準遺伝代数について

塚本 真由

山口大学

2022 年 9 月 20 日

はじめに

専門分野: 代数 (多元環) の表現論

代数 A を調べるために, A-加群のなす圏 $\mathrm{mod}\,A$ を調べる分野

はじめに

専門分野: 代数 (多元環) の表現論

代数 A を調べるために, A-加群のなす圏 $\mathrm{mod}\, A$ を調べる分野

代数 "=" (非可換) 環 + ベクトル空間

例

- 体: K
- 多項式代数: $K[X]$
- 全行列代数:

$$M_3(K) := \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \middle| \; a_{ij} \in K \right\}$$

- 上半三角行列代数:

$$T_3(K) := \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \middle| \; a_{ij} \in K \right\}$$

はじめに

加群 “=” 代数の作用が定まったベクトル空間

はじめに

加群 "=" 代数の作用が定まったベクトル空間

例

- $A := K$: 体 $\Rightarrow$ K-加群 $=$ K-ベクトル空間
- A: 代数 $\Rightarrow$ A: A-加群
  射影加群 $=$ A-加群として A の直和やその直和因子となる加群
- $A := T_3(K) := \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \middle| \ a_{ij} \in K \right\} = \begin{pmatrix} K & K & K \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}$
  $P(1) := \begin{pmatrix} K & K & K \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P(2) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P(3) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}$
  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & K & K \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P(2)$: (右)$A$-加群

大域次元

A: 有限次元代数, 加群 = 有限次元加群

$$\operatorname{gldim} A := \sup\{\operatorname{pdim} M \mid M : A\text{-加群}\} : \ A \text{ の大域次元}$$

大域次元

A: 有限次元代数, 加群 $=$ 有限次元加群

$$\operatorname{gldim} A := \sup\{\operatorname{pdim} M \mid M : A\text{-加群}\} : \ A \text{ の大域次元}$$

注意

大域次元が有限な代数は "正則環の非可換類似" とみなせる

大域次元

A: 有限次元代数, 加群 = 有限次元加群

$$\mathrm{gldim}\, A := \sup\{\mathrm{pdim}\, M \mid M : A\text{-加群}\} : \ A \text{ の大域次元}$$

注意

大域次元が有限な代数は "正則環の非可換類似" とみなせる

問題

大域次元が有限な代数を構成せよ

大域次元

A: 有限次元代数, 加群 $=$ 有限次元加群

$$\mathrm{gldim}\, A := \sup\{\mathrm{pdim}\, M \mid M : A\text{-加群}\} : \ A \text{ の大域次元}$$

注意

大域次元が有限な代数は “正則環の非可換類似” とみなせる

問題

大域次元が有限な代数を構成せよ

定理 [Auslander (1971)]

任意の代数 A から $\mathrm{gldim}\, B_A < \infty$ となる代数 B_A を構成できる
さらに, A は B_A の “部分代数” となる (i.e., $\exists A \hookrightarrow B_A$)

大域次元

A: 有限次元代数, 加群 = 有限次元加群

$$\operatorname{gldim} A := \sup\{\operatorname{pdim} M \mid M : A\text{-加群}\} : \ A \text{ の大域次元}$$

注意

大域次元が有限な代数は “正則環の非可換類似” とみなせる

問題

大域次元が有限な代数を構成せよ

定理 [Auslander (1971), Dlab–Ringel (1989), Iyama (2003)]

任意の代数 A から $\begin{cases} \operatorname{gldim} B_A < \infty \\ B_A \text{ が (強) 準遺伝代数} \end{cases}$ となる代数 B_A を構成できる

さらに, A は B_A の “部分代数” となる (i.e., $\exists A \hookrightarrow B_A$)

準遺伝代数

定理 [Auslander (1971), Dlab–Ringel (1989), Iyama (2003)]

任意の代数 A から $\begin{cases} \mathrm{gldim}\, B_A < \infty \\ B_A \text{ が (強) 準遺伝代数} \end{cases}$ となる代数 B_A を構成できる
さらに, A は B_A の "部分代数" となる (i.e., $\exists A \hookrightarrow B_A$)

大域次元が有限な代数を構成する方針

A: 強準遺伝代数 $\Rightarrow$ A: 準遺伝代数 $\overset{\text{[Cline–Parshall–Scott]}}{\Longrightarrow}$ $\mathrm{gldim}\, A < \infty$
$\rightsquigarrow$ (強) 準遺伝代数を構成する

準遺伝代数

定理 [Auslander (1971), Dlab–Ringel (1989), Iyama (2003)]

任意の代数 A から $\begin{cases} \mathrm{gldim}\, B_A < \infty \\ B_A \text{ が (強) 準遺伝代数} \end{cases}$ となる代数 B_A を構成できる

さらに, A は B_A の “部分代数” となる (i.e., $\exists A \hookrightarrow B_A$)

大域次元が有限な代数を構成する方針

A: 強準遺伝代数 $\Rightarrow$ A: 準遺伝代数 $\overset{\text{[Cline–Parshall–Scott]}}{\Longrightarrow}$ $\mathrm{gldim}\, A < \infty$

$\rightsquigarrow$ (強) 準遺伝代数を構成する

注意

- 表現次元の有限性予想の解決 [Iyama (2003)]
- 非可換代数幾何学への応用 [Orlov (2018)]

準遺伝代数の歴史

リー代数や代数群の表現論

加群圏が大き過ぎて調べることが困難 $\rightsquigarrow$ “良い加群” のなす圏に着目
“良い加群” のなす圏の性質を抽出 $\rightsquigarrow$ 最高ウエイト圏

準遺伝代数の歴史

リー代数や代数群の表現論

加群圏が大き過ぎて調べることが困難 $\rightsquigarrow$ "良い加群" のなす圏に着目
"良い加群" のなす圏の性質を抽出 $\rightsquigarrow$ 最高ウエイト圏

定理 [Cline–Parshall–Scott (1988)]

"最高ウエイト圏" は準遺伝代数の加群圏として実現される

準遺伝代数の歴史

リー代数や代数群の表現論

加群圏が大き過ぎて調べることが困難 $\rightsquigarrow$ “良い加群” のなす圏に着目
“良い加群” のなす圏の性質を抽出 $\rightsquigarrow$ 最高ウエイト圏

定理 [Cline–Parshall–Scott (1988)]

“最高ウエイト圏” は準遺伝代数の加群圏として実現される

例 (リー代数や代数群の表現論)

- 複素半単純リー代数の圏 $\mathcal{O}$ [Bernstein–Gelfand–Gelfand (1976)]
- シューア代数及びその q-類似
  [Green (1980), Dipper-James (1989)]

準遺伝代数の歴史

リー代数や代数群の表現論

加群圏が大き過ぎて調べることが困難 $\rightsquigarrow$ “良い加群” のなす圏に着目
“良い加群” のなす圏の性質を抽出 $\rightsquigarrow$ 最高ウエイト圏

定理 [Cline–Parshall–Scott (1988)]

“最高ウエイト圏” は準遺伝代数の加群圏として実現される

例 (リー代数や代数群の表現論)

- 複素半単純リー代数の圏 $\mathcal{O}$ [Bernstein–Gelfand–Gelfand (1976)]
- シューア代数及びその q-類似
  [Green (1980), Dipper-James (1989)]

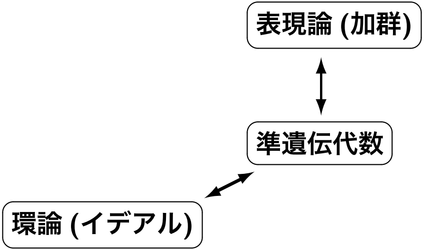
例 (代数幾何)

- ある仮定を満たす偏屈層のなす圏 [Parshall–Scott (1988)]

問題: 与えられた代数がいつ強準遺伝代数になるのか?

目的: 強準遺伝代数の特徴付けを与える

- 準遺伝代数

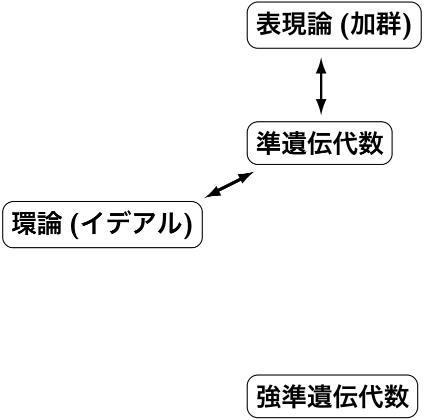


- 強準遺伝代数

問題: 与えられた代数がいつ強準遺伝代数になるのか?

目的: 強準遺伝代数の特徴付けを与える

- 準遺伝代数



- 強準遺伝代数

問題: 与えられた代数がいつ強準遺伝代数になるのか?

目的: 強準遺伝代数の特徴付けを与える

- 準遺伝代数

表現論 (加群)

$\updownarrow$

準遺伝代数

$\swarrow\!\!\nearrow$

環論 (イデアル)

- 強準遺伝代数

表現論 (加群)

$\updownarrow$ 定義 [Ringel (2010)]

強準遺伝代数

問題: 与えられた代数がいつ強準遺伝代数になるのか?

目的: 強準遺伝代数の特徴付けを与える

- 準遺伝代数

表現論 (加群)

準遺伝代数

環論 (イデアル)

- 強準遺伝代数

表現論 (加群)

定義 [Ringel (2010)]

強準遺伝代数

環論 (イデアル)

問題: 与えられた代数がいつ強準遺伝代数になるのか?

目的: 強準遺伝代数の特徴付けを与える

- 準遺伝代数

表現論 (加群)

準遺伝代数

環論 (イデアル)

- 強準遺伝代数

表現論 (加群)

定義 [Ringel (2010)]

強準遺伝代数

環論 (イデアル)

圏論 (部分圏)

べき等元

K: 体, A: K-代数:“$\Leftrightarrow$” A: K-ベクトル空間の構造を備えた環

定義

- $e \in A$: べき等元 $:\Leftrightarrow e^2 = e$
- $e, f \in A$ が直交する $:\Leftrightarrow ef = 0 = fe$
- 原始べき等元 “=” べき等元の最小単位

性質

単位元 $1 \in A$ は互いに直交する原始べき等元の和に分解できる

$$1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$$

例

- $A := T_3(K) := \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \middle| \; a_{ij} \in K \right\} = \begin{pmatrix} K & K & K \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}$

  $1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e_1 + e_2 + e_3$: 直交原始べき等元の和に分解

  $e_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $P(1) := \begin{pmatrix} K & K & K \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P(2) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P(3) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}$

  $P(i) = e_i A$: 直既約射影加群
  (非自明な直和分解をもたない)

例

- $A := T_3(K) := \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \middle| \ a_{ij} \in K \right\} = \begin{pmatrix} K & K & K \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}$

  $1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e_1 + e_2 + e_3$: 直交原始べき等元の和に分解

  $e_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $P(1) := \begin{pmatrix} K & K & K \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P(2) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P(3) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}$

  $P(i) = e_i A$: 直既約射影加群
  (非自明な直和分解をもたない)

$$\begin{array}{ccc} \{e_1, e_2, \ldots, e_n\} & \overset{1:1\text{ 対応}}{\longleftrightarrow} & \{\text{ 直既約射影加群 }\} \\ e_i & \mapsto & P(i) = e_i A \end{array}$$

べき等元と部分圏の関係

以下, $e := \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$: (全) 順序集合とする $(e_1 < e_2 < \cdots < e_n)$

$$\varepsilon_i := e_i + e_{i+1} + \cdots + e_n, \quad \varepsilon_i A = e_i A \oplus e_{i+1} A \oplus \cdots \oplus e_n A$$

$$\mathrm{add}\, \varepsilon_i A \text{“}=\text{”} \{\varepsilon_i A, \varepsilon_i A \oplus \varepsilon_i A, e_i A, e_{i+1} A, \ldots\}$$

: 加群 $\varepsilon_i A$ の有限直和の直和因子からなる圏 $\overset{\text{部分圏}}{\subseteq}$ $\mathrm{proj}\, A$

$\{e$ 上の順序$\}$ $\qquad$ $e_1 < e_2 < \cdots < e_n$

べき等元と部分圏の関係

以下, $e := \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$: (全) 順序集合とする ($e_1 < e_2 < \cdots < e_n$)

$$\varepsilon_i := e_i + e_{i+1} + \cdots + e_n, \quad \varepsilon_i A = e_i A \oplus e_{i+1} A \oplus \cdots \oplus e_n A$$

add $\varepsilon_i A$ "=" $\{\varepsilon_i A, \varepsilon_i A \oplus \varepsilon_i A, e_i A, e_{i+1} A, \dots\}$

: 加群 $\varepsilon_i A$ の有限直和の直和因子からなる圏 $\overset{\text{部分圏}}{\subseteq}$ proj A

$\{e$ 上の順序 $\}$	$e_1 < e_2 < \cdots < e_n$
$\updownarrow$ 1:1 対応	$\updownarrow$
$\{A$ のべき等イデアルの列 $\}$	$A > A\varepsilon_2 A > \cdots > A\varepsilon_n A > 0$

べき等元と部分圏の関係

以下, $e := \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$: (全) 順序集合とする ($e_1 < e_2 < \cdots < e_n$)

$$\varepsilon_i := e_i + e_{i+1} + \cdots + e_n, \quad \varepsilon_i A = e_i A \oplus e_{i+1} A \oplus \cdots \oplus e_n A$$

$$\mathrm{add}\, \varepsilon_i A \text{“}=\text{”} \{\varepsilon_i A, \varepsilon_i A \oplus \varepsilon_i A, e_i A, e_{i+1} A, \dots\}$$

: 加群 $\varepsilon_i A$ の有限直和の直和因子からなる圏 $\overset{\text{部分圏}}{\subseteq}$ $\mathrm{proj}\, A$

$\{e$ 上の順序$\}$	$e_1 < e_2 < \cdots < e_n$
$\updownarrow$ 1:1 対応	$\updownarrow$
$\{A$ のべき等イデアルの列$\}$	$A > A\varepsilon_2 A > \cdots > A\varepsilon_n A > 0$
$\updownarrow$ 1:1 対応	$\updownarrow$
$\{\mathrm{proj}\, A$ の部分圏の列$\}$	$\mathrm{proj}\, A \supset \mathrm{add}\, \varepsilon_2 A \supset \cdots \supset \mathrm{add}\, \varepsilon_n A \supset 0$

準遺伝代数

$\{e$ 上の順序 $\}$ $\overset{\text{1:1 対応}}{\longleftrightarrow}$ $\{$ べき等元で生成される A の両側イデアルの列 $\}$

$e_1 < \cdots < e_n \quad \mapsto \qquad (*) : A > A\varepsilon_2 A > \cdots > A\varepsilon_n A > 0$

準遺伝代数

$\{e$ 上の順序 $\}$ $\overset{1:1\text{ 対応}}{\longleftrightarrow}$ $\{$ べき等元で生成される A の両側イデアルの列 $\}$

$e_1 < \cdots < e_n \quad \mapsto \qquad (*) : A > A\varepsilon_2 A > \cdots > A\varepsilon_n A > 0$

定義 [Cline-Parshall-Scott (1988)]

(A, e): 準遺伝代数
:$\Leftrightarrow$ 対応するイデアルの列 $(*)$ が次の条件 (a), (b) を満たす

(a) $A\varepsilon_i A / A\varepsilon_{i+1} A \in \mathrm{proj}(A / A\varepsilon_{i+1} A)$

(b) $\mathrm{End}_{A/A\varepsilon_{i+1}A}(\varepsilon_i A / \varepsilon_i A \varepsilon_{i+1} A)$ "$\cong$" K

準遺伝代数

$\{e$ 上の順序$\}$ $\overset{1:1\text{ 対応}}{\longleftrightarrow}$ $\{$べき等元で生成される A の両側イデアルの列$\}$
$e_1 < \cdots < e_n \quad \mapsto \qquad (*) : A > A\varepsilon_2 A > \cdots > A\varepsilon_n A > 0$

定義 [Cline-Parshall-Scott (1988)]

(A, e): 準遺伝代数
:$\Leftrightarrow$ 対応するイデアルの列 $(*)$ が次の条件 (a), (b) を満たす

(a) $A\varepsilon_i A / A\varepsilon_{i+1} A \in \mathrm{proj}(A/A\varepsilon_{i+1}A)$

(b) $\mathrm{End}_{A/A\varepsilon_{i+1}A}(\varepsilon_i A/\varepsilon_i A\varepsilon_{i+1}A)$ "$\cong$" K

定理 [Cline-Parshall-Scott (1988)]

(A, e): 準遺伝代数 $\Leftrightarrow$ $(\mathrm{mod}\, A, \leq)$: "最高ウエイト圏"

準遺伝代数

$\{e$ 上の順序$\}$ $\overset{1:1\text{ 対応}}{\longleftrightarrow}$ $\{$べき等元で生成される A の両側イデアルの列$\}$

$e_1 < \cdots < e_n \quad \mapsto \qquad (*) : A > A\varepsilon_2 A > \cdots > A\varepsilon_n A > 0$

定義 [Cline-Parshall-Scott (1988)]

(A, e): 準遺伝代数

:$\Leftrightarrow$ 対応するイデアルの列 $(*)$ が次の条件 (a), (b) を満たす

(a) $A\varepsilon_i A / A\varepsilon_{i+1} A \in \mathrm{proj}(A/A\varepsilon_{i+1}A)$

(b) $\mathrm{End}_{A/A\varepsilon_{i+1}A}(\varepsilon_i A / \varepsilon_i A\varepsilon_{i+1} A)$ "$\cong$" K

定義-定理 1 [Ringel (2010), T (2020)]

(A, e): 強準遺伝代数

$\Leftrightarrow$ 対応するイデアルの列 $(*)$ が次の条件 (a'), (b) を満たす

(a') $A\varepsilon_i A \in \mathrm{proj}\, A$

(b) $\mathrm{End}_{A/A\varepsilon_{i+1}A}(\varepsilon_i A / \varepsilon_i A\varepsilon_{i+1} A)$ "$\cong$" K

アウトライン

- 準遺伝代数

表現論 (加群)

$\updownarrow$

準遺伝代数

$\swarrow\!\nearrow$

環論 (イデアル)

- 強準遺伝代数

表現論 (加群)

$\updownarrow$ 定義 [Ringel (2010)]

強準遺伝代数

定理 1

環論 (イデアル)

圏論 (部分圏)

$$\{\, e \text{ 上の順序} \,\} \overset{\text{1:1 対応}}{\longleftrightarrow} \{\, A \text{ のイデアルの列} \,\} \overset{\text{1:1 対応}}{\longleftrightarrow} \{\, \mathrm{proj}\, A \text{ の部分圏の列} \,\}$$

削除鎖

$\varepsilon \in A$: べき等元

$\mathrm{add}\,\varepsilon A$“$=$”$\{\varepsilon A, \varepsilon A \oplus \varepsilon A, \ldots\}$: 加群 εA の直和の直和因子からなる圏

定義

A-加群の準同型 $\varphi : P \to X$: 右 $\mathrm{add}\,\varepsilon A$-近似 :$\Leftrightarrow$

- $P \in \mathrm{add}\,\varepsilon A$
- 任意の射 $f : P' \to X$ $(P' \in \mathrm{add}\,\varepsilon A)$ は φ を通過

削除鎖

$\varepsilon \in A$: べき等元

$\operatorname{add} \varepsilon A$“=”$\{\varepsilon A, \varepsilon A \oplus \varepsilon A, \ldots\}$: 加群 εA の直和の直和因子からなる圏

定義

A-加群の準同型 $\varphi : P \to X$: 右 $\operatorname{add} \varepsilon A$-近似 :⇔

- $P \in \operatorname{add} \varepsilon A$
- 任意の射 $f : P' \to X$ $(P' \in \operatorname{add} \varepsilon A)$ は φ を通過

定義 [Iyama (2003)]

$\operatorname{proj} A \supset \operatorname{add} \varepsilon_2 A \supset \cdots \supset \operatorname{add} \varepsilon_n A \supset 0$: 削除鎖
:⇔ 任意の i に対し, 次が成り立つ

(a) $e_i A$ は任意の $j \geq i+1$ に対し, 単射な $\operatorname{add} \varepsilon_j A$-近似をもつ

(b) 非自明な射 $e_i A \to e_i A$ は $\operatorname{add} \varepsilon_{i+1} A$ を通過する

削除鎖

$\varepsilon \in A$: べき等元

$\operatorname{add} \varepsilon A$ “=” $\{\varepsilon A, \varepsilon A \oplus \varepsilon A, \ldots\}$: 加群 εA の直和の直和因子からなる圏

定義

A-加群の準同型 $\varphi : P \to X$: 右 $\operatorname{add} \varepsilon A$-近似 :$\Leftrightarrow$

- $P \in \operatorname{add} \varepsilon A$
- 任意の射 $f : P' \to X$ $(P' \in \operatorname{add} \varepsilon A)$ は φ を通過

定義 [Iyama (2003)]

$\operatorname{proj} A \supset \operatorname{add} \varepsilon_2 A \supset \cdots \supset \operatorname{add} \varepsilon_n A \supset 0$: 削除鎖

:$\Leftrightarrow$ 任意の i に対し，次が成り立つ

(a) $e_i A$ は任意の $j \geq i+1$ に対し，単射な $\operatorname{add} \varepsilon_j A$-近似をもつ

(b) 非自明な射 $e_i A \to e_i A$ は $\operatorname{add} \varepsilon_{i+1} A$ を通過する

注意

(a) $\Leftrightarrow$ 包含関手 $\operatorname{add} \varepsilon_i A \hookrightarrow \operatorname{proj} A$ は “特別な” 右随伴関手をもつ

主結果

定理 2 [T (2020)]

(A, e): 強準遺伝代数
$\Leftrightarrow \operatorname{proj} A \supset \operatorname{add} \varepsilon_2 A \supset \cdots \supset \operatorname{add} \varepsilon_n A \supset 0$: 削除鎖

主結果

定理 2 [T (2020)]

(A, e): 強準遺伝代数
$\Leftrightarrow$ $\mathrm{proj}\, A \supset \mathrm{add}\, \varepsilon_2 A \supset \cdots \supset \mathrm{add}\, \varepsilon_n A \supset 0$: 削除鎖

証明の概略

$$
\begin{array}{lc}
\{e \text{ 上の順序}\} & e_1 < e_2 < \cdots < e_n \\
\updownarrow \ \text{1:1 対応} & \updownarrow \\
\{A \text{ のべき等イデアルの列}\} & A > A\varepsilon_2 A > \cdots > A\varepsilon_n A > 0 \\
\updownarrow \ \text{1:1 対応} & \updownarrow \\
\{\mathrm{proj}\, A \text{ の部分圏の列}\} & \mathrm{proj}\, A \supset \mathrm{add}\, \varepsilon_2 A \supset \cdots \supset \mathrm{add}\, \varepsilon_n A \supset 0
\end{array}
$$

主結果

定理 2 [T (2020)]

(A, e): 強準遺伝代数
$\Leftrightarrow$ $\mathrm{proj}\, A \supset \mathrm{add}\, \varepsilon_2 A \supset \cdots \supset \mathrm{add}\, \varepsilon_n A \supset 0$: 削除鎖

証明の概略

$$
\begin{array}{lcl}
\{e \text{ 上の順序}\} & e_1 < e_2 < \cdots < e_n & : \text{強準遺伝代数} \\
\updownarrow \ \text{1:1 対応} & \updownarrow & \\
\{A \text{ のべき等イデアルの列}\} & A > A\varepsilon_2 A > \cdots > A\varepsilon_n A > 0 & \\
\updownarrow \ \text{1:1 対応} & \updownarrow & \\
\{\mathrm{proj}\, A \text{ の部分圏の列}\} & \mathrm{proj}\, A \supset \mathrm{add}\, \varepsilon_2 A \supset \cdots \supset \mathrm{add}\, \varepsilon_n A \supset 0 &
\end{array}
$$

主結果

定理 2 [T (2020)]

(A, e): 強準遺伝代数
$\Leftrightarrow$ $\mathrm{proj}\,A \supset \mathrm{add}\,\varepsilon_2 A \supset \cdots \supset \mathrm{add}\,\varepsilon_n A \supset 0$: 削除鎖

証明の概略

$$
\begin{array}{lcl}
\{e\text{ 上の順序}\} & e_1 < e_2 < \cdots < e_n & :\ \text{強準遺伝代数} \\
\updownarrow\ \text{1:1 対応} & \updownarrow & \Updownarrow\ \text{定理 1} \\
\{A\text{ のべき等イデアルの列}\} & A > A\varepsilon_2 A > \cdots > A\varepsilon_n A > 0 & :\ \text{(a'),(b) を満たす} \\
\updownarrow\ \text{1:1 対応} & \updownarrow & \\
\{\mathrm{proj}\,A\text{ の部分圏の列}\} & \mathrm{proj}\,A \supset \mathrm{add}\,\varepsilon_2 A \supset \cdots \supset \mathrm{add}\,\varepsilon_n A \supset 0 &
\end{array}
$$

主結果

定理 2 [T (2020)]

(A, e): 強準遺伝代数
$\Leftrightarrow$ $\mathrm{proj}\,A \supset \mathrm{add}\,\varepsilon_2 A \supset \cdots \supset \mathrm{add}\,\varepsilon_n A \supset 0$: 削除鎖

証明の概略

$\{e$ 上の順序 $\}$ $\quad e_1 < e_2 < \cdots < e_n$: 強準遺伝代数

$\updownarrow$ 1:1 対応 $\quad \updownarrow \quad \Updownarrow$ 定理 1

$\{A$ のべき等イデアルの列 $\}$ $\quad A > A\varepsilon_2 A > \cdots > A\varepsilon_n A > 0$: (a'),(b) を満たす

$\updownarrow$ 1:1 対応 $\quad \updownarrow \quad \Updownarrow$

$\{\mathrm{proj}\,A$ の部分圏の列 $\}$ $\quad \mathrm{proj}\,A \supset \mathrm{add}\,\varepsilon_2 A \supset \cdots \supset \mathrm{add}\,\varepsilon_n A \supset 0$: 削除鎖

問題: どんな代数が強準遺伝代数となるか?

注意

- 強準遺伝代数は, 代数とべき等元 e 上の順序の組で定義される概念
- 問題: 強準遺伝代数となるか? $\rightsquigarrow$ e 上の順序はあるか?どう決めるか?

問題: どんな代数が強準遺伝代数となるか?

注意

- 強準遺伝代数は, 代数とべき等元 e 上の順序の組で定義される概念
- 問題: 強準遺伝代数となるか? $\rightsquigarrow$ e 上の順序はあるか?どう決めるか?

方針: 削除鎖の研究を用いて e 上の順序の取り方の指針を与える

- $\{$ 強準遺伝代数となる e 上の順序 $\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{$ $\mathrm{proj}\, A$ の削除鎖 $\}$ ($\because$ 定理 2)
- 問題: 強準遺伝代数となるか? $\rightsquigarrow$ 削除鎖を構成できるか?

問題: どんな代数が強準遺伝代数となるか?

注意

- 強準遺伝代数は, 代数とべき等元 e 上の順序の組で定義される概念
- 問題: 強準遺伝代数となるか? $\rightsquigarrow$ e 上の順序はあるか?どう決めるか?

方針: 削除鎖の研究を用いて e 上の順序の取り方の指針を与える

- { 強準遺伝代数となる e 上の順序 } $\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ { proj A の削除鎖 } ($\because$ 定理 2)
- 問題: 強準遺伝代数となるか? $\rightsquigarrow$ 削除鎖を構成できるか?

補題 [Iyama (2003)]

pdim top$(eA) \leq 1$ となるべき等元 $e \in A$ が存在 (確認しやすい条件)
$\Rightarrow$ proj $A \supseteq$ add$(1-e)A$: 削除鎖構成の “第一段階”
i.e., (a) eA は proj A で単射な add$(1-e)A$-近似をもつ
(b) 非自明な射 $eA \to eA$ は add$(1-e)A$ を通過する

問題: どんな代数が強準遺伝代数となるか?

補題 [Iyama (2003)]

$\operatorname{pdim}\operatorname{top}(eA) \leq 1$ となるべき等元 $e \in A$ が存在 (確認しやすい条件)
$\Rightarrow \operatorname{proj} A \supseteq \operatorname{add}(1-e)A$: 削除鎖構成の "第一段階"
i.e., (a) eA は $\operatorname{proj} A$ で単射な $\operatorname{add}(1-e)A$-近似をもつ
(b) 非自明な射 $eA \to eA$ は $\operatorname{add}(1-e)A$ を通過する

観察: どのような条件を満たせば削除鎖を持つか?

- 補題のべき等元を "取り除き続ける" ことができる (比較的簡単)
  - $(A, \{e_1, e_2, e_3\})$
    e_1: 補題のべき等元 $\Rightarrow \operatorname{proj} A \supset \operatorname{add} \varepsilon_2 A$, $\varepsilon_2 := 1 - e_1$
  - $(\varepsilon_2 A \varepsilon_2, \{e_2, e_3\})$
    e_2: 補題のべき等元 $\Rightarrow \operatorname{proj} \varepsilon_2 A \varepsilon_2 \supset \operatorname{add} \varepsilon_3 A \varepsilon_2$, $\varepsilon_3 := \varepsilon_2 - e_2$
    i.e., $e_2 A$ は $\operatorname{proj} \varepsilon_2 A \varepsilon_2$ で単射な $\operatorname{add} \varepsilon_3 A$-近似をもつ
  - $\operatorname{proj} A \supset \operatorname{add} \varepsilon_2 A \supset \operatorname{add} \varepsilon_3 A \supset 0$

問題: どんな代数が強準遺伝代数となるか?

補題 [Iyama (2003)]

pdim top$(eA) \leq 1$ となるべき等元 $e \in A$ が存在 (確認しやすい条件)
$\Rightarrow$ proj $A \supseteq$ add$(1-e)A$: 削除鎖構成の "第一段階"
i.e., (a) eA は proj A で単射な add$(1-e)A$-近似をもつ
(b) 非自明な射 $eA \to eA$ は add$(1-e)A$ を通過する

観察: どのような条件を満たせば削除鎖を持つか?

- 補題のべき等元を "取り除き続ける" ことができる (比較的簡単)
  - $(A, \{e_1, e_2, e_3\})$
    e_1: 補題のべき等元 $\Rightarrow$ proj $A \supset$ add $\varepsilon_2 A$, $\varepsilon_2 := 1 - e_1$
  - $(\varepsilon_2 A \varepsilon_2, \{e_2, e_3\})$
    e_2: 補題のべき等元 $\Rightarrow$ proj $\varepsilon_2 A \varepsilon_2 \supset$ add $\varepsilon_3 A \varepsilon_2$, $\varepsilon_3 := \varepsilon_2 - e_2$
    i.e., $e_2 A$ は proj $\varepsilon_2 A \varepsilon_2$ で単射な add $\varepsilon_3 A$-近似をもつ
  - proj $A \supset$ add $\varepsilon_2 A \supset$ add $\varepsilon_3 A \supset 0$
- 圏 proj $\varepsilon_2 A \varepsilon_2$ での単射性が圏 proj A での単射性へ "伸びる" (難しい)
  - 必要な条件: $e_2 A$ は proj A で単射な add $\varepsilon_3 A$-近似をもつ

問題: どんな代数が強準遺伝代数となるか?

観察: どのような条件を満たせば削除鎖を持つか?

- 補題のべき等元を "取り除き続ける" ことができる (比較的簡単)
- 圏 proj $\varepsilon_2 A \varepsilon_2$ での単射性が圏 proj A での単射性へ "伸びる" (難しい)

定理 3 [T (2019, 2022)]

次の代数のクラスは削除鎖を持つ 即ち, 強準遺伝代数となる

- 大域次元が 2 以下の代数
- 一般化 Auslander–Dlab–Ringel 代数 [Conde (2016)]
- 遺伝イデアルを持つ中山代数
- 局所遺伝代数
- 非輪状箙を持つ代数