

いくつかの双曲結び目のねじれアレキサンダー多項式について

大阪市立大学 数学研究所

阿蘇愛理

1. 導入

S^3 内に埋め込まれた 1 本の単純閉曲線を結び目という. 2 つの結び目が有限回のライデマイスター移動で互いに移り合うとき, それらは同型な結び目であるといい, 同型を除いて結び目を区別するために, 結び目理論の研究ではしばしばライデマイスター移動で変化しないような結び目の不変量が用いられる.

アレキサンダー多項式は 1928 年に J. W. Alexander によって導入された古典的な結び目の不変量で, 結び目の補空間の基本群 (結び目群) に対して定義される. これは結び目 K に対し $\Delta_K(t) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ を対応させる不変量で, 同型な結び目 K, K' に対し $\Delta_K(t) = \Delta_{K'}(t)$ が成り立つ. アレキサンダー多項式は, 結び目の種数やファイバー性などに関する幾何的な情報を含むことが知られており, 幅広い応用を持つ. しかし, 樹下-寺坂結び目と Conway の結び目のように, 同型ではない結び目でアレキサンダー多項式では区別できない例も多く知られており, 完全不変量とは程遠い.

アレキサンダー多項式の一般化として, 1990 年代にねじれアレキサンダー多項式が X. S. Lin[L] と M. Wada[W] によって導入された. これは結び目群に加えてその表現 ρ にも依存して定まるもので, $\Delta_{K, \rho}(t) \in \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ で表される.

ねじれアレキサンダー多項式を調べることでより精密な幾何的情報を得ることができるが, ねじれアレキサンダー多項式から結び目の種数やファイバー性などに関する情報が完全に復元されるのかどうかはまだわかっていない [DFJ].

また, 双曲結び目 (補空間が有限体積の完備双曲構造を持つ結び目で, 交点数の大きい結び目のほとんどがこれに該当する) に対しては, ホロノミー表現 (補空間の双曲構造から定まる標準的な $SL_2(\mathbb{C})$ 表現) から得られる $SL_n(\mathbb{C})$ 表現に関するねじれアレキサンダー多項式の漸近挙動に補空間の双曲体積が現れることが知られている [G].

2. 主結果

ここでは自身の研究の概要を紹介するので, 詳細については各文献を参照されたい.

$(-2, 3, 2n+1)$ プレッツェル結び目と呼ばれる結び目の無限族に対して, ホロノミー表現を含む表現の族に関するねじれアレキサンダー多項式を計算し, この無限族に対しては結び目の種数及びファイバー性がねじれアレキサンダー多項式から得られることを示した [A1]. また, $(-2, 3, 2n+1)$ プレッツェル結び目を含むより一般の結び目の無限族であるトンネル数が 1 のモンテシノス結び目に対し, 任意の $SL_2(\mathbb{C})$ 表現に関するねじれアレキサンダー多項式の次数と最高次の係数を求め, 結び目の種数及びファイバー性がねじれアレキサンダー多項式から復元されるための条件を得た [A2].

最近の研究では, 双曲結び目のねじれアレキサンダー多項式と双曲体積の関係の一般化である複素化について考えるために, 6 交点以下の双曲結び目に対し計算機実験によってねじれアレキサンダー多項式の漸近挙動を調べ, そこに双曲体積及びチャーン・サイモンズ不変量が現れるという予想を得た.

REFERENCES

- [A1] A. Aso, *Twisted Alexander polynomials of $(-2, 3, 2n+1)$ -pretzel knots*, Hiroshima Math. J., **50** (2020), 43–57.
- [A2] A. Aso, *Twisted Alexander polynomials of tunnel number one Montesinos knots*, arXiv:2008.00875.
- [DFJ] N. Dunfield, S. Friedl and N. Jackson, *Twisted Alexander polynomials of hyperbolic knots*, Exp. Math., **21** (2012), 329–352.
- [G] H. Goda, *Twisted Alexander invariants and hyperbolic volume*, Proc. Jpn. Acad. Ser. A **93** (2017), 61–66.
- [L] X. S. Lin, *Representations of knot groups and twisted Alexander polynomials*, Acta Math. Sin., **17** (2001), 361–380.
- [W] M. Wada, *Twisted Alexander polynomial for finitely presentable groups*, Topology, **33** (1994), 241–256.

OSAKA CITY UNIVERSITY ADVANCED MATHEMATICAL INSTITUTE, 3-3-138 SUGIMOTO, SUMIYOSHI-KU OSAKA 558-8585, JAPAN

Email address: aso-airi@osaka-cu.ac.jp