拡張された超幾何函数とそのモノドロミー保存変形

朴　佳南　(神戸大学)

Tsuda[3] は微分の場合に超幾何関数の拡張式を特殊解に持つモノドロミー保存変形を求めた．その q 類似を求めることが目標である．まず, q-超幾何関数 [1][2] の拡張式 $\mathcal{F}_{N,M}$ を定義する．その積分表示を用いて, それが満たすパフ系を求める．次に, それを簡約化して得られる係数行列は, その作り方から両立条件を満たすので, それを参考にラックス形式をつくり, 目標のモノドロミー保存変形を得る．

1. q 超幾何関数の拡張 $\mathcal{F}_{N,M}$

q-超幾何級数の拡張式 $\mathcal{F}_{N,M}$ を, 次のように定義する

$$\mathcal{F}_{N,M}\left(\begin{matrix}\{a_j\},\{b_i\}\\ \{c_j\}\end{matrix};\{y_i\}\right)=\sum_{m_i=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{N}\frac{(a_j)_{|m|}}{(c_j)_{|m|}}\prod_{i=1}^{M}\frac{(b_i)_{m_i}}{(q)_{m_i}}\prod_{i=1}^{M}y_i^{m_i}. \tag{1}$$

ここで, $|n|=\sum_{j=1}^{N}n_j$, $(a)_n=(1-a)(1-qa)\cdots(1-q^{n-1}a)=\frac{(a)_\infty}{(q^na)_\infty}$. 積分表示は

$$\mathcal{F}_{N,M}\left(\begin{matrix}\{c_j\},\{a_i\}\\ \{b_jc_j\}\end{matrix};\{x_i\}\right)=\frac{(\{c_j\})_\infty}{(\{b_jc_j\})_\infty}\prod_{j=1}^{N}\frac{(b_j)_\infty}{(q)_\infty}\sum_{n_j}\prod_{i=1}^{M}\frac{(x_ia_iq^{|n|})_\infty}{(x_iq^{|n|})_\infty}\prod_{j=1}^{N}\frac{(q^{1+n_j})_\infty}{(b_jq^{n_j})_\infty}c_j^{n_j}. \tag{2}$$

2. $\mathcal{F}_{N,M-1}$ を特殊解に持つモノドロミー保存変形

$\mathcal{F}_{N,M-1}$ を特殊解に持つモノドロミー保存変形について述べる．

定義 2.1 行列 A, B を

$$A=DX_1^{-1}X_2\cdots X_{2M-1}^{-1}X_{2M}, \tag{3}$$
$$B=X_{2M}^{-1}X_{2M-1}, \tag{4}$$

とする．ただし, D は対角行列, $X_i=\mathrm{diag}[u_{i,1},u_{i,2},\cdots,u_{i,N+1}]+\Lambda$ を表す．ここで Λ は

$$\Lambda=\begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\\ z & & & \end{bmatrix} \tag{5}$$

を表す．このとき

$$B(qz,t)\cdot A(z,t)=A(z,qt)\cdot B(z,t), \tag{6}$$

によって定まる方程式を考える．

この方程式 (6) に対して, 次のことが成り立つ．

定理 2.1 (6) で定義されるモノドロミー保存変形は, $\mathcal{F}_{N,M-1}$ で表される解を持つ．

ここでは, 証明の概要を述べる. $\mathcal{F}_{N,M}$ の積分表示から得られる方程式の係数が, (3) のように表されることを示せばよい. まず, $\mathcal{F}_{N,M}$ の積分表示からパフ系を求める. 積分表示 (2) における被積分関数を

$$\Phi(\{u_j\}_{j=1}^N) = \prod_{i=1}^M \frac{(a_i x_i u_N)_\infty}{(x_i u_N)_\infty} \prod_{j=1}^N \frac{(q u_j/u_{j-1})_\infty}{(b_j u_j/u_{j-1})_\infty} u_j^{\gamma_j - 1}, \tag{7}$$

とおくと

$$\Psi_0 = \langle \Phi p_0 \rangle,\ \Psi_{j,i} = \langle \Phi p_{j,i} \rangle,\ (1 \le i \le M, 1 \le j \le N) \tag{8}$$

がパフ系の解の基底を与える. ここで, $\langle f(\{u_j\}) \rangle = \sum_{u_j \in q^{\mathbb{Z}}} f(u_j)$ を表し, $p_0 = 1$, $p_{j,i} = \prod_{k=1}^{i-1} \frac{1 - x_k u_N}{1 - a_k x_k u_N} \cdot \frac{u_{j-1} - b_j u_j}{1 - a_i x_i u_N}$ である. 互換の積を $\rho = \sigma_M \cdots \sigma_1$ ($\sigma_i = \{x_i \leftrightarrow x_{i+1}, a_i \leftrightarrow a_{i+1}\}$) とおくと, $\mathcal{F}_{N,M}$ のパフ系として次を得る

$$\begin{gathered} T_{x_M}(\Psi_0) = *\rho(\Psi_0) + *\rho(\Psi_{1,1}) + *\rho(\Psi_{2,1}) + \cdots + *\rho(\Psi_{N,1}), \\ T_{x_M}(\Psi_{j,i}) = \rho(\Psi_{j,i+1})\ (i \ne M), \\ T_{x_M}(\Psi_{j,M}) = *\rho(\Psi_0) + *\rho(\Psi_{1,1}) + *\rho(\Psi_{2,1}) + \cdots + *\rho(\Psi_{N,1}). \end{gathered} \tag{9}$$

他変数に対する q シフトは, 置換 σ_i を用いることによって求められる. $*$ は x_M の有理函数を表す. これを $\overrightarrow{\Psi} = \left[\Psi_0, \cdots, \Psi_{N,M}\right]$ とおいて次のように書き直す

$$T_{x_M} \overrightarrow{\Psi} = \overrightarrow{\Psi} A, \tag{10}$$

$$A = R_{M-1} R_{M-2} \cdots R_1 Q_M. \tag{11}$$

この行列 R_i, Q_M は $(M+1)$ 次正方行列である. これに対して, パラメーター $a_M = 1$ と特殊化すると, パフ系の未知関数 Ψ_0, $\Psi_{j,i}$ $(1 \le i \le M, 1 \le j \le N)$ のうち,$\Psi_{j,M}$ だけが x_M に依存するようになる. $\frac{\Psi_{j,1}}{\Psi_0} \cdots \frac{\Psi_{j,M-1}}{\Psi_0}$ を $x_1, \cdots, x_{M-1}$ にのみ依存する関数として, それぞれ $r_{j,1}, \cdots r_{j,M-1}$ とおくと, 式 (10)(11) は Ψ_0 と $\Psi_{j,M}$ だけの連立方程式として次のように表せる. $\overrightarrow{\Psi} = [\Psi_0, \Psi_{1,M}, \Psi_{2,M}, \cdots, \Psi_{N,M}]$, $z = x_M$ とおくと,

$$T_z \overrightarrow{\Psi} = \overrightarrow{\Psi} A = \overrightarrow{\Psi} {X'}_1 {X'}_2^{-1} \cdots {X'}_{2M-1}^{-1} X'_{2M} D',$$

D' は対角行列, $X'_i = X'_i(z,t) = \mathrm{diag}[u_{i,1}, u_{i,2}, \cdots, u_{i,N+1}] + \Lambda$ ($u'_{i,N+1} = \frac{c_i}{\prod_{j=1}^N u'_{i,j}}$) を表し, $u'_{i,j}$ は $r_{j,i} (= \frac{\Psi_{j,i}}{\Psi_0})$ の有理函数で表される. $t = x_{M-1}$ とおくと, 方程式 $T_t \overrightarrow{\Psi} = \overrightarrow{\Psi} B$ も同様に求められる. これと (3) を見比べて, 結果を得る (行列 B も同様).

注. 2.1 定理 2.1 の $N = 1$ の場合について [4] に述べた.

参考文献

[1] E. Heine, Uber die Reihe..., Reine Angew.Math., 32 (1846), 210–212.

[2] E. Heine, Untersuchungen uber die Reihe..., Reine Angew.Math., 34 (1847), 285–328.

[3] Tsuda, T., Hypergeometric solution of a certain polynomial hamiltonian system of isomonodromy type, Quart. J. Math, 63 (2012), 489–505.

[4] Park, K. A certain generalization of q-hypergeometric functions and their related monodromy preserving deformation, Journal of Integrable Systems 3 (2018), 1–14.