圧縮性弾性体に対する応力関数とその平面上での伸縮運動を表す数理モデルについて[1]

小杉 千春（こすぎ ちはる）

日本女子大学大学院 理学研究科 博士課程後期 3 年

e-mail: m1416034kc@ug.jwu.ac.jp

1 導入

本講演では, 平面上の弾性体の伸縮運動を表す数理モデルである, 次の非線形偏微分方程式に対する初期値境界値問題を考える: Find $u : Q(T) \to \mathbb{R}^2$ s.t.

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x}\left(f(\varepsilon)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \mu \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = 0, \varepsilon = \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| - 1 \text{ on } Q(T), \tag{1}$$

$$\frac{\partial^i}{\partial x^i}u(0) = \frac{\partial^i}{\partial x^i}u(1) \text{ on } (0,T) \text{ for } i = 0,1,2,3, \tag{2}$$

$$u(0) = u_0, \frac{\partial}{\partial t}u(0) = v_0 \text{ on } (0,1), \tag{3}$$

ただし, $Q(T)$ は領域 $(0,T) \times (0,1)(T > 0)$ を表し, $\rho > 0$ は弾性体の線密度を表す定数, $\gamma > 0$ と $\mu \geq 0$ は定数とする. ε は歪み, f は応力関数とし, u_0, v_0 は与えられた関数で, それぞれ弾性体の初期位置と初速度を表す. 弾性体の伸縮運動を表す方程式では未知関数を変位とすることが多いが, 本講演では, 弾性体の伸縮運動を直接的に表現できるよう, 未知関数 $u = (t,x)$ は時刻 $t \in [0,T]$ での弾性体の $\mathbb{R}^2$ 上での位置を表すものとする (図 1 参照). この偏微分方程式モデルは, [1] で解の一意存在を示した常微分方程式モデルをもとに [4] で導出したものである. 上の問題を $\mu > 0$ のとき $\mathrm{P}_\mu = \mathrm{P}_\mu(u_0, v_0)$, $\mu = 0$ のとき P_0 と書くことにする.

方程式の非線形項 $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(f(\varepsilon)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$ を形式的に計算すると, $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ に関して滑らかでない項を含むため, 一般には強解の存在が期待できない. そのため, P_μ や P_0 の弱解を考察する.

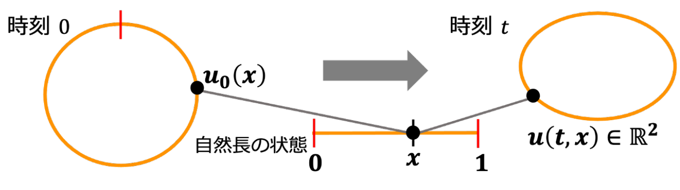

図 1: 未知関数

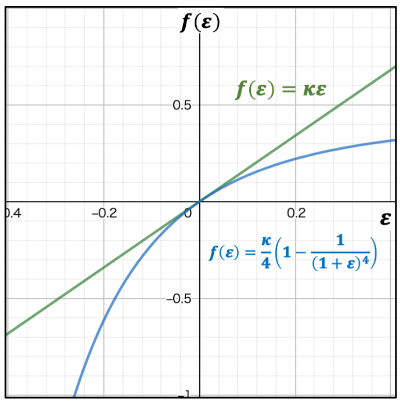

図 2: $\mu > 0$ の場合の応力関数

以下, $T > 0$, $H := L^2(0,1)^2$, $V_1 := \{z \in H^2(0,1)^2 | z(0) = z(1), z_x(0) = z_x(1)\}$, $V_2 := \{z \in H^4(0,1)^2 | z(0) = z(1), z_x(0) = z_x(1), z_{xx}(0) = z_{xx}(1), z_{xxx}(0) = z_{xxx}(1)\}$ とする.

[1] 本研究は愛木豊彦氏 (日本女子大学・理学部) との共同研究に基づく.

仮定 1.1. 応力関数 $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$ を次式で定める.

$$f(\varepsilon)=\frac{\kappa}{4}\left(1-\frac{1}{(1+\varepsilon)^4}\right).$$

ただし, $\kappa>0$ は定数である.

この応力関数は $\varepsilon\to -1$ のとき $f(\varepsilon)\to-\infty$ となるが, 同じ特徴をもつ応力関数に対して工学分野では既に, G. A. Holzapfel[3], R. W. Ogden[6], J. C. Simo と C. Mihe[7] によって数値解析的考察が与えられている. そこで, 本研究ではこのような特徴をもつ応力関数を伴う beam 方程式 (1) を考察の対象とする.

定義 1.1. $Q(T)$ 上の関数 u が以下の 3 つの条件を満たすとき, u を P_0 の $[0,T]$ 上の弱解と呼ぶ.

- $u\in W^{1,\infty}(0,T;H)\cap L^\infty(0,T;V_1)$.
- $u(0)=u_0$.
- $$-\rho\int_{Q(T)}u_t\cdot\eta_t dxdt+\gamma\int_{Q(T)}u_{xx}\cdot\eta_{xx}dxdt+\int_{Q(T)}f(\varepsilon)u_x\cdot\eta_x dxdt=\rho\int_0^1 v_0\cdot\eta(0)dx$$
  $$\text{for } \eta\in W^{1,2}(0,T;H)\cap L^2(0,T;V_1) \text{ with } \eta(T)=0.$$

定義 1.2. $\mu>0$ に対し u が以下の 4 つの条件を満たすとき, u を P_μ の $[0,T]$ 上の弱解と呼ぶ.

- $u\in W^{1,\infty}(0,T;H)\cap L^\infty(0,T;V_1)\cap W^{1,2}(0,T;H^1(0,1)^2)$.
- $u(0)=u_0$.
- $|u_x|>0$ on $\overline{Q(T)}$.
- $$-\rho\int_{Q(T)}u_t\cdot\eta_t dxdt+\gamma\int_{Q(T)}u_{xx}\cdot\eta_{xx}dxdt+\int_{Q(T)}f(\varepsilon)u_x\cdot\eta_x dxdt+\mu\int_{Q(T)}u_{tx}\cdot\eta_x dxdt$$
  $$=\rho\int_0^1 v_0\cdot\eta(0)dx \text{ for } \eta\in W^{1,2}(0,T;H)\cap L^2(0,T;V_1) \text{ with } \eta(T)=0.$$

定義 1.3. $\mu>0$ に対し u が以下 3 つの条件を満たすとき, u を P_μ の $[0,T]$ 上の強解と呼ぶ.

- $u\in W^{1,\infty}(0,T;V_1)\cap L^\infty(0,T;H^4(0,1)^2)\cap W^{2,2}(0,T;H)\cap W^{1,2}(0,T;H^3(0,1)^2)$.
- $|u_x|>0$ on $\overline{Q(T)}$.
- (1) – (3) が a.e. の意味で成り立つ.

また, 任意の $T>0$ に対して, 定義 1.2(定義 1.3) が満たされるとき, u を P_μ の $[0,\infty)$ 上の弱解 (強解) と呼ぶ.

問題 P_0 や P_μ について, 次の定理 1.4 – 1.6 が得られている.

定理 1.4. (P_0 の弱解の一意存在定理, [2]) $T>0$ とする. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が Lipschitz 連続かつ単調増加かつ $f(0)=0$ を満たし, $u_0\in V_1$, $v_0\in H$ ならば, P_0 は $[0,T]$ 上の一意な弱解をもつ.

定理 1.5. (P_μ の弱解の一意存在定理, [5]) $T>0$, f が仮定 1.1 を満たすものとする. このとき, $u_0\in V_1$, $|u_{0x}|>0$ on $[0,1]$, $v_0\in H$ ならば, P_μ は $[0,T]$ 上の一意な弱解をもつ.

定理 1.6. (P_μ の強解の存在定理, [5]) $T>0$, f が仮定 1.1 を満たすものとする. このとき, $u_0\in V_2$, $|u_{0x}|>0$ on $[0,1]$, $v_0\in V_1$ ならば, P_μ の $[0,T]$ 上の強解が存在する.

定理 1.5, 1.6 の証明では, 次の補題が鍵となる.

補題 1.7. $z \in V_1,\ K_1, K_2 > 0$ とする．このとき，$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{|z_x|^2}dx \le K_1,\ |z_{xx}|_H \le K_2$ ならば，$|z_x| \ge \dfrac{K_2}{\sqrt{2}}e^{-K_1K_2^2}$ on $[0,1]$.

$\mu > 0$ の場合は, 応力関数 f を仮定 1.1 で定めることで得られる歪み ε に対する下からの評価と粘性項 μu_{txx} から得られる正則性をもとに, 弱解の一意存在だけでなく強解の存在も証明することができた.

2　問題 $\mathbf{P}_\mu$ に対する定常問題の考察

本講演では, 時間が十分経過した後の弾性体の状態を知るために, P_μ に対する次の定常問題 P_∞ を考える.

$$\begin{aligned}&\gamma\frac{\partial^4 u_\infty}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x}\left(f(\varepsilon_\infty)\frac{\partial u_\infty}{\partial x}\right) = 0, \varepsilon = \left|\frac{\partial u_\infty}{\partial x}\right| - 1 \text{ on } (0,1),\\ &\frac{\partial^i}{\partial x^i}u_\infty(0) = \frac{\partial^i}{\partial x^i}u_\infty(1) \text{ for } i = 0,1,2,3.\end{aligned} \tag{4}$$

定義 2.1. u_∞ が以下の 2 つの条件を満たすとき, u_∞ を定常問題 P_∞ の弱解と呼ぶ.

- $u_\infty \in V_1$.
- $\displaystyle\gamma\int_0^1 u_{\infty xx}\cdot\eta_{xx}dx + \int_0^1 f(\varepsilon_\infty)u_{\infty x}\cdot\eta_x dx = 0$ for $\eta \in V_1$.

定常問題 P_∞ の弱解に関する以下の定理を得た.

定理 2.2. $\mu > 0,\ u_0 \in V_1,\ v_0 \in H$ とし, u を $\mathrm{P}_\mu(u_0, v_0)$ の $[0,\infty)$ 上の弱解とする．このとき, 次を満たす部分列 $\{t_i\} \subset \{t\},\ t_i \to \infty (i \to \infty)$ と $u_\infty \in V_1$ が存在する.

$$\hat{u}(t_i) \to u_\infty \text{ weakly in } H^2(0,1)^2, \quad \hat{u}_x(t_i) \to u_{\infty x} \text{ in } C([0,1])^2 \quad \text{as } i \to \infty.$$

ここで, u_∞ は定常問題 P_∞ の弱解である．ただし, $\hat{u}(t) = u(t) - \displaystyle\int_0^1 u(t)dx$ for any $t \in [0,\infty)$.

ここで, 時間大域解 u の動きについて考える．u を $\mathrm{P}_\mu(u_0, v_0)$ の $[0,\infty)$ 上の弱解とすると, 定義 1.2 より, 任意の $T > 0$ に対し u は以下の弱形式を満たす.

$$\begin{aligned}-\rho\int_{Q(T)} u_t\cdot\eta_t dxdt + \gamma\int_{Q(T)} u_{xx}\cdot\eta_{xx}dxdt + \int_{Q(T)} f(\varepsilon)u_x\cdot\eta_x dxdt&\\ + \mu\int_{Q(T)} u_{tx}\cdot\eta_x dxdt = \rho\int_0^1 v_0\cdot\eta(0)dx&\end{aligned} \tag{5}$$

for $\eta \in W^{1,2}(0,T;H) \cap L^2(0,T;V_1)$ with $\eta(T) = 0$. ここで, $\delta > 0$ に対して

$$\tilde{\eta}(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\delta}t + 1 & \text{for } 0 \le t < \delta,\\ 0 & \text{for } t \ge \delta,\end{cases}$$

とすると, $\tilde{\eta} \in W^{1,2}(0,T;H) \cap L^2(0,T;V_1)$ かつ $\tilde{\eta}(T) = 0$ が成り立つので, $\eta = \tilde{\eta}$ を (5) に代入できる．よって,

$$\frac{1}{\delta}\int_0^\delta\int_0^1 u_t dxdt = \int_0^1 v_0 dx. \tag{6}$$

また, 任意の $\hat{\eta} \in \mathscr{D}(0,T)^2$ に対し, $\eta = \hat{\eta}$ を (5) に代入すると,

$$\int_0^T \hat{\eta}_t \int_0^1 u_t dxdt = 0 \quad \text{for } \hat{\eta} \in \mathscr{D}(0,T)^2. \tag{7}$$

ここで, $h(t) := \displaystyle\int_0^1 u_t(t)dx$ for $t \in [0,T]$ とすると, (7) より h は超関数の意味で $h_t = 0$ on $[0,T]$ を満たすので, h, つまり, $\displaystyle\int_0^1 u_t dx$ は定数関数である. 故に, (6) より $\displaystyle\int_0^1 u_t dx = \int_0^1 v_0 dx$ を得る. これより

$$\int_0^1 u(t)dx = t\int_0^1 v_0 dx + \int_0^1 u_0 dx \text{ for } t \geq 0. \tag{8}$$

(8) より, 弾性体の輪の重心を表す左辺の $\displaystyle\int_0^1 udx$ は, 時刻 t に関する一次関数である. つまり, $\displaystyle\int_0^1 v_0 dx \neq 0$ ならば, 弾性体の輪は時間変化とともに直線上を動き無限遠方へ移動する. そこで, 定理 2.2 では, $\hat{u}(t) = u(t) - \displaystyle\int_0^1 u(t)dx$ を考えることで, $\{\hat{u}(t)\}$ の部分列が定常問題 P_∞ の弱解に収束することを示すことができた.

3 今後の展望

まず, 定理 2.2 において P_μ の $[0,\infty)$ 上の強解に対しても同じ定理が得られるか, つまり, $\mu > 0$, $u_0 \in V_2$, $v_0 \in V_1$ とし, u を $\mathrm{P}_\mu(u_0, v_0)$ の $[0,\infty)$ 上の強解とする. このとき, 次を満たす部分列 $\{t_i\} \subset \{t\}$ が存在し,

$$\hat{u}(t_i) \to u_\infty \text{weakly in } H^4(0,1)^2, \quad \hat{u}_x(t_i) \to u_{\infty x} \text{ in } C([0,1])^2 \quad \text{as } i \to \infty,$$

ただし, u_∞ は定常問題 P_∞ の強解, $\hat{u}(t) = u(t) - \displaystyle\int_0^1 u(t)dx$ for any $t \in [0,\infty)$,

が成り立つことを示す. ここで, 定常問題 P_∞ の強解とは, $u_\infty \in H^4(0,1)^2$ かつ (4) を a.e. で満たす u_∞ のことである.

また, 定常問題 P_∞ の解の一意性について以下の補題が分かっている.

補題 3.1. 定常問題 P_∞ の解を $\mathbb{R}^2$ 上で原点を中心に回転したものや平行移動したものもまた定常問題 P_∞ の解になる.

補題 3.2. $u_\infty(x) := (r\cos(2\pi x), r\sin(2\pi x))$ for $x \in [0,1], r > 0$ が定常問題 P_∞ の解となる $r > 0$ がただ一つ存在する.

従って, 定常問題 P_∞ の解の一意性が成り立つための条件を導出する必要がある.

また, P_μ や P_0 では, 解析上の困難さから γu_{xxxx} を加えた方程式を扱っているため, 弾性体の伸縮運動を表す方程式としての妥当性は明らかでない. そのため, 定常問題 P_∞ の解の形状と係数 γ との間に成り立つ幾何学的性質も明らかにしたい.

さらに, P_0 と P_μ に対しては以下の課題もある.

- f が仮定 1.1 を満たす場合の P_0 に対する弱解や強解の存在
- $\mu > 0$ に対し, P_μ の強解 (弱解) を u_μ とする. ここで, $\mu \to 0$ としたときの u_μ の P_0 の強解 (弱解) への収束

参考文献

[1] T. Aiki and C. Kosugi, *Numerical schemes for ordinary differential equations describing shrinking and stretching motion of elastic materials*, Adv. Math. Sci. Appl., **29** (2020), 459–494.

[2] T. Aiki and C. Kosugi, *Existence and uniqueness of weak solutions for the model representing motions of curves made of elastic materials*, Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, **36** (2021), 44–56.

[3] G. A. Holzapfel, *Nonlinear solid mechanics: a continuum approach for engineering*, John Wiley & Sons Publ. (2000).

[4] C. Kosugi, T. Aiki, M. Anthonissen and M. Okumura, *Numerical results for ordinary and partial differential equations describing motions of elastic materials*, Adv. Math. Sci. Appl., **30** (2021), 387–414.

[5] C. Kosugi, *Solvability of a PDE model with nonlinear stress function having singularity for compressible elastic curve* (submitted).

[6] R. W. Ogden, *Large deformation isotropic elasticity: on the correlation of theory and experiment for compressible rubber like solids*, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A, Math. Phys. Sci., **328** (1972), 567–583.

[7] J. C. Simo, C. Miehe, *Associative coupled thermoplasticity at finite strains: Formulation, numerical analysis and implementation*, Comput. Methods in App. Mech. Engi., **98** (1992), 41–104.