boldsymbol{Z}$)」で正則であるが ∞ では極をもつ．一方 1/2 は ∞ では正則だが 2 では極をもつ．とにかくポイントはこれが環にならないことである．Spec($\boldsymbol{Z}$)$\cup\infty$ は

$$\{0\},\quad 2,\quad 3,\quad 5,\quad \ldots,\quad \infty$$

となっている（ここでは 0 も素数と思えばよい）．ここで ∞ を除いたところでは環の理論が使える．逆に Spec の点 2 を除いたところでは，（足し算は考えられないのだが）中点をとる演算は定義される．ここでは $a\triangle b=(a+b)/2$ と書こう．点 2 のところでは $2=0$ なので 1/2 がない．というわけで $\triangle$ がうまく定義されないのは見やすいだろう．高次元を視野に入れる場合，和のない点と $\triangle$ のない点の直積なども考慮しなければならない．そのとき演算 $(a+b+c)/3$，$(a+b+c+d+e)/5$ なども重要となってくる．しかしこの点には深入りしない．

■ 普通，「貼り合わせ」による多様体と「部分」としての多様体というふたつの定義がある．これらは同値だが，数論的多様体のような「極限状態」では異なる概念となる．「貼り合わせ」による定義とは，各 U_α が単位球など適当な対象と同型となるような開被覆 $\cup U_\alpha$ がとれて... という風に進むものである．他方「部分」としての定義とは，Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^n$ とか射影空間とかの全体を与えて適当な条件を満たす部分集合として多様体を考えるものである．前者が内包的後者が外延的となろうか．とにかくこのふたつのカテゴリーの対象は，一般の素数上では対応をつけることが可能で，それを使ってカテゴリーを「貼り合わせる」ことができる．

例．絶対値は，

$$|a+b|_v\le\max(|a|_v,|b|_v)\quad(v\ne\infty)$$
$$\left|\frac{a+b}{2}\right|_v\le\max(|a|_v,|b|_v)\quad(v\ne 2)$$

というように貼り合わせることができる．私はこれで Archimedes 附値とそうでないものの差異が明白になったと思うのだがどうだろうか．

■ というわけで，三位一体に沿ってコンパクト化を考えるなら，環と共に $\triangle$ とかけ算の二つの演算が定義された代数的構造を解析しなければならないことになる．因みに私は後者を放射（ray），放射の要素を射（radius）と呼んでいる．

$$\begin{array}{lllllll} 2, & 3, & 5, & \ldots, & & -- & 数\quad 環 \\ & 3, & 5, & \ldots, & \infty & -- & 射\quad 放射 \end{array}$$

放射の解析には多分に技術的側面がある．それもあって放射についてはここでは詳しく述べない．後に自然数の対極として「自然射」なるものを定義するが，そこで少し議論する．一言だけ述べておく．放射では準同型とイデアルの関係は環ほどうまくいかない（これは当然予想されることではあるが）．したがって準同型を中心に考察していくことになる．それもすべての準同型を取り出すわけではなく，イデアル（あるいは環準同型）に対応するものだけを抽出する．そういった工夫が必要とされる．

5.2

■ さて，それほど目立たないことではあるのだが，ここで既に不定域イデアルと層の違いが浮上している．$\mathrm{Spec}(\boldsymbol{Z}) \cup \infty$ 上に不定域イデアルはそのまま拡張可能である．基本的な構成要素 (U, f) には演算は明示されていないから．一方スペックの要素としての 2 と ∞ では異なるカテゴリーを考える必要があるので，層はそのままでは拡張されない．この場合には層のはりあわせを定義すれば問題は解消する．しかし，実は，何を条件にはりあわせるかは不明なのである．まず，かけ算は 2 と ∞ で共通なので，かけ算の構造は保つカテゴリーを考えるのは自然である．しかし，それ以上層のはりあわせになにを要求するのか．これが結構難しい問題となる．できるだけ多くの情報を保つ形で貼り合わせたいのだが，その反面自由度がなくなっては新しいものが出てこないこともわかる．ここをどう調和させるか．与えられた問題によってはりあわせの条件を変えていかなければならないというのが私の感触である．ある時は $\triangle$ の 2 倍は厳密に $+$ の条件を満たすようにする，ある時はかけ算の情報だけを考える，というように．実際この種の対象を扱う数論的代数幾何学では大域的切断（全空間 X での $\Gamma(X, \mathcal{O})$ の要素）も一意的ではなく状況に応じていくつか考えられている．これは結構面白い現象だと思っている．層そのものではなく層のはりあわせということになれば，当然コホモロジーの定義も変更される．というか私は自然な形でコホモロジーを考えることは出来ないのではないかと思う．だからコホモロジーを別様に翻訳しなければならないのではないかという思いにかられる．もっといえばコホ

モロジーを無効にするような構造を考えてその中でコホモロジー（の意味）を再度回収するというような態度が求められているのだと思う．冒頭に挙げた例でいえば，球面と2次元トーラスの（コ）ホモロジー的な差異を無効にして，なおかつ，そこにもう一度別の意味での違いをあぶり出すというところだろうか．あなたは「そんなことは無意味だし，だいいち，できるわけもない」と思っているかもしれない．もしそうなら私は直ちに「説得」できるとは思わない．素朴な意味で議論（結果）を積み重ねていくしかないと考えている．

■　蛇足：上の議論から $\boldsymbol{C}$ に隠れた変数があって $\boldsymbol{C}\{x\}$ は2変数の環であることがわかる．$\boldsymbol{C}$ は無限遠での正則関数のつくる「放射」$D=\{z\in\boldsymbol{C}||z|\le 1\}$ の「商体」である．「商体」という感覚は「関数」のべき級数展開にあたるものつまり小数展開をみると理解しやすい．小数展開を

$$a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_0 + b_1\frac{1}{10} + b_2\frac{1}{10^2} + \cdots$$

のように書いて，1/10 を x に書き換えてみる．するとこれは Laurant 展開そのものであることがわかる．このようにべき級数と小数展開の類似性はみればわかるものである．ただし D には和の構造が入らないことに注意されたい．更に有限体上の多項式環に対応して $\overline{\boldsymbol{F}}_\infty[[x]]$ が定義される．$\overline{\boldsymbol{F}}_\infty$ は 位数2の有限「放射」$\boldsymbol{F}_\infty$ の「代数閉体」に相当する．$\overline{\boldsymbol{F}}_\infty[[x]]$ の要素は $e^{i\theta}x^k$ とかける（θ は実数，k は自然数）．足し算はなくすべての要素は単項の形になる．$\boldsymbol{F}_\infty$ と $\overline{\boldsymbol{F}}_\infty$ での $\triangle$ は

$$a\triangle b=\begin{cases}0 & (a\ne b\text{ のとき})\\ a & (a=b\text{ のとき})\end{cases}$$

で定義される．そして直観的には

$$\boldsymbol{C}\{x\}=D\text{ の「商体」}\otimes\overline{\boldsymbol{F}}_\infty[[x]]$$

となることは自明だがこれを正当化するには「放射」のカテゴリーでテンソル $\otimes$ を定義する必要がある．しかしそれはテンソルの定義に戻れば容易にできるので省略しよう．我々の目的は何かの一般論を建設することではないのだから．

■　D の「イデアル」をみよう．$\{a\in\boldsymbol{C}\mid |a|<1\}$ が極大イデアルに対応することは見やすい．一方で演算だけを考えるなら $r<1$ として

$$D_r=\{a\in\boldsymbol{C}\mid |a|\le r\}$$

も

$$U_r=\{a\in\boldsymbol{C}\mid |a|<r\}$$

もイデアルの候補になりうる．しかし D_r と U_r はともに準同型とは親和性がない．一番構造の簡明な D においてすら「素イデアル」は重要ではなく，極大イデアルが重要ということになる．ここにスキーム理論が無限附値と相性の悪い原因のひとつがある．

5.3

■　以上を踏まえてどう「数」というものを考えたらよいだろうか．ここに一つのヒントがある．Riemann 球面（$\boldsymbol{C}$ に無限遠を加えたもの）はコンパクトである．しかしよくよく見るとまだ「完備」ではない部分があることがわかる．ということは完備化の余地が残されているということでもある．代数的数 $2^{1/n}$ をとる．よく知られているように体の間の拡大次数 $[\boldsymbol{Q}(2^{1/n}):\boldsymbol{Q}]$ は n と等しい．通常 $2^{1/n}$ の収束する先は 1 と云われる．しかしこの言明は拡大次数の関係を反映したものではない．この意味で，等式 $1=\lim_{n\to\infty} 2^{1/n}$ は複素数の範囲では確かに正しいのであるが，必ずしも自動的に成立しうる等式とは云えないのである．私は p 進体ではこの等式が成り立たないことを念頭においているのではない．あくまで複素数（での距離概念）内のことである．「複素数の範囲」が絶対的に定まっているわけではない．これがポイントである．この事情は多項式でみるとよいかもしれない．実数 $2^{1/n}$ は方程式 $X^n-2=0$ の解となる．だから我々が求めているものは「極限」$\lim_{n\to\infty}(X^n-2)$ と云ってもよい．これを解決する前に先の三位一体説の障害となっている事実に触れよう．後に私はこれも同時に解決するつもりだ．

■　従来のテンソル積は有理整数環 $\boldsymbol{Z}$ 上でのみ定義されていた．しかしそれでは $\boldsymbol{Z}$ と $\boldsymbol{Z}$ のテンソル積は $\boldsymbol{Z}$ になってしまう．$\boldsymbol{Z}$ は 1 次元にもかかわらずテンソル積も 1 次元になる．テンソル積は相対的なのである．整数環と多項式環を同列に扱うためには 1 次元と 1 次元のテンソル積が 2 次元となるような（絶対）テンソル積が必要となる．しかも従来のテンソルとの整合性にも配慮がなされなければならない．さもないと別世界の事物を構成するだけになってしまう．

6　自然数 $\sharp$

6.1

■　上述のような困難を打開するために数学の証明なるものを突き詰めて考えてみる必要がある．我々の目的のためにはどんな証明を採り上げてもよいであるが，まず「素数が無限個あること」をとりあげる．この証明はつぎのようになされる．

p_1 から p_n を素数とする．このとき，$p_1 \ldots p_n + 1$ を考える．1 はどの素数でも割り切れないから，この素因数のひとつを q と書けば q はどの素数とも異なる．こうして新しい素数が出来た．したがって素数は無限個あることになる．証明終わり．

ここで証明されていることを注意深くみよう．虚心坦懐に証明をながめれば，証明されているのは素数の個数は n ではないことだと知る．このことから直ちに素数の個数が無限ということが帰結されるだろうか．無限であることと n とは書けないことは同値だろうか．もちろん同じとされている事実は認めている．その上で文字 n とか m とか（のもつ意味）を再考しようというのである．ここでは公理的数学とか論理形式による数学とかを想定しないで頂きたい．一部の哲学にみられるようなほとんど言いがかりにしかみえない文句を云っているわけではない．n は 1，2，3・・・のどれかであると云われる．しかしどれでもない．にもかかわらず自然数である．普通数学では変数などと呼ばれて自然数とは区別されるがそれはここでは問題ではない．もし本当に n が自然数と無関係であったら，$n+1$ のような素朴な操作も何を意味するか定かではなくなるから．だからあらたな「自然数」が導入される余地が生ずる．

■　次に「$\sqrt{2}$ が無理数であることの証明」を議論しよう．

$\sqrt{2} = a/b$ と書けるとすると $2b^2 - a^2 = 0$ となる．そこで，$2b^2 - a^2 \neq 0$ を帰納法で証明する．まず $2b^2$ は偶数だから，a が奇数ならば問題ない．a が偶数，b が奇数ならば，帰納法により

$$2b^2 - a^2 = 2\left(b^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right)^2\right) \neq 0$$

となる．最後に，a も b も偶数のときも，帰納法により，

$$2b^2 - a^2 = 4\left(2\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right) \neq 0$$

を得る．

いかにも $\sqrt{2}$ が無理数であることを証明しているようにみえる．ところが実際証明しているのは $\sqrt{2}$ が a/b と書けたとすると矛盾することである．それだけだ．a/b ではなく c/d と書ける可能性はないのか．もちろんない．しかしそれを保証しているのは a を c で置き換え b を d で置き換えても同じ推論が可能であるという前提である．注意してほしいのは私は数学でよく使われれるたぐいの議論に対して哲学的に懐疑しているわけではないことである．数学においてこの「a」とその「a」は同じか違うかという話を入れると収拾がつ

かなくなる．そんなことをしたら引用文献中の「a」についても同じか違うかを決定しなければならないのであるから．私が議論しているのはそれとは別次元の話である．

6.2

■　私は n とか m とか書けない自然数 $\sharp$ を導入する．これはいままでの数学の形式系にはないものである．自然数の超準モデルに出てくるような超自然数ではない．逆にある意味では構成的自然数（標準モデル）にも出てくる．その一方で n と書けない数である．したがって n とはステータスが異なるのであるから，1，n と $\sharp$ の関係が問題となる．関係を明白にするために自然数を空集合から加算によって作る構成と全体から分割によってつくる構成を考える．前者は小学校以来だれにとっても既知のものだと思われる．後者を少し説明しよう．前提として全体を与える．それから全体の半分，その半分すなわち全体の 1/4，3/4 等々を作っていく．1 から全体に到達しないのと同様全体から 1 にも到達しない．だから $\sharp$ からはじめると 1 はりんご一個の 1，人間一人の 1，一万円の 1 という実質的意味は失われある種の形式的意味のみを持つことになる．

■補足．　$\sharp$ の説明を補足する意味で，文字 n を議論する．数列

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots,\quad n-2,\quad n-1,\quad n$$

を考える．1 から数えていくとして「いつ n に到達するか」．当然 n 回目なのであるがこの答えは文字を使っているので当面考えない．100 か 1000 か．ひとつの答えは「いつまでたっても到達しない」である．n は 100 でも 1000 でもなく有限の数を代表しているのだから．逆に「答えは 100」と言い切ってもよい．要するに $n = 100$ としているだけだ．ただそのときは $n = 1000$ ではありえない．一方 $n = 1000$ のときは $n = 100$ ではない．だから n は「100 でも 1000 でもなく」逆に「100 でもあり 1000 でもある」ということになっている．上の数列を n から数えてみよう．

$$n,\quad n-1,\quad n-2,\quad n-3,\quad \ldots$$

と続く．数だけを考えるならば永久に 1 に到達しない．しかし $n-(n-1)=1$ と書ける．だから n 自体には数そのものは陽に現れない．n にはある種の「無限」が含意されていることになる．$\sharp$ の議論はこれと似たことをやっているものと云える．

■　0 と 1 の間の有理数全体の集合を J で表す．$\sharp$ はここでの 1 に対応し J の要素が自然射に対応する．集合論によらずに，J を構成する手順を紹介する．難しいことは何もないので詳細は略す．集合が { } を取る操作をもとに順次構成されるように，J は $\sharp$ と [ ]

を取る操作で構成される．まず，[全体] $=1$ が疑似的全体で，$[\sharp]$ が $(1/2)\sharp$ となる．また $[a,a]=a$ が成立する．$[\sharp,[\sharp]]=(3/4)\sharp$，$[[\sharp]]=(1/4)\sharp$ などとなる．以下同様である．重要なことは，1/2 が 2 の逆数として定義されるのではなく 2 と無関係に 1/2 があるところである．これをもとに数学を展開することも出来るが，簡単のため，本稿では基本的に集合論から構成された J を考える．しかし $\sharp$ は集合論の外側に構成されなければ集合論が展開されている体系の制約を受けてしまい $\sharp$ の定義と矛盾してしまう．だから自然数を構成した集合論とは別の集合論の「コピー」を考えなければならない．

■ 自然射の直観的なイメージを説明しておく．自然数は 1 から附加によって作られたが，J は把握することが出来ない「全体」からの分割で得られる．これを説明しよう．すべてを含む全体があったとして，それを「全体」と書き込んでしまうと，何を仮定しようが，それは全体とはならない．「全体」と書き込んだことが含まれていないからである．だから「全体」が全体ではないということは，「全体」のなかに全体のなかの「全体」に対応するものがあることになる．全体を 1 と書けば，1/2 があることになる．だから 1/2 は数というよりは半分にするという分割を意味する．1/4 は 2 分割の「最初」のブロックの 2 分割を意味する．

■ 当初，$\sharp$ と書くことと文字 $\sharp$ の分離は考慮さえされない．しかし，$[\sharp]$ と書くことは，$\sharp$ を文字と見ることを前提としてのみ可能である．$\sharp$ を文字の $\sharp$ と見ることはすでに $\sharp$ を書くことと $\sharp$ を分離している．分離によって $\sharp$ を書くことと文字 $\sharp$ が並列的に記述される．これによって分離を明言する形になり，逆に $\sharp$ を書くという操作と $\sharp$ の同一視がなされてしまう．その場合，$[\sharp]$ $(=(1/2)\sharp)$ は何も意味しない．しかし，ここで $(1/2)\sharp$ と書いてしまうことが，事態を変化させる．$\sharp$ と書くこと，文字 $\sharp$，$(1/2)\sharp$ と書くこと，文字 $(1/2)\sharp$ の分離非分離が同様に繰り返される．結果，$\sharp=(1/2)\sharp$ ともなる．$\sharp$ と $(1/2)\sharp$ の非分離から $[[\sharp]]=(1/4)\sharp$ が出現し，$\sharp$ と $(1/2)\sharp$ の分離から $[\sharp,[\sharp]]=(3/4)\sharp$ が出現する．以下同様である．一般に，公理によって $(1/2^n)\sharp$ と $\sharp$ は異なることが保証されている．しかし，$(1/2^n)\sharp$ と $\sharp$ が異なる事を証明することが逆に $(1/2^n)\sharp=\sharp$ を導く．このときには $(1/2^{n-1})\sharp$ が疑似的全体となる．$(1/2^{n-1})\sharp=\sharp$ となる場合，$2^{n-1}=1$ のような等式が得られることになる．したがって自然射はある $\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z}$ に対応するので，新しいものが出るわけではない．

■ 自然数同様，[ ] を取る操作（1/2 を取る操作）は無限に繰り返せる．もし $(1/2^n)\sharp=(1/2^{n+1})\sharp$ ならば，適当な議論の後に $\sharp=(1/2)\sharp$ を得る．これで矛盾となる．ところが，この議論自体が文字 n では書けない「最後」の操作 $1/2^\sharp$ を作り出してしまっている．だから，自然射も「無限」にあるが，それは 2^n 分割ではないが $2^\sharp$ 分割という有限であるこ

とを意味する．誤解を恐れず言えば，無限は別の形式での有限を意味しているのである．構成を図示すると，

$$
\begin{tikzcd}
 & & (\text{全体}) \arrow[d] & \\
 & & \sharp \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & \frac{1}{2}\sharp \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & & \sharp \arrow[dl] \arrow[d] \\
 \frac{1}{4}\sharp & \frac{1}{2}\sharp & \frac{3}{4}\sharp & \sharp \\
 & \vdots & &
\end{tikzcd}
$$

のようになる．

■　ここでは，1/2 だけを考えたが，1/3，1/5 でも同様の議論が出来ることは明らかだろう．1/2 は中点を取る操作の抽象化で 1/3 は $(a+b+c)/3$ を考えることに対応する．これらは自然数と同等の重要さを持つ概念である．標数 2 の素体 $\boldsymbol{F}_2$ と 1/2 は同時に考えることは出来ず，標数 3 の素体 $\boldsymbol{F}_3$ と 1/3 も同時に考えることができない．多様体の開被覆に例えれば，自然数と自然射は一つの座標には収まらないということだ．

■　$\sharp$ の構成は多様体としての円の開被覆と類似している．円全体から北極を除いただけの開集合と南極だけを除いたそれで円は被覆される．南極が 0 なら北極は無限遠である．北極は「想像の産物」となる．にもかかわらず，二つの開集合は，変換 $x=(1/x)$ によって互いに移りあう．0 と $\sharp$ の関係はこれと同じではないものの似ている．

6.3

■　あなたは $\sharp$ についての議論がおかしいと思ったかもしれない．何をやっているかわからないかもしれない．そこで $\sharp$ をもう少し議論する前に想定されるあなたの疑問に答えておきたい．ある意味で両極端の疑問を挙げている．あなたの疑問は徹底した議論の後にはつぎのどちらかになるはずである．

- n とか m の記号操作が数学であるから $\sharp$ は存在しない．
  反論．数学的実在と無関係に数学が行われるわけではない．純粋に記号操作のみで数学が展開できるかどうかは問題ではない．実際に数学は記号操作ではない．ただそれだけのことである．
- 数学的実在には $\sharp$ は存在しない．

反論．我々は数学的実在に直接アプローチできるわけではない．したがって$\sharp$のような「数」が実在するかどうかは問題にならない．有効かどうかも問題にならない．私がただ使っているだけである．

因みに前者は規約主義からの批判で後者は自然主義からの批判と想定されている．数学は記号操作（ゲーム）でもなく数学的実在の探求でもない．したがって定理は発明されるのでもなければ発見されるのでもない．このあたりを了解することは思うほど簡単ではない．数学者は（人知れず）数学の基礎付けをそれぞれ個人で考えているのだが，基盤として言語を設定する限り規約主義か自然主義のどちらかに陥ってしまう．超実数と$\sharp$の関係をみながら例示してみたい．Robinson などの超準解析にみられるように実数とはべつに超実数を構成するのが実数を自然主義的にみる立場である．この立場では実数は変更を受けない．もちろんこの立場が実数を数学的実在としているわけではない．「実数は変更されない」という意味で結果として実数が実在する形になっているだけである．逆に Nelson などのように超実数も実数となるように集合論を改変する立場や構成的に数学を再構成する立場が規約主義的である．この場合実数そのものの定義が変更される．こちらの場合も規約主義が先にあるわけではない．結果として実数の定義も変更できることになっているだけである．我々の$\sharp$はどちらでもない．実数は従来の実数がそのまま使われるにもかかわらず実数が確実に変化する．そのような試みなのである．

■　さて$\sharp$に戻る．1 から 2^n までの数を考える．それらの数は加算とも分割とも対応する．1 が $(1/2^n)\sharp$ に対応する．しかしこの対応は 2^n+1 によって崩れる．言い換えれば$\sharp$は 2^{n+1} へと移動する．すると加算による方も 2^n+1 では足りず 2^{n+1} まで行く．これが続く．これを一般化して$\sharp$という記号を与えるのである．分割による自然射は

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & (\text{全体}) & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & 2^k & & \\
 & & & \swarrow & & \searrow & \\
 & & \frac{1}{2}2^k & & & & 2^k \\
 & \swarrow & \downarrow & \searrow & & \swarrow & \downarrow \\
\frac{1}{4}2^k & & \frac{1}{2}2^k & & \frac{3}{4}2^k & & 2^k \\
 & & & \vdots & & &
\end{array}
$$

というようになり，加算による自然数は

$$(\text{空}),\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots,\quad 2^k$$

という具合になる．ここで「空」については無視してよい．すべてを含むと想定されている「全体」に対して何もないというような意味で記号「空」が使われている．したがって空集合とは気持ちとしては一致して形式としては異なる．これは1からはじめたが，$\sharp$からはじめることも可能である．要は議論を反転させるわけだが．分割は

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \text{(全体)} & & & \\
 & & & \downarrow & & & \\
 & & & \sharp & & & \\
 & & \swarrow & & \searrow & & \\
 & \frac{1}{2}\sharp & & & & & \sharp \\
\swarrow & \downarrow & \searrow & & & \swarrow & \downarrow \\
\frac{1}{4}\sharp & \frac{1}{2}\sharp & & \frac{3}{4}\sharp & & & \sharp \\
 & & & \vdots & & & \\
\frac{1}{2^k}\sharp & & & \cdots & & & \sharp
\end{array}
$$

となり，加算は

$$\sharp - 2^k, \quad \ldots, \quad \sharp - 2, \quad \sharp - 1, \quad \sharp$$

となる．この$\sharp$は自然数を使った添え字にも適用される．たとえば，べき級数では

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots + a_\sharp x^\sharp$$

と書ける．この表示は二つのものを同時に書いている点で多少曖昧であるが意味は明らかだろう． 非零の係数がnまでで止まって$\sharp$側の係数がすべて0となるのが多項式の展開であり，逆にa_1，a_2の方の係数がすべて0で$\sharp$側に非零の係数が出てくるのがC^∞関数の展開となる．ある意味で多項式とC^∞が双対となる．だからどうということはないが，何かの構造を示唆しているように思える．それはさておき，これによって多項式で書ける写像とC^∞関数を同時に扱えることになる．多項式による層（代数的層）とC^∞関数を基礎にした層では様子が異なる．代数的層の中では拡張できないものもC^∞のカテゴリーでは拡張できたりする．それらが繋がるということは多項式とC^∞の間を自由に行き来できることを意味する．コホモロジーが無効になるような新しい多様体の考え方を導入していると云ってもよい．

6.4

■　これまでの議論をみると自然数全体（通常$\boldsymbol{N}$と書かれる）は$\sharp$の外側にあるように見えるかもしれない．だが自然数全体は記号$\boldsymbol{N}$と書かれる限りにおいてある意味で$\sharp$の内側になってしまう．これをつぎにみよう．

- 数列からはじめる．数列 $a_n = (1/n)$ は収束し $b_n = n$ は発散し $c_n = (-1)^n$ は振動するという風にいわれる．これらの極限を $\natural$ からみる．それぞれ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\natural}, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \natural, \quad \lim_{n\to\infty} c_n = (-1)^{\natural}$$

となる．普通の意味とは異なるがどれも「収束」する先が保証される．後の二者では極限が普通の数として実現されないのはよく知られているが，このようにみれば最初の数列の極限も零になるかどうかはわからない．むしろ $(1/\natural) = 0$ とすることによって極限は零であるという言明が可能になっているのである．

- 解析接続をみよう．たとえば

$$\frac{1-x^{\natural+1}}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^{\natural} = \frac{1}{1-x}$$

を考える．我々は中央の式からはじめて n での和を書いてその後 n を無限大にするという操作を行う．最初の等号はその操作を一般化して更に $\natural$ を代入したものであって，それ以上でもそれ以下でもない．したがって通常の等号とは意味合いが異なる．二番目の等号は普通の意味の等号である．さてここで $\natural + 1$ が出現してしまったことに注意してほしい．これは $\natural$ の定義によれば存在しないものである．存在しないとはいうものの $\natural + 1$ と書くことを妨げることは誰にもできない．しかし $\natural + 1$ を考えるからには自然数とは両立しない．いわば空中に存在するものになる．いや，だからこそ，$x^{\natural+1} = 0$ とすることが可能となる．ここで右辺の 0 は通常の自然数をもとに作られる「普通の」零である．たとえば $2^{\natural+1}$ は発散（あるいは ∞）としてもよいし，零としてもよい．実際 2 進整数環では $\lim_{n\to\infty} 2^n = 0$ である．逆にこの極限を零とするという行為が 2 進整数を作り出すといってもよい．

- Banach と Tarski のパラドクスも同様である．Banach と Tarski のパラドクスとは，半径 1 の球をうまく C_1，$C_2, \ldots$，C_n と分割して，それら C_i を（回転と平行移動だけを使って）適当に並べ替えると半径 1 の球を 2 個作れる，という普通の人にとっては著しく直観に反する事実である．なにしろ分割によって体積が変化するのだから．ポイントは C_i が非可測集合になることである．非可測集合を得るには非可算選択公理が必要である．だから非可算選択公理が使われていることになる．可算選択公理があれば実数そのものは作れるので非可算選択公理を使うというのはある意味で「実数」からはみ出すことになる．$\natural_i$ で C_i の体積を表すと全体の体積は $\natural_1 + \cdots + \natural_n$ となって体系から出てしまう．足し算することはできないものとして $\natural$ が導入されているのだから和は存在しないはずのものだ．したがって，$\natural_1 + \cdots + \natural_n = 1$ でもよいし，$\natural_1 + \cdots + \natural_n = 2$ でもよいことになる．体積の等し

い場合の問題は残る．等しい体積をもつ二つの図形が分割によってうつりあう条件とは何か．

注意．実数体が構成される以前に$\sharp$が導入されるならこのパラドクスは起きない．ここでは議論の途中で$\natural$を導入している．

- $\lim_{n\to\infty} a_n = c$ならば$\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)/n = c$が成り立つという命題がある．いわゆる$\varepsilon$-$\delta$論法が有効な例として知られている．これも$\sharp$でみると簡単になる．$\sharp$からすると命題の証明では$\lim_{n\to\infty} a_n = c$が

$$
\begin{aligned}
&a_\sharp = c\\
&a_\sharp = a_{\frac{1}{2}\sharp} = c\\
&a_\sharp = a_{\frac{1}{2}\sharp} = a_{\frac{1}{4}\sharp} = a_{\frac{3}{4}\sharp} = c\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

を意味するとしていることになる．そしてこれを仮定すれば問題となっている極限はnで書ける有限部分を無視して同じものの和をとって個数で割るだけのことになる．したがって命題は直ちにしたがう．

こうしてみると論理的には何の制約もうけないはずの極限が根拠なく指定されていて，また，根拠がないからこそ指定が可能であった．そういった状況になっている．少なくとも私はそう思うのだがどうだろうか．

6.5

■　ここで想定される素朴な疑問を採り上げておこう．$\sharp$を使った数学が従来の数学と齟齬をきたすことはないのか．$\sharp$を使って証明された「事実」と通常の文字を使って証明された「事実」が異なることはないのか．これはありうる．しかしそれは「角の三等分ができるか」という問題と同じである．実際にやってみれば誤差にまぎれて角の三等分は可能である．できないことの証明はあくまで理想的状況を前提とした議論なのである．実際の三等分は近似に過ぎないと云われるのである．誤解を恐れずいえば，$\sharp$によって現在の数学を実践の位置に変容させているわけである．だからこそ現在の数学の証明をスキップして結論を得ることも可能となる．このことはEuclid幾何と解析幾何の関係を思い浮かべれば納得しやすいのではないか．解析幾何では補助線も引かず文字の操作だけでEuclid幾何の問題を解くことが可能といわれるが実際にやってみると近似解ができるだけの場合も多い．ある角度の正弦を厳密に求めることは難しいことも多い．答えが70度として解析幾何だけではある方程式を解く必要が生じ厳密な答えが得られない場合もあるだろう．も

ちろん 70 度がその方程式を満たすことは証明されるだろうことは想像できるがそれはここでは問題ではない.

■ 自然数 $\sharp$ の使用により実数も変わってくる. 実数は有理数の極限として定義されるのだが, $\sharp$ の導入により有理数全体（加算による）の集合と有理数の類似物全体（分割による）の集合のはりあわせによって実数が再構成される. これは一見奇妙である. 実数は有理数に比して圧倒的に多く存在することになっているから. こういうとき濃度が違うという言い方をする. もちろん有理数よりも実数の方が多い. はるかに多いかというとはるかに多いかもしれないが, 検証するのは不可能に近いというのが Skolem のパラドクスの教えるところである. Skolem のパラドクスとは, 粗っぽく云えば, どう公理が与えられてもそれらを満たす実数のモデルで「可算集合」になってしまうものがある, というものである. もちろんここでの「可算」は系の外部からみたときの話であるから Skolem のパラドクスは本当のパラドクスではない. だから実数が有理数よりもどれだけ多いかは我々の議論に影響しない. ではあるが有限数を考えると事情が異なるようにみえる. n 個の要素からなる集合の要素の個数 n（当然）とそのべき集合の要素の個数 2^n を比べると後者が圧倒的に大きい感じがする. 感じがするという言い方はマイルドに過ぎる. 大きいのは正に事実であると主張する人もいるだろう. 本当に 2^n は n よりも大きいのか. この問いは自己言及と関係している. 自己言及を考えるとき対象 D と D から D への写像全体 $\mathrm{Map}(D, D)$ の同型が必要となる. ということはこれは普通の数学では表現しきれない. 複雑系が数学に投げかける問題のひとつがここにある.

■ とにかく $\sharp$ の導入により 1 と -1 が交互に現れる

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots$$

のような数列も従来の極限の範疇からはずれるものの収束する先

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots + (-1)^{\sharp}$$

が保証される. $(-1)^{\sharp}$ は 1 か -1 のどちらかであるが, $\sharp$ は文字ではないのだから, $(-1)^{\sharp}$ は 1 か -1 のどちらかであるという事実から $(-1)^{\sharp} = 1$ か $(-1)^{\sharp} = -1$ のどちらかが成立することを仮定するのは無意味である. ここは注意を要するところかもしれない. $(-1)^{\sharp} = 1$ と $(-1)^{\sharp} = -1$ が両立しないのは見やすいのだが, $(-1)^{\sharp} = 1$ としても $(-1)^{\sharp} = -1$ としても矛盾が得られるからといってもそれだけからは何も帰結しない. 事実, 最終項 $(-1)^{\sharp}$ をみれば, 括弧の付け方を変えた

$$(1 + (-1)) + (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \cdots$$

と

$$1+((-1)+1)+((-1)+1)+((-1)+1)+\cdots$$

とでは異なる数列の和となっていることがわかる．$\sharp$ のところで項がひとつずれる．異なるものの和が異なっても不思議ではない．この議論だけで収束しないと云われる数列に関して直ちにすべてが解決するわけではないが「この数列は収束するかしないか」といった心理的圧迫は少なくとも軽減される．これは数学を研究する上で大きなことではないかと思う．存在するかしないかに神経を使わず収束する先を前提にできるから．

7 更に自然数

7.1

■ $\boldsymbol{Z}$ のカテゴリーでは，普通は定数である整数などが変数となる．たとえば，$\boldsymbol{Z}[x]$ は 2 変数もつことになる．x 方向のほかに隠れた方向があって，局所的には $\boldsymbol{Z}[x]$ は x 方向の $\boldsymbol{F}_p[x]$ と隠れた方向の $\boldsymbol{Z}_p$ に分解する．逆に言えば，真に 1 変数の $\boldsymbol{F}_p[x]$ と $\boldsymbol{Z}_p$ のテンソル積（のようなもの）が $\boldsymbol{Z}[x]$ となる（ここで，$\boldsymbol{F}_p$ は位数 p の有限体，$\boldsymbol{Z}_p$ は p 進体であるが，これらが初めて聞くことばであれば，ブラックボックスと思ってよい）．たとえば，$y=2x$ は線型ではなくなり双曲的となる．感覚的には 2 は代数関数ではなく解析関数に近い．実際 $2x$ は非常に難しい関数となる．

■ 自然数全体 $\boldsymbol{N}$ は集合であるが，上の意味では関数であり，いわば「コト」に対応する．それに対応する空間「モノ」をつくるには，スペックを書き加えればよい（この「コト」と「モノ」は反変関手（contravariant functor）でつながっている）．$\mathrm{Spec}(\boldsymbol{N})$ は素数全体と $\{0\}$ からなる．これについては既に述べた．これは開いている空間であった．そこでより考えやすい空間をつくるべく，無限遠点を付け加える $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{N})$ の無限遠点上の「関数」全体は，$[-1,1]$ という区間になった（この区間については足し算で閉じていないという技術的な問題があった）．じつは，この無限遠点上に普通の実数の世界がある．だから，無限遠はあとで付け加えたという意味で代数幾何的には実世界の方が人工的と言える．

例．代数学では 1 と $0.999\ldots$ はまったく異なるものである．実数としては等しいと定義しているだけだ．実際，$\mathrm{Spec}(\boldsymbol{N})$ の関数としてみれば，数列 $\sum_{k=1}^{n}(9/10^k)$ は 2 と 5 では発散，3 ではゼロをとり，それ以外の素数では有限範囲で振動している．1 はどこでも不変の 1 である．だから，逆の言い方をすれば，$1\neq 0.999\ldots$ という事実が $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{N})$ をうみだすとも言える．$\mathrm{Spec}(\boldsymbol{N})$ を含むような理論，通常，数論的多様体の理論と呼ばれるもの

はいくつか構成されて成果もあがっているが，無限遠がいろいろな面で他と大きく異なりどこか「木に竹をついだ感じ」をぬぐえない．

■ いうまでもなく自然数には 0 がない．普通はなにがしかの「人工的」操作を行い 0 を導入する．しかし $\sharp$ の導入により，最大の素数 $p_\sharp$ が 0（に対応すること）になる．ここで最大の素数は $\sharp$ ではない．$\sharp$ は $p_\sharp$ も含めた素数（のべき）の積となる．$\mathrm{Spec}(\boldsymbol{N})$ の 0 は $p_\sharp$ に対応し，$\boldsymbol{N}$ の 0 は $\sharp$ が対応する．記号 $p_\sharp$ における $\sharp$ と自然数 $\sharp$ は一致する場合も一致しない場合もある．さて $\boldsymbol{N}/(p_\sharp)$ は通常議論されている有理数をすべて含む．1，2 はいうに及ばず n/m とか a/b とかすべて入ってしまう．これで空間のなかでの 0（生成点などと呼ばれるもの）が特別なものではなくなる．0 も通常の有理数を含んでしまうにもかかわらず極大イデアルとして実現されてしまう．このことは Weil 流の代数幾何学と Grothendieck のそれを統一的に扱えることを示唆している．この事実は次の点で重要である．自然射サイドではイデアルは有効ではなく準同型を扱う必要があると先に述べた．このとき（極大イデアルに対応する）閉点ではない一般点をどうみるかが問題となる．しかし上のように考えると閉点だけをみればよい．だから問題は解消される．それに加えて，代数多様体（一般点も考える）と複素多様体（閉点だけを考える）も同列に取り扱うことが可能となる．もはや代数多様体と複素多様体の違いで苦労することはない．

■ $\sharp$ から構成すると自然数は形式的意味しかもたないというのはあまりに日常の直観に反しているのでわかりにくいかもしれない．そこでもう少し従来の自然数と $\sharp$ の関係を議論しよう．定義により $\sharp$ からの数の構成には $+1$ は存在しない．もちろん $\sharp + 1$ と書くことは可能である．しかしその場合，1 からはじまる自然数は無意味となる．むしろ $\sharp$ 側に新たないわば自然数その二とも呼ぶべき対象ができる．この議論を逆転させると，自然数には「2 で割ること」は存在しないことになる．だから 1/2 と書くことは $\sharp$ を消滅させる．こうしてみると日常何の困難もなく使っている 1/2 は数を超越した存在だったとさえいえる．ここでは 1/2 を $\sharp$ 側からみた「超越的存在」としている．したがって，逆にいえば，$(1/2) = 5$ でもよいし $(1/2) = 11$ でもよいことになる．この二者が両立しないことはいうまでもない．この操作は文字 n に 5 や 11 を代入したのと何ら変わらないのであるから，5 でも 11 でもよいが 5 かつ 11 ではない．

■ 一旦，1/2 を自然数と独立に作っておき後で自然数と接続させる．どの自然数に対応させるかで多種多様な系が再構築されることになる．それらは従来天下り的に導入されたものである．負の数も上の 0 と同様に再構築される．再構築といっても零がとんでもない何かになるわけでもない．しかし 0 のもつ意味は確実に変化する．

■ 自然数$\sharp$の導入は新しい有限を作り出すといってもよいし新しい無限を作り出すといってもよい．それは純粋に言葉の問題であるから．どちらにしても我々を煩わしていた幻想としての無限を再考することが肝要である．しかしながら無限だけを問題にしているわけではない．いわば議論の道具として無限が採用されているに過ぎない．

7.2

■ 自然数と素数の関係を議論しよう．まず加算による自然数の構成から考えよう．通常の構成法がこれである．この場合素数は積に関係する性質で規定される．和が所与でそこから積が作られるという構成になっている．したがってある数が素数かどうかを判定することはきわめて困難な作業となる．一方素数をもとに素因数分解で自然数を定義することが考えられる． 6 は 1 を 6 回足したものと捉えるのではなく，二つの素数の積 $2\cdot 3$ と捉えるのである．ここで 2 とか 3 には特別な意味はなく，ただたんにある素数を表す表象である．素数をもとに自然数に次のようにして順序を入れる．まずすべての素数を

$$p_1(=2), p_2(=3), p_3(=5), p_4(=7), p_5(=11), p_6(=13), \dots$$

と列挙する．次に重複度を込めた素因数の数の大きい方が「大きい」とする．$p_{i_1}\dots p_{i_k}$ と $p_{j_1}\dots p_{j_k}$ のように素因数の数が等しい場合，

$$i_1+\cdots+i_k < j_1+\cdots+j_k$$

のとき $p_{i_1}\dots p_{i_k}$ よりも $p_{j_1}\dots p_{j_k}$ が大きいとする．素因数の数が等しくさらに

$$i_1+\cdots+i_k = j_1+\cdots+j_k$$

ならば素因数の添え字を小さい方から並べて辞書式順序を入れる．この場合，素数の判定は簡単だが操作 $+1$ は難しい．たとえば，$2\cdot 7^3+1$ の因数分解は自明ではない．表にまとめると

自然数	素数
関数概念	空間概念
$+1$ で定義	因数分解で定義
$10033+1=10034$	${p_5}^2{p_6}^3$ の次の数は ${p_1}^4p_{25}$
10033 の因数分解は何か	$11^2 13^3+1$ は何か

となろうか．これをみると，数学のあらゆる分野でそうであるように，関数と空間は互いに双対になっている．卵が先か鶏が先かの議論と同様でどちらが先でもおかしくない．し

たがって素数からつくる自然数があっても不思議ではないことがわかる．ここでの素数は空間概念としてのものであって自然数としてのなにかではない．もっと一般的に両者の「相互作用」でつくる自然数が考えられる．素数サヴァンの頭のなかにある「素数」も両者が混然となっているような気がする．もっとも数学での相互作用が何を意味するか自明ではないが．さきほどの例をみよう．100までの素数を覚えていて素因数分解にある程度なれていれば10033から10137までの数の中で素数になるものを見つけるのにさほど時間はかからないかもしれない．さて複素数体上の1変数多項式環（関数環としての）と複素数体（空間としての）は完全に対応している．極大イデアルをとることで関数から空間が作られ，重複度を込めて複素数体の点を考えることで関数ができる．どの点にどれだけの重複度で0をもつかで関数が本質的に決まってしまうことに注意しよう．このような対応が自然数と素数の間で可能だろうか．素数の空間をはじめは単なる無限集合として定義し，そこに何らかの構造を入れて自然数を作れるか．安直な方法はいくらでもあるが何か自明でない対象を作り出すことができるか．いままでの議論を踏まえると，$\sharp$からの自然数の構成が役に立つことも想像されるが実際どうなるかはわからない．今後の進展が楽しみなところである．

■　この節を終わるにあたって，$\boldsymbol{Z}$でのテンソルについて記す．$\sharp$の導入により整数環と多項式環の絶対テンソル積やp進整数環とq進整数環の（絶対）テンソル積が定義可能となるのである．ここではp進整数環$\boldsymbol{Z}_p$とq進整数環$\boldsymbol{Z}_q$のテンソル積を簡単に述べる．$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{Z}/p^n\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z}_p$であった．$\boldsymbol{Z}/p^n\boldsymbol{Z} \otimes \boldsymbol{Z}/q^m\boldsymbol{Z}$はすべて0にもかかわらず，$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{Z}/p^n\boldsymbol{Z} \otimes \lim_{m\to\infty} \boldsymbol{Z}/q^m\boldsymbol{Z}$は巨大な環になってしまう．$\sharp$を考えることでいわば二者の中間物を構成することができる．

$$\boldsymbol{Z}_p \otimes \boldsymbol{Z}_q = (\boldsymbol{Z} + p^\sharp \boldsymbol{Z}) \otimes (\boldsymbol{Z} + q^\sharp \boldsymbol{Z}) = \boldsymbol{Z} + \boldsymbol{Z}p^\sharp + \boldsymbol{Z}q^\sharp + \boldsymbol{Z}p^\sharp q^\sharp$$

となる．だから1次元剰余環として$\boldsymbol{Z}_p$と$\boldsymbol{Z}_q$だけを持つ環ができる．したがって，微分の方向は文字通り2方向しかないが，確かに2次元となる．極大イデアルはそのままでは存在しない．剰余環をとったとき，はじめて現れる．整数環と多項式環のテンソル積なども同様に構成される．

8　応用

■　$\sharp$を用いて数学を見直すと色々面白いことが出てくる．いくつかあげよう．

8.1 標数正での関数論

■ 前に実数は Spec($\boldsymbol{N}$) の無限遠での有理関数に対応すると述べた．そこでは，第一義的には区間 $[0,1]$ の要素が正則となる．まだ負数は考えていないことに注意されたい．このとき，正 n 角形とその内部が $[0,1]$ の n 次拡大に対応する．正 n 角形の頂点は 1 の n 乗根である．この正 n 角形は中点をとる演算と積をとる演算について閉じている．関数環は和で閉じているべきだという主張に固執するとすべての実数あるいはすべての複素数を関数と考えなければならない．そのため p 進体の代数閉体は無限次拡大なのに複素数体は実数体の 2 次拡大になるというずれが生ずる結果となる．ところで正 2 角形は区間 $[-1,1]$ である．この意味では整数全体は自然数全体の 2 次拡大とみた方がよいかもしれない．正則なものに限れば，p でも無限遠でも同じ扱いができるのである．この議論をもう一歩進めよう．

■ 複素数における複素共役

$$z \longrightarrow \overline{z}$$

と有限体における Frobenius 写像

$$a \longrightarrow a^{p^e}$$

の類似（あるいは対応）はよく知られている．ここでは複素平面の複素共役というよりは関数の複素共役を考えている．Frobenius 写像は写像としては単なる「べき」である．ここで 1 の N 乗根を頂点とする正 n 角形において共役を極座標表示を用いて

$$re^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}k} \longrightarrow r\left(e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}k}\right)^{N-1}$$

と書き直す．この写像自身も複素共役であるが我々は Frobenius 写像との類似を探るべく別表示を求めたのである．こうすると N を無限大に飛ばしたものが共役とみなせることがわかる．無限大を無限大としたままではこれ以上議論できない．ここで $\sharp$ を使おう．共役は

$$r\left(e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\sharp}k}\right)^{\sharp-1}$$

で Frobenius 写像は

$$a^{p^\sharp}$$

であるから対応は見やすくなった．

■ さて問題にしたいのは共役に関する演算である．たとえば 2 乗は

$$(\overline{z})^2 = r^2\left(\left(e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\sharp}k}\right)^{\sharp-1}\right)^2$$

と書ける．これは極限であることを引きずっていない．極限も複素共役には違いないし実際そう扱われる．そのこと自体には反対しない．私は極限に実体があってそれが必然的にこうなるというような議論を否定したのである．Frobenius 写像との対応があることを前提に Frobenius 写像から類推すると

$$r\left(\left(e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\sharp}k}\right)^{\sharp-1}\right)^2$$

もありうることになる．どれが「自然」かという議論は不毛かもしれないが，有限標数まで考慮すると後者がより自然とも云える．逆に

$$(\overline{z})^2 = r^2\left(\left(e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\sharp}k}\right)^{\sharp-1}\right)^2$$

とすることで，「べき」とは遊離された新しいものが出来て，それが「関数論」に繋がったとも云えるのである．私は歴史を論じているわけではない．客観的に数学の対象の間の結びつきを議論しているのである．

■ さて以上を踏まえて，どう見てもこちらは「べき」なのだが $a^{p^\sharp}$ も「べき」とは思わないことが可能である．「べき」ではないのだから多項式写像あるいは正則関数ではない．関数論における反正則関数に対応するものが出来たと云える．$a^{p^\sharp}$ は多項式とは独立に微分などを議論することが可能となる．$z^{p^\sharp}$ が「反正則」の方のパラメターになる．たとえば $d\,f^{p^\sharp}/d\,z^{p^\sharp}$ は $(d\,f/d\,z)^{p^\sharp}$ とできる．要するに標数正での関数論が構成できる基盤を作ることができたわけである．

8.2 線形計画法

■ 博士課程の学生である佐伯祐子と共同でやろうとしている線形計画法への応用を述べる．線形計画法には大ざっぱにいって，境界点法（単体法，十文字法など）と内点法（Karmarkar 法，双対内点法など）がある．現在は双対内点法全盛期と云えるだろう．それぞれの解法に特徴があるのだが，あえてまとめると，境界点法は真の解が得られるが収束速度が遅い．たとえば単体法では Klee と Minty の例が有名だが頂点をすべてたどる場合指数関数オーダーの計算量が要求される場合がある．だから宇宙の寿命を適当に定めると宇宙が終わっても計算が終了しない場合がある．しかし私はこれをもって「計算できない」とは決して云わない．それは無限に関わる多くの数学を否定することになるからだ．もちろん宇宙の寿命をたとえば 100 億年とした数学も否定しない．しかしそこには $10^{10^{10}}$ なる数は存在しないのだ．いや，どのような表示法であれ書けるのだから存在するという

かもしれない．こう書くと鋭いあなたに気づかれたかもしれない．数概念が個人個人に依存してしまうのである．そんな数学に私は興味がない．それはさておき，逆に双対内点法の場合，得られるのは近似解だが速度は圧倒的に速い．だから現状では内点法で解の近くに行き，そこで単体法を適用するのが最善というところだろう．

■　さて，佐伯（[6]）は両者の中間にあたる解法を構成した．詳細は省略するが，有効桁数を途中で変更しながら解に近づく解法である．計算量を減らすことが問題となる．そこで我々は $\sharp$ に相当する小さい数（有効桁数の範囲では 0 となるような小さい数）を導入して（有理数なのだが）$\sharp$ の演算は自由度をもつことを利用することを考えている．

8.3　附録

■　講演では触れなかったが，$\sharp$ の導入により層に関する議論がどう変化するかをみよう．これから「代数多様体の極小モデル予想」を議論する．というわけで，多様体に関する知識を前提とする．そのような予備知識のない方は，全体の議論の理解を助けるものの理解に必要ではないので，この段落を飛ばせばよい．

■　層をほとんど使わず極小モデル予想に接近する方法を述べる．ここで述べることは予想を証明するための粗いスケッチと思って頂ければよい．簡単のためすべて複素数体上で考える．

1. n 次元非特異射影代数多様体 V をとる．V の標準因子（canonical divisor）$K(V)$ と豊富因子（ample divisor）H を考える．このとき，
$$a = \inf\{\varepsilon | K(V) + \varepsilon H \text{ ネフ（nef，数値的に非負の意)}\}$$
とする．$\Gamma = K(V) + aH$ とする．もし a が負ならば $K(V)$ が豊富となり終わり．a が 0 ならば $K(V)$ がネフなのでひとまず置く．
2. a が正のとき，$\Gamma^{\perp}$ に入る $\overline{\mathrm{NE}}(V)$ の要素がある．$\overline{\mathrm{NE}}(V)$ は曲線のつくる錐（cone）である．$\sharp$ を導入するとこれは曲線で代表されることになる．
3. さらに Γ^n が正ならば $\Gamma^{\perp}$ に入る曲線全体は部分多様体となる．ここでも $\sharp$ の導入によってそれは既約因子としてよい．$\sharp$ により隠れた次元が現れるのである．4 次元の中の適当なノーマルバンドル（normal bundle）をもつ 2 次元射影平面 $\boldsymbol{P}^2$ が上の例である．$\sharp$ 方向に次元を作れて，$\boldsymbol{P}^2$ は $\boldsymbol{P}^2 \times \boldsymbol{P}^1$ となる．この場合，2 次変換により同様の多様体が普通に作れるがそれを問題としない．

4. 上の既約因子はコントラクション（contraction）できるが，♯により非特異多様体にコントラクションできるとしてよい．たとえば3次元の場合，非特異につぶれない $\boldsymbol{P}^2$ がある．そこには♯によってあぶり出される隠れた例外曲線もある．「よくみると」$\boldsymbol{P}^2$ ではなく $\boldsymbol{F}_1$ がみえてくる．$\boldsymbol{F}_1$ は Hirzebruch 曲面などと呼ばれる有理曲面のひとつである．ただひとつ例外曲線があってそれをコントラクションすると射影平面が得られる．
5. 上の議論を帰納的につかう．♯があれば無限に上のステップが繰り返されることはない．したがっていつかは，a が非正（この場合ひとまず終了）か Γ^n が 0 となる．ここで注意したいのは普通の多様体の意味では不可能なコントラクションを次々と強引に実行していることになるという点である．いわゆる フリップ（flip） は全く考慮する必要がない．以下混同がないと思われる場合 V の極小モデルなどを同じ記号 V で書くことにする．
6. Γ^n が 0 の場合を考える．利用するのは Γ を表す $(1,1)$ 形式である．♯によれば半正定値でしかも各点での固有値 0 の重複度（したがって非零の固有値の数）が一定としてよい．
7. これによって局所的にファイブレーション（fibration）ができるが，♯によってフォリエーション（foliation）が無限に巻き込む形にはなりえない．だからファイブレーションは全体で定義された写像へとひろがる．
8. ファイバー（fiber）F の反標準因子（$-K(F)$）は正である．このような場合 F は Fano 多様体などと呼ばれている．V と F の次元が異なる場合帰納的に V は Fano ファイブレーションをもつとしてよい．では $V=F$ のとき，すなわち，ファイブレーションが自明のときはどうか．適当に 2 次変換を繰り返すと通常の非特異多様体 $\tilde{V}$ を得る．$\tilde{V}$ には $K(\tilde{V})$ との交点数が負となる曲線が十分にある．このような場合 $\tilde{V}$ そして V には十分多数の射影直線が含まれることが知られている．これをコホモロジーを使わず証明できるかどうかはわからない．
9. さて $K(V)$ がネフの場合が残る．この場合も全体で定義された写像ができる．ファイバーは Ricci 平坦でコンパクトだから普遍被覆（universal covering）は $\boldsymbol{C}^k$ とコンパクト Ricci 平坦多様体の直積となる．問題となるのは $\boldsymbol{C}^k$ の方のラティス（lattice）が♯で書ける場合である．たとえばファイバーが

$$\boldsymbol{C}^k/(\boldsymbol{Z}\sharp_1+\cdots+\boldsymbol{Z}\sharp_{2k})$$

のようになっている場合を想定せよ．
10. この場合は有限ではラティスが出てこないので，$\boldsymbol{C}^k$ がそのまま V に入ることにな

る．これは単射的埋入（injective immersion）なのは確かである．

11. だから代数的に入るとしてよいか．これは，言い換えれば，「V は $\boldsymbol{C}$ のコンパクト化である射影直線で覆われるか」という問題になる．私にはよくわからない．もしこれがよければ $K(V)$ がネフという仮定に反する．したがって，ラティスが $\sharp$ で書けるという仮定が崩れる．だから通常の（$\sharp$ を使わない）ラティスが存在することになる．よってファイバーの標準因子は自明となり飯高ファイブレーションが構成できる．何度も繰り返すが V そのものは $\sharp$ を使っているので V 上のファイブレーションは通常のそれではない．実際のファイブレーションは V を普通の意味で 2 次変換を繰り返して得た多様体上にある．実際に多様体を構成しているのではないことに注意せよ．
12. これで極小モデル予想と豊富予想が同時に解けることになる．

この議論を聞いたあなたは有限と無限が混同されているという気持ちになったかもしれない．それは誤解である．混同しているのではなく新しい有限を挿入しているのである．ひとつ例を挙げておこう．$\boldsymbol{C}[x,y]$ の部分環

$$\boldsymbol{C}[xy, xy^2, \ldots, xy^i, \ldots]$$

は生成要素の個数を特定できない．しかし

$$\boldsymbol{C}[xy, xy^2, \ldots, xy^i, \ldots, xy^\sharp]$$

と書けるのである．

9 おわりに

■ 無限大，無限小や極限について手品のようにすべてがわかるわけではない．ではあるが，$\sharp$ の導入により収束先はつねに保証される．更に重要なのは我々の極限に関する議論そのものが有限の範疇で行われていたことを認識する契機を提供することである．有限といっても本当の有限ではなく無限を含意しつつ展開される有限である．しかし当然ながらわけのわからない無限に振り回される．それも否定しない．むしろより積極的に使用というのである．このあたりを理解すると本当はもっとも難しい対象である「真の有限」も射程に入ってくることになろう．

■ 私が構想する数学をどれだけ伝えることができたか，を考えるといささか心許無い．言い訳すれば，展開された（あるいは展開されようとしている）数学は記述と緊張関係に

ある．ここがわかりにくさの核心ではないかと思う．そのため通常の解説のようなものは一切役に立たない．いままでの数学でも記述との関係が微妙になった時期はある．それは主として理論の創生期に限られていた．そういったものとは異なる記述の外側に関する議論なのである．したがって，ある意味で，自分の実践（といっても行為を意味するわけではない）をもって理解を示す他ない．しかし，逃げても意味がないので，あえて要約すると，確立しているはずの過去の数学の「脱構築」を遂行しようとしているということになろうか．これはほとんどすべての数学者がありえないと思っていること，というか，想定外のことだろう．だから数学者がいままでの経験に基づいて私の話との接点を見いだそうとしても何も得られないと思う．このような言明は順調に進展してきた現在の数学を否定的に捉えるもののように聞こえる．否定的側面ばかりではないが，数学を全面的に肯定するものでもない．数学に反省を促すというと言い過ぎかもしれないが，数学研究の「自意識（のようなもの）」が必要となってきたと言える．とりわけ体系が整備されその基盤の上で仕事ができた二十世紀の数学者にとっては厳しい試練かもしれない．現在のような数学のスタイルが確立して高々百年だが，人間一人のスケールでみるとそれは永遠にも等しいものである．子供の頃から存在するものはずっと以前から存在してきたように思えるのは無理からぬところである．だからこそ現在のやり方が過去から延々と続いてきたように錯覚してしまう．同時に公理的記述を手に入れてしまった人間はもはや十九世紀の数学に後戻りはできない．にもかかわらず変革を迫られている．数学は堅牢な建築物であることを信じて疑わずちょっとつつかれると身構えてしまう数学者が多い中で，いま正に起きつつある変革にどう対応するか，あるいは，できるかが焦点となるだろう．できなければ，何の根拠もなく数学はつぶされてしまうだろう．数学の外側の人間の責任だという数学者の愚痴だけを残して．一刻の猶予もない．既に円周率は「約 3」でもよいことになってしまったのだから．

参考文献

[1] 郡司ペギオ－幸夫．生命理論：生成という存在態，哲学書房，2002

[2] 郡司ペギオ－幸夫．進化の時間から「いま・ここ」の数理構造へ，プレプリント，2002

[3] Kripke（黒崎 訳）．ウィトゲンシュタインのパラドックス，産業図書，1983

[4] 松野孝一郎．内からの眺め，複雑系の科学と現代思想シリーズ 内部観測，青土社，1998

[5] Ramachandran and Blakeslee. 脳のなかの幽霊，1998
[6] 佐伯祐子．Between Simplex Method and Karmarkar method，プレプリント，2001
[7] 角田秀一郎．ラッセルのパラドクスの懐疑的解決，奈良女子大学大学院年報，1999
[8] 角田秀一郎．数の脱構築，奈良女子大学大学院年報，2000
[9] 角田秀一郎．集合と写像の再構築，奈良女子大学大学院年報，2001
[10] Wittgenstein. ウィトゲンシュタイン全集，大修館書店、1976