テータ関数の面白味

立命館大学理工学部
成木　勇夫

序. 長年、大学で複素解析の教育に携って来て感ずるのは、近年ますます楕円関数のような美しく深遠な数学的対象への興味が一般的に失われて行く傾向が強まっていることである。これは主に学生の反応などから感ずるのであるが、その本当の原因は現在の社会のあり方の中にあるように思われる。実際、もう何年も前から、大学の中でも他分野の教員、研究者の数学に対する評価が否定的な方向に変わって来ているのが肌で感じられるようになっている。余りにも単純化した社会観かもしれないが、一極化などと言われているように、内容の乏しい一面的な価値観が支配的となる中で、社会的制約をも排除してひたすら自己の利益のみを追求する様々の組織が限度のない肥大化を目指しているのであるが、却ってそれら巨大組織間の争いはついには世界的規模の破局をもたらすのではないかと多くの人が危惧している。このような時代の雰囲気の中で、我々数学者が、数学本来の価値をどのように守って行けるかと言うと正直に言って甚だ心もとない。数学本来の価値、それは我々の意識の中にある。この意識はしかし、最初から存在していた訳ではない。我々、数学者が色々の対象と関った経験の中で形成され、次第に強くなり確信にまで高まったものである. 定理の形式的な正しさは推論図式に従って証明するだけで得られるであろうが、その内容的正当性すなわち理論の価値は経験を通して示す以外の方法では得られない。すなわち価値の演繹は意識の経験的変化によって行うほかはないのである。このような価値

の証明を伴わない講義は退屈なものであろう。ただ体系が形式的に展開されていればよいと言うものではない。いわゆるブルバキズムにはこのこの点で少し反省が必要なのではないかと思う。

では他ならぬ自分が学生に対して、どこまでこの価値の演繹ができたかと言うと全く自信はない。努力はしているが、その努力が、生きるために何かを身に付けようとしている学生の関心を少しでも数学の方へ惹き付け得たかは全く判らないのである。ただ、少し申し訳ないのであるが、自分の側に少しの進歩があったことだけはハッキリ言える。確かに楕円関数は以前より、ずっと親しい対象になっている。発生の当初にさかのぼって、この数学の対象について偉大な先人の膨大な業積を調べるのは、時間の余裕のない者には殆ど不可能な作業であるが、しかしそれでも現在与えられている形から、疑念を反芻することによって逆にこの対象が生まれたときの状態に思いを馳せるのは或る程度可能なことだからである。すなわち現代的定式化が隠してしまっている対象の本質は、もし我々の姿勢が十分に真面目なものであるならば、きっと自己の本来の姿をあらわしてくれるであろうと期待するのである。

歴史的には、我々の主題は複素数の視覚化（ガウス、アーガンド）によって関数が(実)２次元から２次元への写象として解放され、アーベルが二重周期関数＝楕円関数を発見したときの驚きから始まる。個々の楕円関数から離れて、周期の全体（の相似類）すなわち楕円曲線の同型類が依存しているもう一つのパラメーター：モジュラスを初めて意識したのはガウスであったと伝えられている。楕円関数の本来の変数とこのモジュラス（基本周期の比）を取り込んで、両者を変数とするテータ関数を導入したのはヤコービーであった。このテータは熱方程式を満たしていて、別の方面の大きな成功をもたらした、いわゆるテータ零値（テータ定数とも呼ばれる）はモジュラスの関数であって思いもかけない別の世

界の住人であった。熱現象の解明で重要な役割を果たしたフーリエ展開の理論を通して、テータの内部に数論的情報が格納されているのが判ったのである。

しかし、その後ワイヤストラスの努力などにより複素変数関数論が整備され、無限乗積、部分分数分解などの理論の中で楕円関数論が位置付けられて行く過程でヤコービの理論は少し背景の方へ押しやられてしまった感がある。通常の講義ではそこまで行かなくなってしまったと言った方がよいのかも知れない。これは明らかに残念なことである。

この講演（記録）では非常に多くの意味を含んでいて今だにその全容を捉え切れていないテータ関数について、或る意味で全く古典的な観点から、しかし現代人として現在の理論への反省などを交えながら少くとも初等数論と関わる部分（ラグランジューヤコービの定理、ガウス和・平方剰余の相互則など）に至るまでをマンフォードの本などをもとにしながら自己流に述べて見たいと思う。

本論の構成は次のようになっている：

1. 変形シグマ関数、ヤコービ型無限積
2. テータの変換性とハイゼンベルク群
3. $\wp(v)$の半周期値と新しいテータ、ヤコービの微分恒等式
4. $\tilde{\wp}(v)$の半周期値の差とテータ零値
5. テータ零値の無限積表示、数論への最初の応用
6. テータのモジュラー変換性Ⅰ
7. テータのモジュラー変換性Ⅱ
8. ガウス和の決定
9. 平方剰余の相互則

この場を借りて、このような講演の機会を与えて下さった奈良女子大学の第一回岡シンポジウムの組織委員の方々に深い感謝の念をあらわしたい。この大役は講演者には大変に重いものであったが、自らの関った数学をかえりみる良い機会でもあった。また同大学で学んでおられ、講演のノートを整え、それをもとに書き直された原稿をさらに清書するなどの労を取って下さった橋本伊都子さん、北川友美子さんに心からのお礼を述べたい。

1. 変形シグマ関数、ヤコービ型無限積

現在の楕円関数論では、だいたい無限乗積の理論の続きとして、ワイヤストラスのシグマ関数から始り、そこから（ワイヤストラスの）ゼータを経てペー関数へと進むのが普通のコースのように見える。（例えばフルヴィッツ・クーラン.）このシグマは現在の一般的定義から言えば明らかにテータの一種なのだがそれがテータ変換性を持っていることは、その対数微分の微分であるところのペー関数の二重周期性から導かれる。これはしかし少々転倒した議論の順序のように思えないだろうか。実際このように話を進めると、基本周期分の平行移動に伴うゼータのズレを表す η_1, η_2 などの超越的な量を天下り式に理論に持ち込むことになる。そのためヤコービの古典的テータと関係させようとすると、常にこの超越的な夾雑物が付きまとって扱いが必要以上に面倒になってしまう。それでは何故シグマよりもヤコービのテータなのかと問えばその答えはこのテータが、二変数の関数として（複素化された）熱方程式の解であると言う点にある。実際、理論が展開して行く過程を注意深く追って行くと、この方程式が重要な役割を果たしていて、理論全体を極めて豊かなものにしていることが判るのである。

とは言ってもシグマの長所を否定している訳ではない。格子点を（一位の）零点とする整関数として最も自然な形をしているので、基本周期の取り換えに対しては全く不変なものとなっている。

ここでは敢えてワイヤストラス型の無限積表示を少し変えて、ヤコービテータともっと直接的な関係にあるシグマ関数をあらたに導入して見たいと思う。すなわちこの少しの変更がヤコービ型無限積表示と、そこから導かれるテータ変換性をもたらすことを示したいのである。この目的のため基本周期の一つは特別視される。

すなわち１および上半平面にあるτが基本周期であるとして議論を始める。その上で新しいシグマ関数を

$$\tilde{\sigma}(v)=e^{-2v^2}v\prod_{m,n}{}'\left(1-\frac{v}{m\tau+n}\right)e^{\frac{v}{m\tau+n}+\frac{v^2}{(m\tau+n)(2m\tau+2n-1)}}$$

と置いて定義する。ここでダッシュはこの無限積が（０，０）を除く全整数対（m,n）に渉るものであることを示している。まず、この無限積もワイヤストラスシグマと同様絶対収束していることに注意する。すなわち結果は積を作るときの順の順序によらず一定である。実際、通常のσと上の$\tilde{\sigma}$の定義式を比較するとeの肩の式の第二項だけが違うのであるが、その差は増大する$|m|,|n|$に対して　$O\left((m^2+n^2)^{-3/2}\right)$程度の量なので、

$$Log\left(1-\frac{v}{m\tau+n}\right)$$

の展開のなかで無限積の収束を妨げる最初の二項を無害化する効果は全く同じである。しかしここで$\tilde{\sigma}$の方の長所がハッキリと見えてくる。すなわち無限積の絶対収束性を意識して、まずmを固定し、０を挟んで対称にnを動かして、部分無限積を作り、得られた結果を今度はmをやはり対称に動かして掛け合わせて$\tilde{\sigma}$を計算することにする。この際$m=0$に対する部分積は冒頭の$e^{-2v^2}v$を含めて作るものとする。部分積のリストは次の通り；

$m=0$　に対して　$$\frac{\sin\pi v}{\pi}$$

$m\neq 0$　に対して　$$\frac{\sin\pi(m\tau-v)}{\sin\pi(m\tau)}e^{\pi\left(\cot\pi(m\tau)v-\{\cot\pi(m\tau)+\tan\pi(m\tau)\}v^2\right)}$$

これらの結果を導くのに使われたのは本質的に、次のよく知られた二つの公式のみである：

$$\frac{\sin \pi z}{\pi} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} z \prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{z}{n}\right)\left(1 + \frac{z}{n}\right)$$

$$\pi \cot \pi z = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{z+n}$$

e の肩の式の第二項の処理には、後者の等式から導かれる等式

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{(z+n)(2z-1+2n)} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \left\{ \frac{1}{z-\frac{1}{2}+n} - \frac{1}{z+n} \right\}$$

$$= \pi \left\{ \cot \pi\left(z - \frac{1}{2}\right) - \cot \pi z \right\}$$

$$= -\pi \left(\tan \pi z + \cot \pi z\right)$$

が用いられた。

さて、ここで更に上の結果の m についての対称無限積を作ると、符号のみ違う二つの m についての指数因子は互に打ち消し合って、ヤコービ型無限積表示

$$(1) \quad \tilde{\sigma}(v) = \frac{\sin \pi v}{\pi} \cdot \prod_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \pi(m\tau - v) \sin \pi(m\tau + v)}{\sin^2 \pi(m\tau)}$$

$$= \frac{\sin \pi v}{\pi} \cdot \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(1-q^m \omega)(1-q^m \omega^{-1})}{(1-q^m)^2}.$$

が得られる。但し、$q = e^{2\pi i\tau}$; $w = e^{2\pi i v}$ と置いた。この表示で、最初に注意しておくことは次である；

$\mathrm{Im}(\tau) > 0$ なので $|q| < 1$ 従って $\sum_{m=1}^{\infty} |q^m| < \infty$ 従って無限積 $\prod_{m=1}^{\infty}(1 - q^m)$, $\prod_{m=1}^{\infty}(1 - q^m w)$ などは絶対収束 また $w = e^{2\pi i v} \neq 0$ なので $\prod_{m=1}^{\infty}(1 - q^m w^{-1})$ も絶対収束していることである。

結局(1)の右辺では因子の総体のみが重要でそれらを掛け合せる順序は全く問題にならないのである。

ヤコービの $\vartheta_1(v)$ の無限積表示を知っておられる方には(1)が

$$\tilde{\sigma}(v) = \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_1'(0)}$$

を示していることがすぐに判り、この変形シグマ関数の自然性をよく理解して頂けることと思う。

さて、ここで周期の平行移動に対する $\tilde{\sigma}$ の変化を(1)から導いて見よう。まず次は自明である：

$$(2) \qquad \tilde{\sigma}(v + 1) = -\tilde{\sigma}(v)$$

冒頭の因子だけの問題だからである。次に v を $v + \tau$ で置き換えて見よう。このとき w は qw に変化し(1)の右辺の因子の中で移動が起こるが、完全には合わない所が少しだけある。すなわち零点を問題にする限りでは $\sin \pi v$ から生ずる $\sin \pi(v + \tau)$ は $1 - qw^{-1}$ とまた $1 - qw^{-1}$ から生ずる $1 - w^{-1}$ は $\sin \pi v$ と対応するが完全に一致せず、乗法因子のズレが生ずる。このズレを勘定すると変換式

$$(3)\quad \tilde{\sigma}(v+\tau) = -e^{-(\pi i\tau + 2\pi i v)}\tilde{\sigma}(v)$$

が得られる。(2), (3)により$\tilde{\sigma}(v)$は一般的定義に従って加群$\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$に関するテータ関数である。ここで一般的なテータの規定を述べておく：まず有限次複素ベクトル空間の離散的部分加群でそれによる全空間の商群がコンパクトとなるようなものが予め与えられているとする，この加群に関するテータ関数とは、このベクトル空間上の整関数であって、この加群の各元の平行移動に関して、一次関数の指数関数が自身に掛かるだけの変化を示すようなものを指して言うのである。これを定義とすると、二次関数（二次多項式）の指数関数はすべてテータであることになり、このようなものは自明なテータと呼ばれる。それでは自明でないテータが存在するかと言うとそれは一般次元では離散加群に対して極めて強い条件となる。しかし今のような一次元の場合は全く無条件に自明でないテータが存在するのである。そして、これが楕円関数という特異な対象が生まれる根本原因なのである。

実際、今の場合、変数に関する微分の意味もハッキリしていてテータ関数の対数微分の微分は上の定義によって離散加群の平行移動作用で不変な有理関数となる。そして、テータが自明でなければ、これは定数ではない。すなわち$\tilde{\sigma}$から楕円関数が得られることになる。それは単に通常の$\wp$と定数の差しか違わない。σとの違いが明らかに自明なテータ分しかないからである。

従って$\wp$の代りに

$$\tilde{\wp} := -\left(\frac{\tilde{\sigma}'}{\tilde{\sigma}}\right)' = \frac{(\tilde{\sigma}')^2 - \tilde{\sigma}\tilde{\sigma}''}{\tilde{\sigma}^2}$$

を理論の基礎に置いても全く問題はないのである。(うっかり$\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$を

最初から周期加群と呼んだが、それは後から登場するこの$\tilde{\wp}$などに対しての周期のなす加群と言う意味であるので、戸惑われた方も多いかも知れない。ここでお詫びしておく。）u－平面$\mathbb{C}$の部分集合と見た加群$\mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z}$は格子点集合と呼ばれる。$\tilde{\sigma}$の零点集合は、その定義により、この格子点集合そのもので、零点の重複度はすべて１である。このことから$\tilde{\wp}$は極集合が丁度、この格子点集合であり、極の位数はすべて２であって極でのローラン展開の初項の係数　すべて１であるような偶な周期関数である。このような関数は定数差を除いて一意的である。このようなものを（与えられた周期加群に対して）ペー型の楕円関数と呼ぶことにしよう。但し、ここで言う定数差はuに関して定数という意味であってτの関数ではあり得ることを注意しておく必要がある。正にこの点に事柄の微妙さが存在するからである。

2. テータの変換性とハイゼンベルク群

前節で述べたテータの一般的規定によれば、テータの変数を定数だけズラしたものはまたテータである。また、テータとテータとの積もテータである。とくに自明なテータをテータに掛けて変化させることができる。（もっとも、この変形は本質的なものではない。対応するペーに加法定数の変化を及ぼすにすぎないからである。）もちろん我々は上の二つの操作を組合せて用いることができる。その際、変換公式がどのように変わるかは、興味ある問題である。この節ではまず$\tilde{\sigma}$の変換性を反省しながら、このことを考えて見よう。前節では周期加群$\mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z}$の生成元に対してのみ変換公式が与えられていたのであるが、一般元$m\tau+n$に対して書き下すのも容易である：

$$\tilde{\sigma}(v+m\tau+n) = (-1)^{m+n} e^{-\pi i m^2\tau - 2\pi i m v} \tilde{\sigma}(v)$$

ここで、符号因子$(-1)^{m+n}$は周期加群の指標であるが、この煩しい付加物を上の操作で取り除くことができないかどうか考えてみる。答はしかし簡単で、新しいテータ$\hat{\sigma}$を次式で定義すればよいだけである；

$$\hat{\sigma}(v) := Ce^{-\pi i v}\, \tilde{\sigma}(v - \tfrac{\tau}{2} - \tfrac{1}{2})$$

ここでCは0でない定数であるが、今はvのみを変数と見ているのでτの関数ではあり得る。実際、新しい変換公式は

$$\hat{\sigma}(v+m\tau+n) = e^{-\pi i m^2\tau - 2\pi i m v}\, \hat{\sigma}(v)$$

となることがすぐに確かめられる。右辺の指数因子を左辺に移して眺めれば、新しい左辺は（m、nによって決まる）$\hat{\vartheta}$に対する作用と見ることができ、この公式は$\hat{\vartheta}$がこの作用で不変であることを示していると解釈できる。（関数に対する）このような作用のなす群を一般化された形で定義して見よう：実定数a、bに対して

$$(T_a f)(v) := e^{\pi i a^2 \tau + 2\pi i a v} f(v + a\tau)$$

$$(S_b f)(v) = f(v + b)$$

と置いて作用素T_a、S_bを定義する。こうすれば上の等式は

$$T_m S_n \hat{\vartheta} = \hat{\vartheta} \qquad (m, n \in \mathbb{Z})$$

と表される。しかし、これは$\hat{\vartheta}$がS_1, T_1のみに対して不変であることと同値である。S_1, T_1は互に可換であり$\{S_b\}_{b\in\mathbb{R}}$、$\{T_a\}_{a\in\mathbb{R}}$は夫々加法群$\mathbb{R}$と同型な作用素群だからである。しかし、S_bとT_aは一般には可換でなく、

$$S_b T_a S_{-b} T_{-a} = e^{2\pi i a b}$$

なる交換関係が成り立っている。但し、右辺はスカラー作用素と見る。結局、これらの作用素が生成する群は絶対値1の複素数のスカラー作用素の群を中心とし、この中心による剰余群が$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$と同型になるような作用素の群である。この作用素群を（マンフォードにならって）記号$\mathcal{G}$で表し、ハイゼンベルク群と呼ぶ。

正整数lに対してS_l、T_lで生成される$\mathcal{G}$の部分群を$\mathcal{G}_l$と書く。これら

は可換群である。この記号によれば、$\hat{\sigma}$は$\mathcal{G}_1$不変な整関数であると言うことができる。また$\hat{\sigma}$を定義するときに保留しておいた定数を

$$c = e^{\frac{\pi i \tau}{4}}$$

と決めれば、$\hat{\sigma}$と$\tilde{\sigma}$の関係は

$$\hat{\sigma} = T_{-\frac{1}{2}} \cdot S_{-\frac{1}{2}} \tilde{\sigma}$$

或いは

$$\tilde{\sigma} = S_{\frac{1}{2}} \cdot T_{\frac{1}{2}} \hat{\sigma}$$

と表すことができる。

ここでτをどのように見るかについて、我々の立場を明確にして置こう。扱う関数の変数をあくまでvに限定するならば、τは単なるパラメーターであり、ハイゼンベルク群$\mathcal{G}$もこのτに依存しているものと見なければならない。しかしもし作用を受ける関数の変数のうちにvばかりでなくτも含まれていると考えるならば、$\mathcal{G}$は絶対的な作用素群となりτの副次的性格も消滅する。以後、我々は主に後者の立場を取ることになる。理論の要となる熱方程式が登場するからである。

さて、これまでの所で視点を$\tilde{\sigma}$から$\hat{\sigma}$に移した。これは主に変換性の観点から、このようにしたのであって、具体的な関数$\hat{\sigma}$がこの観点から見て最も自然なものであるかどうかは全く別問題である。この節での残る課題は$\mathcal{G}_1$－不変な最も基本的なものは何かと言う問に答えることである。そこで$f(v)=f(\tau, v)$は$\mathcal{G}_1$－不変な（$\mathbb{H} \times \mathbb{C}$：$(\tau, v)$上の）正則関

数であると仮定する。($\mathbb{H}:=\{\tau \mid \mathrm{Im}(\tau)>0\}$) fはとくにS_1－不変だから1はfの周期である、すなわちフーリエ展開可能である。今の場合、この展開はw $(=e^{2\pi i v})$についてのローラン級数展開である；

$$f(v)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n w^n=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n v}$$

ここで係数a_nは$\mathbb{H}$上の正則関数である。ここで

$$a_n=A_n e^{\pi i n^2\tau} \qquad \text{すなわち} \qquad A_n=a_n e^{-\pi i n^2\tau}$$

と置いて新しい係数列$A_n,\ n\in\mathbb{Z}$を導入すると

$$f(v)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n \varphi_n(v)$$

となる。但し、$n\in\mathbb{Z}$に対して

$$\varphi_n(v)(=\varphi_n(\tau,v))=e^{\pi i n^2\tau+2\pi i n v}$$

$$=T_n 1 \quad (1\text{;恒等的に}1\text{である関数})$$

と置いた。最後の等式から

$$T_1\varphi_n=\varphi_{n+1}$$

fはT_1－不変でもあるから

$$A_n = A_{n-1}$$

すなわちA_nはnに依らないτの関数である。これを$A(\tau)$とすれば、結局

$$f(\tau, v) = A(\tau) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi_n(\tau, v)$$

と表わされる。従って最も基本的な$\mathcal{G}_1$ー不変なテータは

$$\vartheta(v) = \vartheta(\tau, v)$$

$$:= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi_n(\tau, v)$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 \tau + 2\pi i n v}$$

であると考えるのは自然であろう。実際この考えの正当性はこのテータが複素の熱方程式

$$4\pi i \frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

を満たしていることによって支持される。すぐに判るようにfがこの方程式の解であるためには$A(\tau)$は定数でなくてはならない。最終的にこの定数分の任意性を除いてしまうには正規化条件

$$(1) \qquad \int_0^1 f(\tau, v)\, dv = 1$$

を置けば良い。左辺は$A(\tau)$だからである。この条件はfが熱方程式解で

あることを含んでいるのである。結局ϑは(1)を満たし、$\mathcal{G}_1$－不変な唯一の$\mathbb{H}\times\mathbb{C}$上の正則関数として特徴付けられるのである。

3. $\tilde{\wp}$ の半周期値と新しいテータ、ヤコービの微分恒等式

前節では、ハイゼンベルク群の作用の立場から最も基本的なテータ $\vartheta(v)=\vartheta(\tau,v)$ を確立したが、その準備として $\tilde{\sigma}$ から $\hat{\sigma}$ への移行が必要であった。$\hat{\sigma}$ は半周期 $(\tau+1)/2$ と（周期加群を法として）合同な点を零点集合とする整関数である。ここで半周期はすでに $\tilde{\wp}$ の満たす微分方程式の中に現れていることに注意しよう。それらの合同類は全部で3個あるが、それらは丁度、位数3の奇楕円関数 $\tilde{\wp}'$ の零点集合であり、また2位の楕円関数 $\tilde{\wp}$ が値を2重に取るような点の全体でもある。従って、3個の（$\tilde{\wp}-$（$\tilde{\wp}$ の）半周期値）の積は $\tilde{\wp}'^2$ と定数倍しか違わない。これが $\tilde{\wp}$ の微分方程式を殆ど自明なものとしている理由である。ここでは、後の公式の都合などを考慮して、半周期値の伝統的な番号付けとは異なる二重添数を用いることにする。すなわち $j,k=0,1$ に対して

$$\tilde{e}_{jk}:=\tilde{\wp}\left(\frac{j\tau+k}{2}\right)$$

と置く。（もちろん $j=k=0$ は除外されている。慣例的には $\tilde{e}_{01}$, $\tilde{e}_{11}$, $\tilde{e}_{10}$ は夫々 $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$, $\tilde{e}_3$ などと記されるべきであろう。）差 $\tilde{\wp}-\tilde{e}_{jk}$ は零点も極も重複度2であるから、その平方根が整関数として定まる筈である。この平方根は、楕円関数ではないにしても周期加群の平行移動作用に対して符号のみを変えるような関数である。逆に言えば、このような性質を持つ整関数であって、丁度格子点で1位の極を持ち、$(j\tau+k)/2$ と合同な半周期を単純零点とするような有理型関数が出来てしまえば、それはこの平方根と乗法定数しか違わないのである。この節ではまずこの原理に従って、基本の ϑ を（半整数添数の）ハイゼンベルク作用素から $\tilde{\wp}-\tilde{e}_{jk}$ の平方根をすべて作って見よう。

基本のテータϑは$\mathcal{G}_1$-不変な関数であった。$\mathcal{G}_1$は整数添数のハイゼンベルク作用素の群、すなわちS_1、T_1の生成する$\mathcal{G}$の（可換）部分群である。交換関係式から、半整数添数のハイゼンベルク作用素は$\mathcal{G}_1$の元と符号を無視すれば可換であることが判る。すなわち、$2a$、$2b \in \mathbb{Z}$のとき

$$f = S_b T_a \vartheta$$

と置けば

$$Q f = \chi(Q) f \qquad (Q \in \mathcal{G}_1)$$

が成り立つ。但し、χは$\mathcal{G}_1$の$\{\pm 1\}$-値の指標である。そこで今$j, k = 0, 1$に対して

$$\vartheta_{jk} := S_{\frac{k}{2}} T_{\frac{j}{2}} \vartheta$$

と置いて、新しいテータを三個導入する。($\vartheta_{00} = \vartheta$)
そして、さらにT_aは純粋な平行移動作用ではないけれども

$$\frac{f(v + a\tau + b)}{g(v + a\tau + b)} = \frac{(S_b T_a f)(v)}{(S_b T_a f)(v)}$$

が成り立つことに注意すれば、商

$$\frac{\vartheta_{jk}}{\vartheta_{mn}}$$

がすべて周期加群の平行移動作用に対して符号のみを変える有理型関数であることが判る。ただ、ここで厄介なのは零点と極を調整するとき、若干の添数のズレが生ずることである。すなわち格子点を零点とするのは ϑ ではなく ϑ_{11} であることである。そこで $j'=1-j$, $k'=1-k$ などの記号を用いることにすれば $\tilde{\wp}-\tilde{e}_{jk}$ と $\vartheta_{j'k'}/\vartheta_{11}$ の平方とは（v に依存しない）乗法定数しか違わないことが判る。この定数を決めるには $\tilde{\wp}(v)$ の原点でのローラン展開の初項が $1/v^2$ であることに注意すればよい。従って $\vartheta_{j'k'}$, ϑ_{11} に定数を掛けて原点でのテイラー展開の初項の係数が1となるように調整すればよいのである。すなわち

$$\tilde{\wp}(v)-\tilde{e}_{jk}=\left\{\frac{\vartheta_{j'k'}(v)/\vartheta_{j'k'}(0)}{\vartheta_{11}(v)/\vartheta_{11}'(0)}\right\}^2$$

が成り立つ。

次に $\tilde{\wp}$ の微分方程式に戻って見よう：

$$\wp'^2=4(\tilde{\wp}-\tilde{e}_{01})\cdot(\tilde{\wp}-\tilde{e}_{11})\cdot(\tilde{\wp}-\tilde{e}_{10})$$

今や、右辺も平方として具体的に表わされている。従って等式

$$\wp'(v)=-2\,\frac{\prod_{(j,k)\neq(1,1)}\vartheta_{jk}(v)/\vartheta_{jk}(0)}{\left(\vartheta_{11}(v)/\vartheta_{11}'(0)\right)^3}$$

が、原点でのローラン展開初項の比較を補うことによって導かれる。ここで、$\wp'(v)$, $\vartheta_{11}(v)$ は奇関数であるのに対して、ϑ_{00}, ϑ_{01}, ϑ_{10} は偶関数であることに注意すると上の等式は初項が1の v^2 のベキ級数の間の乗法

的関係式と見ることが出来る：

$$\frac{v^3 \tilde{\wp}'(v)}{-2} = \frac{\prod_{(j,k)\neq(1,1)} (\vartheta_{jk}(v)/\vartheta_{jk}(0))}{(\vartheta_{11}(v)/\vartheta_{11}'(0)v)^3}$$

所で左辺の展開は $\tilde{\wp}(v)$ は導関数なのでローラン展開の中に $1/v$ の項はないから

$$1 + 0\cdot v^2 + \cdots\cdots$$

となり、また

$$\frac{\vartheta_{jk}(v)}{\vartheta_{jk}(0)} = 1 + \frac{1}{2}\frac{\vartheta_{jk}''(0)}{\vartheta_{jk}(0)} v^2 + \cdots$$

$$\frac{\vartheta_{11}(v)}{\vartheta_{11}'(0)} = 1 + \frac{1}{6}\frac{\vartheta_{11}'''(0)}{\vartheta_{11}'(0)} v^2 + \cdots$$

となっている。初項1のベキ級数の１次の項は積に対して加法的に振舞うから、上の等式からとくに

$$\frac{\vartheta_{11}'''(0)}{\vartheta_{11}'(0)} = \frac{\vartheta_{01}''(0)}{\vartheta_{01}(0)} + \frac{\vartheta_{00}''(0)}{\vartheta_{00}(0)} + \frac{\vartheta_{10}''(0)}{\vartheta_{00}(0)}$$

が引き出される。ここで熱方程式が威力を発揮する。すなわち $\vartheta_{11}'(0)$, $\vartheta_{01}(0)$, $\vartheta_{00}(0)$, $\vartheta_{10}(0)$ などはまだての関数であるが、$\vartheta_{11}'''(0)$, $\vartheta_{01}''(0)$, $\vartheta_{00}''(0)$,

$\vartheta_{10}''(0)$ などは夫々、それらの τ についての微分の $4\pi i$ 倍にな，ているのである。すなわち、上の等式は各項を分母の対数微分に置き換えた等式と同値である。従，て

$$\vartheta_{11}'(0) = C\,\vartheta_{01}(0)\,\vartheta_{00}(0)\,\vartheta_{10}(0)$$

但し、Cは（今度は本当の）定数である。Cを決めるには $\vartheta_{00} = \vartheta$ の級数表示に注目すればよい。他のテータの級数表示も、ハイゼンベルク作用素を通して導かれる。これらの表示（或いはその微分）において $v = 0$ と置けば、テータ零値 $\vartheta_{11}'(0)$，$\vartheta_{01}(0)$、$\vartheta_{00}(0)$、$\vartheta_{10}(0)$ は $e^{\pi i\tau/4}$ のベキ級数表示が得られる。この表示を基にして、上の等式の両辺を比較すれば $C = -\pi$ であることが判る。結局、ヤコービの微分恒等式

$$\vartheta_{11}'(\tau,0) = -\pi\,\vartheta_{01}(\tau,0)\,\vartheta_{00}(\tau,0)\,\vartheta_{10}(\tau,0)$$

が証明されたのである。

この等式の重要性は、理論の要所々々できわどい役割を演ずるところにある。例えば $\wp(v)$ の半周期値の差が自明な乗法定数を除いてテータ零値の4乗と一致することを示す際に本質的に用いられる。しかし、この事実の証明は、ここで展開するのを止めて次節に譲ることにしよう。

4. $\widetilde{\wp}(v)$ の半周期値の差とテータ零値

すでに述べたようにテータ定数＝テータ零値の重要性は、それらが持つ数論的性格にある。この性格の一端は、次節で証明されるそれらの無限積表示のうちに現れていると言ってよい。しかし、この表示の数論的意義は、それ自体からではなく、テータ零値の対数微分とテータ零値の4乗との関係によってはじめて認識されるのである。しかし、この重要な関係は、$\widetilde{\wp}(v)$ の半周期値の差と両者の夫々との関係を通して導かれる。ここではまず前節で予告した方の関係を証明することから始めよう。

そのため ϑ_{jk} の添数 j、k などは加群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の元であると考えよう。すなわち2を法とする剰余を取る操作によって導かれる $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ から $\{0,1\}$ $(\subseteq \mathbb{Z})$ の上への1:1写像

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ni j \longmapsto \bar{j} \in \{0,1\}$$

を通して

$$\vartheta_{jk} := \vartheta_{\bar{j}\bar{k}} = S_{\frac{\bar{k}}{2}}\, T_{\frac{\bar{j}}{2}}\, \vartheta$$

と置く。逆に整数 m、n などに対して、それらの $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ における類を [m]、[n] などで表そう。

今、m、n は 0 か 1 であるような整数として次の変形を考える

$$e^{\frac{\pi i m\tau}{4} + \pi i m v}\ \vartheta_{jk}\left(v + \frac{m\tau + n}{2}\right)$$

$$= T_{\frac{m}{2}}\, S_{\frac{n}{2}}\, \vartheta_{jk}(v)$$

$$= T_{\frac{m}{2}} S_{\frac{\bar{k}+n}{2}} T_{\frac{\bar{j}}{2}} \vartheta(v)$$

$$= (-i)^{m(\bar{k}+n)} S_{\frac{\bar{k}+n}{2}} T_{\frac{\bar{j}+m}{2}} \vartheta(v)$$

$$= (-i)^{m(\bar{k}+n)} S_{\frac{\bar{k}+n}{2}} T_{\frac{\overline{(j+[m])}}{2}} \vartheta(v)$$

最後の変形では ϑ の T_1 一不変性を用いた。面倒なのは $S_{(\bar{k}+n)/2}$ と $S_{\overline{[k+n]}/2}$ の差を測ることであるが、これには p、$q=0$、1 に対して成り立つ等式

$$\frac{p+q}{2} - \frac{\overline{[p+q]}}{2} = pq$$

を用いればよい。結局

$$\text{上式} = (-1)^{\bar{k}n\overline{(j+[m])}} (-i)^{m(\bar{k}+n)} \vartheta_{(j+[m])(k+[n])}(v)$$

となる。この式で $v=0$ と置けば m, $n=0$, 1 に対して成り立つ一般公式

$$\vartheta_{jk}\left(\frac{m\tau+n}{2}\right) = (-1)^{\bar{k}n\overline{(j+[m])}} (-i)^{m(\bar{k}+n)} e^{-\frac{\pi i m\tau}{4}} \vartheta_{(j+[m])(k+[n])}(0)$$

が得られる。この計算により、前節の $\tilde{\wp}(v) - \tilde{e}_{jk}$ を表す公式において $v=(m\tau+n)/2$ を代入すれば、求める差 $\tilde{e}_{mn} - \tilde{e}_{jk}$ の一般の表現が得られることが判る。公式の右辺に現れていた j'、k' などは今は $j+[1]$、$k+[1]$ と解釈されなければならない。しかし、これらのことを具体化する前に不必要な情報を予め省いておこう。まず $\vartheta_{jk}((m\tau+n)/2)$ の公式で

右辺の−1のべキは無視してよい。平方だけが問題だからである。同じ理由から−iのべキの全体に与える影響は同じ指数の−1のべキとして勘定される。また因子 $\exp(-\pi i m\tau/4)$ も分子、分母に共通して現れるから無視して差し仕えない。これらのことを念頭において、代入操作を次の特別な場合にのみ行う：

$$\tilde{e}_{j1}-\tilde{e}_{1k}=\left\{\frac{\vartheta_{0[k+1]}((j\tau+1)/2)\,/\,\vartheta_{0[k+1]}(0)}{\vartheta_{11}((j\tau+1)/2)\,/\,\vartheta_{11}'(0)}\right\}^2$$

$$=(-1)^{jk}\left\{\frac{\vartheta_{jk}(0)\,\vartheta_{11}'(0)}{\vartheta_{[j+1]0}(0)\quad\vartheta_{0[k+1]}(0)}\right\}^2$$

但し、ここで j、k は0または1の整数であって $(j,k)\neq(1,1)$ と仮定した。（カギ括弧は余りに煩雑なので適当に省いた。）この仮定により $j\cdot k=0$ なので右辺の符号因子は省かれる。ここに現れる (j,k)、$(0,\overline{[k+1]})$、$(\overline{[j+1]},0)$ などは $(1,1)$ 以外の（テータの）全添数であることに注意すれば、ヤコービの微分恒等式により

$$\tilde{e}_{j1}-\tilde{e}_{1k}=\pi^2\vartheta_{jk}(0)^4\qquad((j,k)\neq(1,1))$$

が得られる。これですべての半周期値の差が求まっているのである。半周期値の二重添数はまさしくこの覚え易い表現のためのものであった。

残る課題は、半周期の差をテータ零値の対数微分と関係付けることであるが、これは全く前節の思想の延長上で行われる：すなわち $\wp(v)-\tilde{e}_{j'k'}$ と $\wp(v)-\tilde{e}_{m'n'}$ を表す公式の商を取れば、等式

$$\frac{\wp^2(\tilde{\wp}(v)-\tilde{e}_{j'k'})}{\wp^2(\tilde{\wp}(v)-\tilde{e}_{m'n'})}=\left\{\frac{\vartheta_{jk}(v)/\vartheta_{jk}(0)}{\vartheta_{mn}(v)/\vartheta_{mn}(0)}\right\}^2$$

が得られる。これを初項が1であるような、v^2のべキ級数の間の乗法的関係と見なせば、v^2の係数の間の加法的関係として

$$\tilde{e}_{m'n'}-\tilde{e}_{j'k'}=\frac{\vartheta_{jk}^{(2)}(0)}{\vartheta_{jk}(0)}-\frac{\vartheta_{mn}^{(2)}(0)}{\vartheta_{mn}(0)}$$

が導かれる。但し、関数の右肩の(2)は通常のように2階導関数を表すものとする。再び熱方程式を使えば、求める

$$\tilde{e}_{m'n'}-\tilde{e}_{j'k'}=4\pi i\frac{d}{d\tau}\log\frac{\vartheta_{jk}(0)}{\vartheta_{mn}(0)}$$

が得られる。こちらは簡単であった。（ここでは古い記法に戻っていることに注意。すなわち$j\mapsto j'$は0と1を交換する写像である。）

結局、二つの公式をまとめると

$$\pi^2\vartheta_{jk}(0)^4=4\pi i\frac{d}{d\tau}\log\frac{\vartheta_{0k'}(0)}{\vartheta_{j'0}(0)},\quad (j,k)\neq(1,1)$$

が証明されていることになる。もっと具体的に書くならば

$$\pi^2\vartheta_{00}(0)^4=4\pi i\frac{d}{d\tau}\log\frac{\vartheta_{01}(0)}{\vartheta_{10}(0)}$$

$$\pi^2 \vartheta_{01}(0)^4 = 4\pi i \frac{d}{d\tau} \log \frac{\vartheta_{00}(0)}{\vartheta_{10}(0)}$$

$$\pi^2 \vartheta_{10}(0)^4 = 4\pi i \frac{d}{d\tau} \log \frac{\vartheta_{01}(0)}{\vartheta_{00}(0)}$$

となる。これらから直ちに重要な関係式

$$\vartheta_{00}(0)^4 = \vartheta_{01}(0)^4 + \vartheta_{10}(0)^4$$

も導かれる。

5. テータ零値の無限積表示，数論への最初の応用

まず第2節での議論を振り返って見る。最初$\tilde{\sigma}$の変換性を、その無限積表示を通して明らかにし、これにハイゼンベルグ作用素を施して$\mathcal{G}_1$ー不変な$\hat{\sigma}$を導き、さらに、これを$\mathcal{G}_1$ー不変性を持つ標準的なものとしてのϑと関係させたのであった。すなわち

$$\hat{\sigma} = T_{-\frac{1}{2}} \; S_{-\frac{1}{2}} \; \tilde{\sigma}$$

$$\hat{\sigma} = C \, \vartheta$$

ここでCはτの正則関数である。ところで、出発点の$\tilde{\sigma}$が既にヤコービ型の無限積表示を持っていたことを思い起そう。その積表示の因子はハイゼンベルグ作用素によって少しだけ形が変わるようなものなので、それから直ちに$\hat{\sigma}$の無限積表示も導かれて来る。これによってϑの無限積表示が得られているかと言うと実はそうではない。τの関数であるC自体が然るべき無限積表示を持っているかどうかが判らないからである。この問題を肯定的に解決するのがこの節の目的であるが、$\hat{\sigma}$の詳しい無限積表示は割愛して、今はϑが

$$\vartheta(\tau, v) = C(\tau) f(\tau, v)$$

但し，

$$f(\tau, v) := \prod_{m=1}^{\infty} (1 + h^{2m-1} w)(1 + h^{2m-1} w^{-1})$$

$$h := e^{\pi i \tau}$$

と書き表わされることで満足しよう。($q=h^2$ また $w=e^{2\pi i v}$ であった f が $\mathcal{G}_1$-不変であることは直接示すこともできる。)これから $C(\tau)$ の決定に取りかかるのであるが議論の骨組を明らかにするために、次のような考察を行う:今 $g = g(v) = g(\tau, v)$ を $\mathcal{G}_1$-不変な一般の正則関数とし、u に対して u_{jk} などを定義したように g に対しても

$$g_{jk} := S_{\frac{k}{2}} T_{\frac{j}{2}} g$$

と置く。但し j, k は 0 または 1 であるとする。ここで g_{11} は奇関数であるが、それ以外の g_{jk} は偶関数であることに注意する。(これは u_{jk} については既に言明され用いられた事実であるが、正しく示すには次のように考えればよい。R を $v \longleftrightarrow -v$ によって引き起される関数の反転作用素とすると、明らかに

$$R T_a = T_{-a} R$$

$$R S_b = S_{-b} R$$

これらの等式とハイゼンベルク作用素の交換関係と g の $\mathcal{G}_1$-不変性とから

$$R g_{jk} = (-1)^{jk} g_{jk}$$

が導かれる。)その上で g_{jk} の零値の比

$$\rho(g) := g_{11}'(0) / (g_{01}(0)\, g_{00}(0)\, g_{10}(0))$$

を導入する。g_{11} は奇関数なので $g_{11}'(0)$ は極限値

$$\lim_{v \to 0} \frac{g_{11}(v)}{v}$$

としても求まることを注意しておく。$g_{11}(v)/v$ が正則関数なのでこの方が自然であるとも言える。この定義に従えば

$$\rho(\vartheta) = C(\tau)^{-2}\rho(f)$$

またヤコービの微分恒等式は

$$\rho(\vartheta) = -\pi$$

と言い表すことができるから、$\rho(f)$ が計算されれば $C(\tau)$ は符号を除いて決定されるのである。直接の計算により

$$f_{01} = \prod_{m=1}^{\infty}(1-h^{2m-1}w)(1-h^{2m-1}w^{-1})$$

$$f_{10} = 2e^{\frac{\pi i \tau}{4}}\cos\pi v \prod_{m=1}^{\infty}(1+h^{2m}w)(1+h^{2m}w^{-1})$$

$$f_{11} = -2e^{\frac{\pi i \tau}{4}}\sin\pi v \prod_{m=1}^{\infty}(1-h^{2m}w)(1-h^{2m}w^{-1})$$

従って

$$f_{00}(0) = f(0) = \prod_{m=1}^{\infty}(1+h^{2m-1})^2$$

$$f_{01}(0) = \prod_{m=1}^{\infty}(1-h^{2m-1})^2$$

$$f_{10}(0) = 2e^{\frac{\pi i \tau}{4}}\prod_{m=1}^{\infty}(1+h^{2m})^2$$

$$f_{11}'(0) = -2\pi e^{\frac{\pi i \tau}{4}}\prod_{m=1}^{\infty}(1-h^{2m})^2$$

となる。ここで $\rho(f)$ の計算のため、まず $f(0)\cdot f_{01}(0)\cdot f_{10}(0)=2e^{\frac{\pi i\tau}{4}}$ すなわち

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1+h^{2m-1})(1-h^{2m-1})(1+h^{2m})=1$$

を示そう。これには積の因子が

$$\frac{(1-h^{2(2m-1)})(1-h^{4m})}{1-h^{2m}}$$

と書き表れることに注意すればよい。分子の積も分母の積も ν が偶なる正整数全体を動くときの $1-h^{\nu}$ の積となるからである。結局

$$\rho(f)=-\pi\left\{\prod_{m=1}^{\infty}(1-h^{2m})\right\}^2$$

従って

$$C(\tau)=\pm\prod_{m=1}^{\infty}(1-h^{2m})$$

となる。さてここでの符号の決定であるが、それには ϑ の定義式より得られる $\vartheta(0)$ の級数表示と比較すればよい。すなわち

$$\begin{aligned}1+2h+2h^4+\cdots\cdots &= \vartheta(0)\\ &= C(\tau)\prod_{m=1}^{\infty}(1+h^{2m-1})^2\\ &= \pm(1-h^2-h^4+\cdots)(1+2h+2h^3+\cdots)\end{aligned}$$

結局

$$C(\tau) = \prod_{m=1}^{\infty} (1-h^{2m}) \quad \left(= \prod_{m=1}^{\infty} (1-q^{m}) \right)$$

と完全に決定された。これで級数 ϑ_{jk} に対するヤコービ型の無限積表示が確立されたのである。しかし、ここではテータ零値のみを書き下しておく：

$$\vartheta_{11}'(0) = -2\pi e^{\frac{\pi i \tau}{4}} \prod_{m=1}^{\infty} (1-h^{2m})^3$$

$$\vartheta_{10}(0) = \prod_{m=1}^{\infty} (1-h^{2m})(1-h^{2m-1})^2$$

$$\vartheta_{00}(0) = \prod_{m=1}^{\infty} (1-h^{2m})(1+h^{2m-1})^2$$

ここで $\tilde{\wp}$ の微分方程式の右辺にある $\tilde{\wp}$ の3次多項式の判別式 Δ に対する無限積表示も書き添えて置く。Δ は方程式（右辺 $=0$）の根 $\tilde{e}_{jk}$ $((j,k) \neq (0,0))$ の差積の平方の16倍と定義するのが普通である：

$$\begin{aligned}\Delta &= 16\pi^{12} \{\vartheta_{01}(0)\vartheta_{00}(0)\vartheta_{10}(0)\}^8 \\ &= 16\pi^4 \vartheta_{11}'(0)^8 \\ &= (2\pi)^{12} e^{2\pi i \tau} \prod_{m=1}^{\infty} (1-h^{2m})^{24} \\ &= (2\pi)^{12} q \prod_{m=1}^{\infty} (1-q^{m})^{24}\end{aligned}$$

さて、いよいよこれらの公式の数論への応用であるが、前節の結果によりすでに準備は整っている。すなわち $\vartheta(0)=\vartheta_{00}(0)$ の4乗は $\vartheta_{01}(0)$

と $\vartheta_{10}(0)$ の商の対数微分で表される；

$$\pi^2\vartheta(0)^4 = 4\pi i\frac{d}{d\tau}\left\{-\log 2-\frac{\pi i\tau}{4}+\log\frac{\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m-1})^2}{\prod_{m=1}^{\infty}(1+q^{2m})^2}\right\}$$

$$= \pi^2-8\pi^2 q\frac{d}{dq}\log\frac{\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m-1})}{\prod_{m=1}^{\infty}(1+q^{2m})}$$

$$= \pi^2-8\pi^2 q\frac{d}{dq}\log\frac{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{n})}{\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{4m})}$$

$$= \pi^2+8\pi^2\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^n}{1-q^n}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4mq^{4m}}{1-q^{4m}}\right\}$$

$$= \pi^2\left[1+8\sum_{N=1}^{\infty}\{\Phi(N)-\Psi(N)\}q^N\right]$$

ここで最後の変形は $1/(1-q^n)$、$1/(1-q^{4m})$ の等比級数展開による。但し、$\Phi(N)$ は自然数 N の（正）約数の和，$\Psi(N)$ は N の約数のうち 4 の倍数であるものの和を表すとする。これらで表されることは展開の中に現れる q^N の整数倍を数え上げることによって理解される。

上の等式の整数論的意味は $\vartheta(0)^4$ の持っている意味から引き出される；ϑ の定義から

$$\vartheta(0)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2}$$

従って

$$\vartheta(0)^4=\sum_{(n_1,n_2,n_3,n_4)\in\mathbb{Z}^4} q^{n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_4^2}$$

すなわちこれは整2次形式 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$ に対するテータ級数である。結局、等式の両辺の比較により「自然数Nを（順序、符号をこめて）4個の平方数の和として表現する仕方の数は

$$8\{\Phi(N)-\Psi(N)\}$$

に等しい」ことが証明されているのである。この数は、Nが奇数のときはNの約数（すべて奇数）の和の8倍、Nが偶数のときはNの奇約数の和24倍とも解釈される。

ヤコービのこの結果は「すべての自然数は4個の平方数の和として表される」と言う有名なラグランジュの定理の精密化となっている。そのような表現の個数が計算できているからである。これがテータ関数の、数論への最初の応用であった。

6. テータ関数のモジュラー変換性Ⅰ

最初に、いわゆるモジュラー群が我々にとってどのような意味を持つものか説明してみよう。テータ関数を、その対数の二階導関数である$\wp$型の楕円関数の側に立って、眺め直して見ると、この関数の周期のなす加群の生成元が$1, \tau$に固定されてしまっているのはむしろ不自然に感じられる。すなわち楕円関数の方から見れば、周期の全体に意味があるのであって、原始的な(他の周期の± 1以外の整数倍とはならないような)周期を一つ選び、それが1となるように複素平面のスケールを変えると言うのは、あくまでも我々の理解のための便宜に過ぎないと思えるからである。実際、我々はテータ関数から始めて、その対数微分の微分である$\wp$型の楕円関数へと進んだが、この移行は逆行可能なものなのである。このことは次のようにして見られる:

全格子点(加法群$\mathbb{C}$の部分集合と見られた周期加群)で丁度、2位の極を持つ偶な楕円関数であってローラン展開初項の係数が1であるもの(これが$\wp$型楕円関数の定義)は、一回積分すると1価の有理型関数となる。偶性から原点での留数が自動的に0となり、周期性からすべての極で同じ事情だからである。この積分の符号を変え、それを更に積分すると、格子点の回りを正の向きに一周したとき、加法定数$2\pi i$のズレを生ずる多価関数が得られる。しかし、この多価性はこの二回積分を指数関数の中に放り込めば、除去されてしまう。得られたものは、全格子点を(重複度1で)零点集合とする整関数である。これがテータ関数であることは明らかである。すなわち周期の平行移動作用のもとで、出発点の関数が変らないので、この整関数は自身の構成過程の持つ不定性、すなわち二つの積分定数から生ずる一次式の指数関数分の不定性の中で動くのみであるからである。(そのようなものを一般的にテータと呼ん

だ。) この不定性にさらに出発点の$\wp$型楕円関数を定数だけズラす不定性を付け加えると、2次多項式の指数関数、すなわち自明なテータの分の不定性となるのである。しかし、この拡大された任意性は、単に出発点、構成過程からの不定性に留らず、見方を変えれば、我々の思考作用に大きな自由度を与えるものでもある。実際、この十分な任意性の中で適当な選択を行えば、どのような原始的周期も選ばれたテータの本当の周期とすることさえできるのである。こうしてこの新しいテータにフーリエ級数の理論が適用され我々の認識は増々拡って行くのである。

今やϑなどに適当な自明なテータを掛けて別の原始的周期を本当の周期にすることができることが判った。複素平面のスケールを変えればさらにこれを1とすることも可能である。このときこのスケールの変った周期加群の中に、この1に対して、以前のτに相当する周期τ'が殆ど自然に($\mathrm{mod}\ \mathbb{Z}$で)に決まることに注意しよう。では、この変更を受けたϑが、このτ'に対して決まるϑを本質的に(τの関数である乗法因子を除いて)一致するであろうか?もちろん答は無条件なYesではない。テータ関数を決めている本質的データの中に指標があって、これがϑ_{jk}を区別しているからである。指標のことをここで述べるのは諦めなければならないが、モジュラスτと変数vのどのような変換がϑを本質的に保存するかを明確に述べることはできる。

ここで言う変換はいわゆるモジュラー変換であって、それは一般に
$SL_2(\mathbb{Z})$の元

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

に対して決まる$\mathbb{H}\times\mathbb{C}$の変換

$$(\tau, v) \longmapsto \left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{v}{c\tau+d} \right)$$

のことを指して言う。右側の対を(τ', v')と書けば、新しい変数v'に1を加えることはvに$c\tau+d$を加えることに、またv'にτ'を加えることはvに$a\tau+b$を加えることに相当しているのである。すなわち、もとの状態で見れば、基本周期の系$\{\tau, 1\}$は$\{a\tau+b, c\tau+d\}$に変っているのである。ここで上の問の答を先に述べよう。

命題6.1：上の状況で$\vartheta(\tau', v')$が$\vartheta(\tau, v)$の自明なテータ倍（のτの関数倍）であるための必要十分条件は

$$ab \equiv 0 \mod 2$$
$$cd \equiv 0 \mod 2$$

である。

この命題の条件を満たす$SL_2(\mathbb{Z})$の元Aの全体は指数3の部分群である；Aは

$$\{\tau, 1\} \longmapsto \{a\tau+b, c\tau+d\}$$

により周期加群$\Omega_\tau := \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}_1$の自己同型を引き起すが、これはさらに有限加群

$$\Omega_\tau / 2\Omega_\tau \cong \tfrac{1}{2}\Omega_\tau / \Omega_\tau$$

上の変換を引き起す。$\mathbb{A}$ に対する上の条件は $\mathbb{A}$ がこの有限加群の元

$$\frac{\tau+1}{2} + \Omega_\tau$$

を固定することと同値である。この剰余類を $\mathbb{C}$ 上の点集合と見るならばそれは丁度、$\vartheta(v)$ の零点集合となっている。このことから命題の条件の必要性が理解されるであろう。十分性の証明は乗法因子 $\vartheta(\tau',v')/\vartheta(\tau,v)$ を具体的に計算するための準備として以下に展開される議論に含まれているのを見るであろう。

マンフォードに従って v' を y と書くことにし、y の関数 $Y(y)$ を次の式で定義する：

$$Y(y) = \exp(\pi i c(c\tau+d)\,y^2)\,\vartheta(\tau, (c\tau+d)\,y)$$

もちろん $\exp(z)$ は e^z のことである。また右辺の $(c\tau+d)y$ は v のことになる。従って y を $y+1$ に置き換えれば $\vartheta(v,\tau)$ は
$\vartheta(v+c\tau+d,\tau)=\vartheta(v+c\tau,\tau)=e^{-\pi i c^2\tau-2\pi i c v}\,\vartheta(v,\tau)$ に変わる。(ϑ の S_1 - 不変性に注意.) 従って

$$\begin{aligned}\frac{S_1 Y}{Y} &= \frac{Y(y+1)}{Y(y)}\\ &= \exp\{\pi i c(c\tau+d)(2y+1)-\pi i c^2\tau-2\pi i c(c\tau+d)\,y\}\\ &= \exp(\pi i c d) = 1\end{aligned}$$

これで Y の S_1- 不変性が示された。(ここですでに命題の条件の一部 $cd\equiv 0 \bmod 2$ が使われたことに注意しよう。) 次の目的は

$$\frac{T_1 Y}{Y} = \exp(\pi i \tau' + 2\pi i y) \ \frac{Y(y+\tau')}{Y(y)}$$

の計算である。今度は置き換え $y \longrightarrow y+\tau'$ で v は $v+a\tau+b$ に変わるから、前と同様に計算して

$$\frac{T_1 Y}{Y} = \exp\Big[\pi i(2y+\tau') + \pi i c(c\tau+d)\{2\tau' y + \tau'^2\}$$
$$- \pi i a^2 \tau - 2\pi i a v \ \Big]$$
$$= \exp\Big[\pi i \{1 + c(c\tau+d)\tau'\}(2y+\tau') - \pi i a^2\tau - 2\pi i a(c\tau+d)y\Big]$$

となる。ここで

$$1 + c(c\tau+d)\tau' = 1 + c(a\tau+b) = ac\tau + (bc+1) = ac\tau + ad$$
$$= a(c\tau+d)$$

に注意する。($\tau' = (a\tau+b)/(c\tau+d)$, $ad-bc=1$ が用いられた。)
結局

$$\frac{T_1 Y}{Y} = \exp\{\pi i a(c\tau+d)\tau' - \pi i a^2 \tau\}$$
$$= \exp\{\pi i a(a\tau+b) - \pi i a^2\tau\} = \exp\{\pi i ab\} = 1$$

もう一つの条件 $ab \equiv 0 \bmod 2$ も使われた。これでモジュラス τ に関して Y の S_1, T_1 ー不変性、すなわち $\mathcal{G}_1$ ー不変性が示された。すなわち τ の関数 $\varphi(\tau)$ があって

$$Y(y) = \varphi(\tau)\,\vartheta(\tau', y)$$

と書けることが判った。この φ は ϑ の特徴付けから

$$\varphi(\tau) = \int_0^1 Y(y)\,dy$$

と決まるのであるが、この積分計算は次節に譲ることにする。

7. テータ関数のモジュラー変換性 II

前節の結果により、ϑ のモジュラー変換性を明らかにする因子 $\varphi(\tau)$ は $Y(y) = \exp(\pi i c(c\tau+d)y^2)\vartheta(\tau, (c\tau+d)y)$ の区間 $[0, 1]$ 上の積分として表現されている。この節の課題はこの計算を実行することなので、a, b, c, d についての仮定 $ab-bc=1$，$ab \equiv cd \equiv 0 \mod 2$ は全部引き継ぐ。

$c=0$ の場合は除外して考えてもよい。何故ならこのときは $a=d=\pm 1$, $\tau' = \tau + ab$ 従って $Y(y) = \vartheta(\tau, dy) = \vartheta(\tau, y) = \vartheta(\tau', y)$ となるからである。最後の等式は $\vartheta(\tau+2, v) = \vartheta(\tau, v)$ より導かれるが、これは ϑ の級数表示

$$\vartheta(\tau, v) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left\{\pi i n^2 \tau + 2\pi i n y\right\}$$

より明らかである。

この節では以下 $c \neq 0$ と仮定される。上の級数表示から等式

$$\begin{aligned} Y(y) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left\{\pi i c(c\tau+d)y^2 + \pi i n^2 \tau + 2\pi i n(c\tau+d)y\right\} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left\{\pi i \left(\tau + \frac{d}{c}\right)(cy+n)^2 - \pi i \frac{d}{c} n^2\right\} \end{aligned}$$

が得られる。ここで $\exp(-\pi i \frac{d}{c} n^2)$ は n の法 c での合同類にしか依らないことに注意しよう。これは $cd \equiv 0 \mod 2$ によって保証されている。実際 $n = cm + k$ $(0 \leq k < |c|)$ と書くとき

$$\frac{d}{c} n^2 = cdm^2 + 2dmk + \frac{d}{c} k^2 \equiv \frac{d}{c} k^2 \mod. 2$$

となる。結局

$$\Upsilon(y)=\sum_{k=0}^{|c|-1}\exp\left(-\frac{d}{c}k^2\right)\sum_{m\in\mathbb{Z}}\exp\left[\pi i\left(\tau+\frac{d}{c}\right)\{c(y+m)+k\}^2\right]$$

と書ける。ここで積分

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}\int_0^1\exp\left[\pi i\left(\tau+\frac{d}{c}\right)\{c(y+m)+k\}^2\right]dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{\pi i\left(\tau+\frac{d}{c}\right)(cy+k)^2\right\}dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{\pi i\left(\tau+\frac{d}{c}\right)(cx)^2\right\}dx$$

は k に依らないことに注意すれば、$\varphi(\tau)$ の表示

$$\varphi(\tau)=\int_0^1\Upsilon(y)dy=S_{c,d}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{\pi i\left(\tau+\frac{d}{c}\right)|c|^2x^2\right\}dx$$

但し、

$$S_{c,d}:=\sum_{k\in\mathbb{Z}/c\mathbb{Z}}\exp\left(-\pi i\frac{d}{c}k^2\right)$$

が得られる。$S_{c,d}$ はガウス和と呼ばれ、古くから知られているものである。これは一見簡単そうに見えるが定義から明らかに円分体の元であり，自身のうちに平方剰余の相互則を含んでいるような数論的対象である。$\varphi(\tau)$ のもう一つの因子である全実軸上の積分は、それ程微妙なものではないが、全体 $\varphi(\tau)$ の他の構成要素であるガウス和に少なからぬ

影響を及ぼすものなのでキチンと計算して置かねばならない。これは一応は広義積分の形をしているが、

$$\mathrm{Im}\left(\tau+\frac{d}{c}\right) = \mathrm{Im}(\tau) > 0$$

であるので、積分される関数の絶対値は $|x|\to\infty$ のとき指数関数的に減少する。このため、この積分は上半平面で正則な τ の関数である。従って、これを完全に知るには、虚軸に平行な半直線 $\tau = it - \frac{d}{c}$ $(t>0)$ 上への制限を決定し，それを解析接続するだけでよい。しかし、τ がこの特別な値のときは，この計算は e^{-x^2} の積分に帰着され、答は

$$\frac{1}{|c|\sqrt{t}}$$

となる。t は $-i\left(\tau+\frac{d}{c}\right)$ の半直線上への制限と見ることができるから、結局

$$\varphi(\tau) = S_{c,d}\ \frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{|c|\sqrt{\tau+\frac{d}{c}}}$$

となる。但し、この式での $\tau+\frac{d}{c}$ の平方根は第1象限に取らねばならない。（$\tau+\frac{d}{c}$ 自体は上半平面にあるので、そうすればこの平方根は正則になる。）

今やこの $\varphi(\tau)$ について、等式

$$\exp\{\pi i c(c\tau+d)y^2\}\,\vartheta(\tau,(c\tau+d)y) = \varphi(\tau)\,\vartheta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, y\right)$$

が示されている。さて、ここでこの式のyに$v/(c\tau+d)$を代入して変数vに戻れば、群の作用のユサイクルのよく見える形の等式が得られる；

$$\vartheta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\ \frac{v}{c\tau+d}\right)=\varphi(\tau)^{-1}\exp\left\{\frac{\pi i v^2}{\tau+\frac{d}{c}}\right\}\vartheta(\tau,v)$$

しかし、ここで問題となるのは$\varphi(\tau)^{-1}$をどのように表現するかである。ガウス和や$|c|\sqrt{\tau+\frac{d}{c}}$などをそのままの形で残しておくのが合理的かどうかの判断である。

結果の先取りになってしまうが$S_{c,d}$の絶対値は$\sqrt{|c|}$であることが知られているので真中の$|c|$は二つに分けて$\sqrt{|c|}$を両側に分配する方がよいと思われる。さらにこうして出来た$\sqrt{|c|}\cdot\sqrt{\tau+d/c}=\sqrt{sgn(c)(c\tau+d)}$ともっとスッキリした$\sqrt{c\tau+d}$とを比較して見よう。後者の方の平方根は右半平面にすなわち$c>0$のときは第1象限に、$c<0$のときは第4象限に取るものとする。($sgn(c)$はcの符号を表す。すなわち$c>0$または$c<0$に従って1または-1とする。)結果は単純で

$$\sqrt{|c|}\cdot\sqrt{\tau+d/c}=\exp\left\{\frac{\pi i(1-sgn(c))}{4}\right\}\sqrt{c\tau+d}$$

と書くことができる。この等式をふまえて

$$\varphi(\tau)^{-1}=\zeta_{c,d}\sqrt{c\tau+d}$$

但し，

$$\zeta_{c,d}=\frac{\exp\left(\frac{-sgn(c)\pi i}{4}\right)\sqrt{|c|}}{S_{c,d}}$$

と表現しよう。こうして最終的な変換式の形は

$$\vartheta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{v}{c\tau+d}\right) = \mathcal{S}_{c,d}\sqrt{c\tau+d}\ \exp\left\{\frac{\pi i v^2}{\tau+\frac{d}{c}}\right\}\vartheta(\tau, v)$$

となる。

簡単な形をしているが重要な場合として $a=d=0$, $b=-1$, $c=1$ のときの公式がある：

$$\vartheta\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{v}{\tau}\right) = \exp\left(\frac{-\pi i}{4}\right)\sqrt{\tau}\ \exp\left\{\frac{\pi i v^2}{\tau}\right\}\vartheta(v, \tau)$$

これは、昔からよく知られているヤコービ虚変換：$(\tau, v) \mapsto (-1/\tau, v/\tau)$ に対応するものである。この変換の重要性は、それと、付加的な変数変換 $(\tau, v) \rightarrow (\tau+2, v)$, $(\tau, v) \longrightarrow (\tau, -v)$ などが命題6.1の条件を満たす行列 A のなす群の作用を生成していることからも判る。実際ガウス和の相互則はこの特別な公式を一般の変換公式に絡ませたときにコサイクル条件として得られる。すなわち一般公式の τ, v に夫々 $-1/\tau$, v/τ を代入したとき右辺に現れる $\vartheta(-1/\tau, v/\tau)$ に、さらに上の特別な公式の右辺を代入して得られる等式と、積行列

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$$

に対応する一般公式とを比較するのである。その結果は等式

$$\mathcal{S}_{c,d}\exp\left(\frac{-\pi i}{4}\right)\sqrt{\frac{d\tau-c}{\tau}}\sqrt{\tau} = \mathcal{S}_{d,-c}\sqrt{d\tau-c}$$

であるが、もちろんここに現れる平方根はすべて規約に従って右半平面にあるものとして決められていることを忘れてはならない。(ここで $cd \neq 0$ が仮定されている。) 要するに問題は比

$$\rho := \sqrt{\frac{d\tau - c}{\tau}} \cdot \sqrt{\tau} \Big/ \sqrt{d\tau - c}$$

の決定であるが、これは明らかに ± 1 であり、上半平面は連結なので c, d のみによって決っている。従って $\tau = i$ と置いて計算すればよい:

$$\rho = \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right) \sqrt{\alpha} \Big/ \sqrt{i\alpha}$$

$$\alpha := d + ci$$

ρ の絶対値は判っているから、$\sqrt{\alpha}, \sqrt{i\alpha}$ の偏角をそれらが右半平面にあるという条件からどのように決めるかの問題である。そのためには $\alpha, i\alpha$ の偏角を $-\pi, \pi$ までの間にとり、それらの半分を割り当ればよいだけである。すなわち

$\frac{\pi}{2} < \arg(\alpha) < \pi$ のとき

$$\arg(i\alpha) = \arg(\alpha) - \frac{3\pi}{2}$$

$-\pi < \arg(\alpha) < \frac{\pi}{2}$ のとき

$$\arg(i\alpha) = \arg(\alpha) + \frac{\pi}{2}$$

となる。ここで

$$\frac{\pi}{2} < \arg(\alpha) < \pi \iff c > 0,\ d < 0$$

に注意すれば結果は

$$\arg(\rho) = \frac{\pi}{4} + \arg(\sqrt{\alpha}) - \arg(\sqrt{i\alpha})$$
$$= \frac{\pi(1+\mathrm{sgn}(c))(1-\mathrm{sgn}(d))}{4}$$

とまとめられる。すなわち

$$\exp\left(\frac{-\pi i}{4}\right)\rho = \exp\left[\frac{\pi i\{\mathrm{sgn}(c)-\mathrm{sgn}(d)-\mathrm{sgn}(cd)\}}{4}\right]$$

上のコサイクル条件に戻ると、$S_{c,d}$, $S_{d,-c}$ の定義から、ガウス和の相互則

$$\frac{S_{d,-c}}{\sqrt{|d|}} = \exp\left\{\frac{\pi i\ \mathrm{sgn}(cd)}{4}\right\}\frac{S_{c,d}}{\sqrt{|c|}}$$

が証明されている.

ここで、この相互則自体の中に行列 A の第一行 a, b が全然現れていないのを不思議に思われるであろう。すなわち、等式の成立条件を明確にしておかねばならない。$cd \neq 0$, $cd \equiv 0 \bmod 2$ は当然仮定される。それから $ad-bc=1$ となるような a, b の存在を保証するために c, d は互に素、すなわち

$$(c, d) = 1$$

を付け加える。見付けた a, b が自動的に条件 $ab \equiv 0 \mod 2$ を満たしているかと言うと必ずしもそうではないが、新たな条件を補う必要はない。 $ab \equiv 1 \mod. 2$ のときは，a, b を夫々 $a+c$，$b+d$ で置き換えればよいからである。実際

$$(a+c)(b+d) = ab + (ad-bc) + 2bc + cd \equiv 1 + 1 \equiv 0 \mod. 2$$

となる。

8. ガウス和の決定

前節では $cd \neq 0$, $cd \equiv 0 \bmod 2$, $(c, d) = 1$ であるような整数対 c, d に対して、ガウス和

$$S_{c,d} = \sum_{k \in \mathbb{Z}/c\mathbb{Z}} \exp\left\{-\pi i \frac{d}{c} k^2\right\}$$

を考え、$S_{c,d}$ と $S_{d,-c}$ の間に成り立つ単純な関係として相互則を導いた。その関係が相互的すなわち反射的であることは自明な等式

$$S_{-c,-d} = S_{c,d}$$

から明らかである。上の定義式の和記号にかかわる k は有限環 $\mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$ の全体上を動けばよいから、a が c と互に素な整数であるとき、k を ak で置きかえても和の全体は変わらない。他方これは d を a^2d で置き換える操作でもあるから、等式

$$(8.1) \qquad S_{c,a^2d} = S_{c,d} \qquad ((a,c)=1)$$

が成り立つ。

次に c が互に素な因子 c_1, c_2 の積に分解するときに次の公式が成り立つことを証明しよう：

$$(8.2) \qquad S_{c_1c_2,d} = S_{c_1,c_2d} \cdot S_{c_2,c_1d}$$

但し、$c_1c_2d \equiv 0 \bmod 2$, $\quad (c_1, c_2) = (c_1c_2, d) = 1$

まず仮定によって $a_1c_1+a_2c_2=1$ となる整数 a_1, a_2 が存在する。またこのとき、環 $\mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}/c_k\mathbb{Z}$ ($k=1, 2$) の上への標準準同型写像により環の直和

$$\mathbb{Z}/c_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/c_2\mathbb{Z}$$

と同型であることに注意しよう。従って、もし

$$k \equiv k_1 \mod . c_2 , \quad k \equiv k_2 \mod . c_1$$

であるならば等式

$$\begin{aligned} \exp\left\{-\pi i \frac{d}{c} k^2\right\} &= \exp\left\{-\pi i \frac{d}{c_1c_2}(a_1c_1+a_2c_2)^2 k^2\right\} \\ &= \exp\left\{-\pi i \frac{dc_1}{c_2} a_1^2 k_1^2\right\} \exp\left\{-\pi i \frac{dc_2}{c_1} a_2^2 k_2^2\right\} \end{aligned}$$

が成り立つ。これから $S_{c,d} = S_{c_1, c_2a_2^2d} \cdot S_{c_2, c_1a_1^2d}$ が導かれるが (8.1) により (8.2) が証明されていることになる。

公式 (8.2) により、全ガウス和 $S_{c,d}$ の決定は c が素数のベキであるときのガウス和の決定の問題に帰着された。しかし、更なる簡約が可能である。すなわち二つの公式

$$(8.3) \quad S_{p^e, d} = p\, S_{p^{e-2}, d} \qquad (p: \text{奇素数}, \ e \geqq 2)$$

$$(8.4) \quad S_{2^e, d} = 2\, S_{2^{e-2}, d} \qquad (e \geqq 3)$$

が証明される。

どちらの証明も殆ど同じ論法で行われる。ただ2ベキに対しては一点だけ微妙な所があって、そのため制限 $e \geqq 3$ が付いている。ここでは(8.3)のみを証明する；

自然数 l に対して $R^{(l)}$ は有限環 $\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}$ を表すものとし、$R^{(l)}$ の最大イデアルを $\mathfrak{p}$ で表す。

$$\mathfrak{p}^m = p^m R^{(l)} = p^m \mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z} \qquad (1 \leq m \leq l)$$

ここから l はひとまず e とし、U は $R^{(e)}$ の単数群とする。すなわち

$$U = R^{(e)} - \mathfrak{p}$$

(8.3)の左辺のガウス和は定義により $R^{(e)}$ 上の和であったが、我々はこれを U 上の和と $\mathfrak{p}$ 上の和とに分けて考える。

まず U 上の和が 0 であることを示す。そのため U は一般に法 $\mathfrak{p}^m$ の合同類に分解することに注意しよう。$\mathfrak{p}$ は最大イデアルなので、単数と法 $\mathfrak{p}^m$ で合同な元はすべて単数だからである。すなわちこの考えを $m = e-1$ のときに適用して U 上の和を更に U に含まれる法 $\mathfrak{p}^{e-1}$ 合同類上の和に分解しよう。このような和がすべて 0 であることが示されれば目的は達せられたことになる。

今 $u \in U$ を固定すると u の属する合同類の元は

$$u + sp^{e-1} \ \ (\mathrm{mod.}\ p^e) \qquad s = 0, 1, 2, \cdots, p-1$$

と表される。従ってこの類上の和は、

$$\exp\left\{-\pi i \frac{d}{p^e} u^2\right\} \sum_{s=0}^{p-1} \exp\left\{-\frac{2\pi i d u}{p} s\right\} = 0$$

である。（ここで仮定 $d \equiv 0 \bmod.2$ ，$e \geqq 2$ すなわち $2e-2 \geqq e$ が用いられた。）これでガウス和は $\mathcal{S}$ 上の和であることが示された。

$\mathcal{S}$ 上の和を計算するために、p が $\mathbb{Z} \ni k \longrightarrow pk \in \mathbb{Z}$ の引き起こす加群の単射準同型

$$R^{(e-1)} \longrightarrow R^{(e)}$$

の像であることに注意しよう。これにより

$$S_{p^e, d} = \sum_{k \in R^{(e-1)}} \exp\left\{-\pi i \frac{d}{p^{e-2}} k\right\}$$

$$= p \sum_{k \in R^{(e-2)}} \exp\left\{-\pi i \frac{d}{p^{e-2}} k\right\} = p\, S_{p^{e-2}, d}$$

が示される。要するに値 $\exp\left\{-\pi i \frac{d}{p^{e-2}} k\right\}$ は $k \bmod. p^{e-2}$ によって決っているので p 個の項毎に値の一致が起ると言うことである。

この議論を反省して見ると、p が奇素数のとき d は偶数であるので、$e=2$ のときでも

$$\exp\left\{-\pi i\, d s^2 p^{e-2}\right\} = 1$$

が成り立つことが鍵であったことに気付く。$p=2$ のときは逆に d は奇数となって $e \geqq 3$ でなければ、これは保証されない。このようなことなどが (8,4) への制限の由来である。

公式 (8,3), (8,4) によって全ガウス和の決定は奇素数 p と、p と素

な偶数dに対する$S_{p,d}$、および奇数dに対する$S_{4,d}$, $S_{2,d}$の決定に帰着された。

後者の二つのタイプの和はしかし、直接計算により容易に求められる:

$$S_{2,d} = 1 + \exp\left(\frac{-\pi i d}{2}\right)$$
$$= (-1)^{\frac{d^2-1}{8}} \sqrt{2} \exp\left(\frac{-\pi i d}{4}\right)$$

$$S_{4,d} = 1 + \exp\left(\frac{-\pi i d}{4}\right) + \exp(-\pi i d) + \exp\left(\frac{-\pi i d}{4}\right)$$
$$= 2 \exp\left(\frac{-\pi i d}{4}\right)$$

両者をまとめて(8,4)と接続すれば、公式

$$(8.5) \quad S_{2^e,d} = (-1)^{\frac{e(d^2-1)}{8}} \; 2^{\frac{e}{2}} \exp\left(\frac{-\pi i d}{4}\right)$$

が得られる。もちろんdは奇数である。

残る$S_{p,d}$の決定にはルジャンドル記号

$$\left(\frac{*}{p}\right)$$

が必要となる。一応定義すると、これは$*$ mod. pが体$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$の乗法群$\mathbb{F}_p^\times$の平方元であるかないかに従って1または$-1$の値を取るものである。

最初に$S_{p,-2}$を決めよう。そのためには前節の相互則と(8,5)を用いればよい。

$$S_{p,-2} = \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right)\sqrt{\frac{p}{2}} \cdot S_{2,p}$$
$$= (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}\sqrt{p}\,\exp\left(\frac{\pi i(1-p)}{4}\right)$$
$$= (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}\, i^{\frac{1-p}{2}}\sqrt{p} \;\; = \;\; i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}\sqrt{p}$$

この結果に注意して、偶数 d を

$$d = -2a \qquad (a, p) = 1$$

の形に書こう。定義により

$$S_{p,-2a} = \sum_{k \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \exp\left\{2\pi i\,\frac{ak^2}{p}\right\}$$
$$= 1 + 2\sum_{k \in \mathbb{F}_p^{\times 2}} \exp\left\{\frac{2\pi i\,ak}{p}\right\}$$

但し $\mathbb{F}_p^{\times 2}$ は $\mathbb{F}_p^{\times}$ の平方元集合を表す。他方明らかに

$$0 = \sum_{k \in \mathbb{F}_p} \exp\left\{\frac{2\pi i a k}{p}\right\} = 1 + \sum_{k \in \mathbb{F}_p^{\times}} \exp\left\{\frac{2\pi i a k}{p}\right\}$$

($(a, p) = 1$ に注意。) 二つの等式の差を作れば

$$S_{p,-2a} = \sum_{k \in \mathbb{F}_p^{\times}} \left(\frac{k}{p}\right) \exp\left\{\frac{2\pi i a k}{p}\right\}$$

或いは

$$\left(\frac{a}{p}\right) S_{p,-2a} = \sum_{k \in \mathbb{F}_p^\times} \left(\frac{ak}{p}\right) \exp\left\{\frac{2\pi i a k}{p}\right\}$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{F}_p^\times} \left(\frac{k}{p}\right) \exp\left\{\frac{2\pi i k}{p}\right\} = S_{p,-2}$$

結局

$$(8.6) \quad S_{p,-2a} = \left(\frac{a}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p}$$

となって、この場合のガウス和も決定された。$d = -2a$ の方から見れば $(a \bmod . p) \equiv (-2d \bmod . p) \bmod . \mathbb{F}_p^{\times 2}$ だから

$$(8.6)' \quad S_{p,d} = \left(\frac{-2d}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p}$$

と表現した方が良いかも知れない。いわゆる第一、第二の補充則を用いればもっと簡単な形にすることもできる；

$$(8.6)'' \quad S_{p,d} = \left(\frac{d}{p}\right) i^{\frac{p-1}{2}} \sqrt{p}$$

二つの補充則自体を導くには (8.6)′ において適当な d を選び、左辺をガウス和の相互則を用いて計算すればよい。詳細はバランス上、次節に回す。

9. 平方剰余の相互則

公式(8.6)″を証明するために、まず約束の補充則を導こう。(8.6)′で $d=2$ と置けば

$$S_{p,2} = \left(\frac{-1}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p}$$

他方、ガウス和の相互則と(8.5)により

$$\begin{aligned} S_{p,2} &= \exp\left(\frac{-\pi i}{4}\right)\sqrt{\frac{p}{2}}\, S_{2,-p} \\ &= (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} \exp\left\{\frac{\pi i (p-1)}{4}\right\}\sqrt{p} \\ &= (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}\, i^{\frac{p-1}{2}} \sqrt{p} \end{aligned}$$

また

$$i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}\, i^{\frac{1-p}{2}}$$

であったから、上の等式との比較により、奇素数 p に対して

$$(9.1) \qquad \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

が示された。次に(8.6)′で $d=-4$ と置けば

$$S_{p,-4} = \left(\frac{2}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p}$$

前と同様にして左辺を計算すると

$$S_{p,-4} = \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right)\frac{\sqrt{p}}{2}\, S_{4,p}$$

$$= \exp\left(\frac{\pi i(1-p)}{4}\right)\sqrt{p} = i^{\frac{1-p}{2}}\sqrt{p}$$

すぐ上の等式と比較すれば、第二補充則

$$(9.2) \qquad \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$$

が証明されている。これで(8.6)″も確立された。

さて、いよいよ平方剰余の相互則の証明であるが、まず(8.6)″によって等式

$$S_{p,2q} = \left(\frac{2q}{p}\right) i^{\frac{p-1}{2}}\sqrt{p}$$

すなわち

$$\frac{S_{p,2q}}{\sqrt{p}} = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}\, i^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{q}{p}\right)$$

が得られる。(qはpと異なる奇素数とする。)これに対して比較の相手は(8.2), (8.5), (8.6)″などによって

$$S_{2q,-p} = S_{2,-pq}\, S_{q,-2p}$$

$$= \sqrt{2}\,(-1)^{\frac{p^2q^2-1}{8}} \exp\left\{\frac{\pi i p q}{4}\right\}\left(\frac{-2p}{q}\right) i^{\frac{q-1}{2}}\sqrt{q}$$

すなわち

$$\exp\left(\frac{-\pi i}{4}\right)\frac{S_{2q,-p}}{\sqrt{2q}}$$
$$= (-1)^{\frac{p^2q^2-1}{8}-\frac{q^2-1}{8}}\ i^{\frac{pq-1}{2}+\frac{1-q}{2}}\left(\frac{p}{q}\right)$$

と計算される。ガウス和の相互則によって両者は等しいから、平方剰余の相互則

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}\left(\frac{p}{q}\right)$$

が導かれている。($p^2\equiv q^2\equiv 1 \mod .8$ なので

$$(-1)^{\frac{(p^2-1)(q^2-1)}{8}} = 1$$

であることに注意.)

こうして我々は、平方剰余の相互則が基本のテータ関数 $\vartheta(\tau, v)$ に対する部分群

$$\Gamma' = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z})\ \middle|\ ab\equiv cd\equiv 0 \mod. 2\right\}$$

の作用より生ずる保型因子のコサイクル条件から導かれるのを見た。これはマンフォード（Mumford）の本、Tata Lectures on Theta I, 1983の中で示唆されていた方法を、自己流の工夫も加えて完全な証明に仕上げたものである。何故そのようなことを試みたかと言うと、それはテータのような解析関数が、平方剰余の相互則のような、今尚神秘をたたえている数論的本質を含んでいることに一種の驚きのような感動を覚えた

からである。私は学生の頃、ヴェイユのケーラー多様体の本を通して、一般のアーベル多様体と多変数テータとの関連について勉強したときその記述の完璧さに驚いたことがあるが、一次元の場合はもっとずっと強い構造が事柄に内在していることを初めて知ったのである。そこで思い出されるのがクロネッカーの有名な言葉

Die ganzen Zahlen hat der liebe gott gemacht,
alles andere ist Menschenwerk

である。これはもちろん一種の信仰告白であるが、あらゆる任意性、不定性を、思考の規定作用によって取り除いて行ったとき最終的に人間の意識に現れるのはディスクリートな（即ち分離され際立って見える）対象であろう。数に限定するとしたら、そのようなものは（有限的なものを除けば）整数であると思う。これはしかし或る意味でいわゆる数論の発展はそれ自体の、と言うよりむしろ他の分野の発展を前提として来たようにも見えるからである。バランスの取れた諸分野の発展の中に現れた数学的本質が自己を表現するとき、たまたま整数の衣装を借りると言う方が本当らしく聞こえるのである。思想の領域での断定は禁物であるが、岡先生の遺稿の中には数学ばかりでなく全世界が現れる感があるとの話を洩れ聞くことがあった。先生のような天才には及びもつかない者であっても同じ位純粋に考えて見ようと願うことは許されていると思い講演をお引き受けした次第である。組織委員の先生方にあらためて心からの感謝を述べてこの小論を終える。

記法上の注意；この小論での $S_{c,d}$ はマンフォードでは $S_{d,c}$ と記されているものである。定義式の各項の属する円分体や和の絶対値などを示しているcを先に書いたのである。マンフォードの意図はよく判らないが一つには分数 d/c を念頭においているのかも知れない。ϑ などの関数の二つの変数を明示するときはモジュラスを先に本来の変数を後に配置して、$\vartheta(\tau, v)$ などと書いた。また τ を止めて v のみの関数と見ているときは単に $\vartheta(v)$ と書かれている。記号 ϑ はギリシャ文字 θ の筆記体のようにも見える。これはしかし歴史上'熱'を表す頭文字であったようである。他にも自己流の記法がいくつかあるかも知れないが、どうか御理解をお願いしたい。