# 実乗法をもつ種数2, 種数3の曲線の具体的構成について

酒井　祐貴子（北里大学）

整数論や数論幾何で研究される分野の重要なトピックとして楕円曲線と保型形式の理論があり, その2つを結び付けるのが「$\mathbb{Q}$上定義された楕円曲線は全てモジュラーである」という志村-谷山予想である. 一方, ガロア表現と保型形式を結びつけるSerre予想は長年未解決であったが, 2009年にKhare, Wintenbergerにより肯定的に解決された. また, RibetがSerre予想の特別な場合, そして志村-谷山予想の高次元化として提唱した「$\mathrm{GL}_2$-typeのアーベル多様体は全てモジュラーである」という$\mathrm{GL}_2$-予想もこのSerre予想の解決によって肯定的に証明された. $\mathrm{GL}_2$-typeのアーベル多様体に関連する研究はSerre予想が解決される前からHumbert, Mestre, Bending, Hashimoto, Wilson等多くの研究者によって行われてきたが, 当時, $\mathrm{GL}_2$-typeのアーベル多様体は重さ2の保型形式に付随する志村のアーベル多様体を除き具体的な構成法及び具体例がほとんど知られていなかった.

代数曲線$X$のヤコビ多様体$\mathrm{Jac}(X)$の自己準同型環が判別式$\Delta$の実二次体の整数環や円分体の最大実部分体を含むとき, 曲線$X$は実乗法をもつという. $\mathrm{GL}_2$-typeのアーベル多様体の例として, 実乗法をもつ種数2の曲線のヤコビ多様体が知られており, 講演者は, Humbertの結果を元に, $\Delta = 5, 8$の実乗法をもつ種数2の曲線を複数のパラメータを用いてversalに与え, その曲線族のヤコビ多様体として$\mathrm{GL}_2$-typeの2次元アーベル多様体を構成した ([1], [2]). この研究でポイントになるのがPonceletの閉形定理と, conic上の代数対応の構成である. 現在では, 種数2の曲線の構成についてGruenewaldにより構成アルゴリズムが得られている (2009). また, KumarとElkiesはK3曲面を用いた代数幾何的な手法により実乗法をもつ種数2の曲線を, 判別式が100以下の場合に構成している (2012).

種数3の曲線については, Hoffman, Wangが講演者の結果を応用し, Ponceletの閉形定理及びconic上の代数対応を具体的に記述することで, $\mathrm{End}(\mathrm{Jac}(X))$が$\mathbb{Q}(\zeta_7 + {\zeta_7}^{-1})$を含むような超楕円曲線$X$を具体的に構成した ([3]). 超楕円的でない場合については, Hoffman, Wangを含めた共同研究者との結果として, $\mathrm{End}(\mathrm{Jac}(X))$が$\mathbb{Q}(\zeta_7 + {\zeta_7}^{-1})$を含むような種数3の曲線の具体例を構成した ([4]). この結果では, Ponceletの閉形定理などを用いた種数2の結果を用いずに, 群論及び代数幾何の手法を用いたEllenbergの結果 ([5]) を応用し, 曲線の構成問題をあるディオファンタス方程式を解くことに帰着させ, それを解くことで曲線の具体例を与えた.

参考文献

1. Y. Sakai, Poncelet's theorem and curves of genus two with real multiplication of $\Delta = 5$, J. Ramanujan Math. Soc., volume 24 (2009), 143–170.
2. K. Hashimoto,Y. Sakai, On a versal family of curves of genus two with $\sqrt{2}$-multiplication, RIMS Kôkyûroku Bessatsu B12 (2009), 249–261.
3. J. W. Hoffman, H. Wang, 7-gons and genus 3 hyperelliptic curves, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas, Fís. Nat. Ser. A Math. **107**, (2013), 35–52.
4. J. W. Hoffman, D. Liang, Z. Liang, R. Okazaki, Y. Sakai, H. Wang, Genus 3 Curves Whose Jacobians Have Endomorphisms by $\mathbb{Q}(\zeta_7 + \bar{\zeta}_7)$, II, Tokyo J. Math., volume 42 (2019), 185–218.
5. J.S. Ellenberg, Endomorphism algebras of Jacobians, Adv. Math, 162, (2001), 243–271.