実と p 進の確率論 - 極限定理について -

慶應義塾大学商学部　安田公美

本講演では，p 進体における中心極限定理，重複対数の法則，大偏差原理といった一連の極限定理について，広く知られている実空間におけるそれらと対比しながら述べた．$\xi_i (i=1,2,\ldots)$ を独立で同分布な p 進値確率変数の列，$S_n=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n$ をその和とする．

[中心極限定理] z を $0<|z|_p<1$ なる p 進数とする．p 進体上の確率分布は，その特性関数 $\hat{\mu}(y)$ がある実数 $0<c<1$ に対して $\hat{\mu}(zy)=\hat{\mu}(y)^c$ をみたすとき，(c,z)-準安定であるという．
μ がある $0<c<1$ に対して (c,z)-準安定であることは，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k(n-1)}{k(n)}\neq 0,1$ なるある自然数の増加列 $\{k(n)\}_{n=1,2,\ldots}$ について μ が scaled sum $z^nS_{k(n)}$ の極限分布であることと同値である．
特に ξ_i が原点を中心とする回転で不変な分布をもち，その tail probabilities がある実数 $\alpha>0$ に対して

$$T(m):=P\left(|\xi_i|_p\geq p^m\right)=p^{-\alpha m}L(m),\quad L(m+1)/L(m)\to 1 \tag{1}$$

をみたすとき，$k(n)=\left[\mathrm{const}.T(n)^{-1}\right]$ とすれば，$p^nS_{k(n)}$ は α-準安定分布に収束する．

仮定 (1) の下では $P\left(\limsup\limits_{n\to\infty}\left|p^nS_{k(n)}\right|_p=+\infty\right)=1$ が成立するので，次に $\limsup\limits_{n\to\infty}|S_{k(n)}|_p$ の発散のオーダーの評価を与える．

[“重複対数” の法則] $\beta>0$ に対し $c_n=[\beta\log n]$ とおくと，

$$\beta>\tfrac{1}{\alpha\log p}\ のとき，P\left(\limsup_{n\to\infty}\left|p^{n+c_n}S_{k(n)}\right|_p=0\right)=1,$$
$$\beta<\tfrac{1}{\alpha\log p}\ のとき，P\left(\limsup_{n\to\infty}\left|p^{n+c_n}S_{k(n)}\right|_p=+\infty\right)=1.$$

臨界オーダー $c_n=[\log n/\alpha\log p]$ では，仮定 (1) における収束 $L(m+1)/L(m)\to 1$ の速さによって次のように結果が異なる；$L(m+1)/L(m)=(\log m)^{-\gamma/\log m}$ とすると，

$$\gamma>\alpha\log p\ のとき，P\left(\limsup_{n\to\infty}\left|p^{n+c_n}S_{k(n)}\right|_p=0\right)=1,$$
$$\gamma\leq\alpha\log p\ のとき，P\left(\limsup_{n\to\infty}\left|p^{n+c_n}S_{k(n)}\right|_p=+\infty\right)=1.$$

この定理により，c_n が $[\log n/\alpha\log p]$ より速く発散するとき $p^{n+c_n}S_{k(n)}$ は確率 1 で原点に収束し，原点から離れた集合に存在する確率は減衰する．この減衰の速さ（大偏差）の評価を次に与える．

[大偏差原理] $\delta_n=\sup\limits_{m\geq n}\|1-L(m+1)/L(m)\|$ とおく．(i) $\lim\limits_{n\to\infty}c_n/n=+\infty$，または (ii) $\limsup\limits_{n\to\infty}c_n\log((1-\delta_n)/(1+\delta_n))<\alpha\log p$ のいずれかがみたされるとき，原点を含まない任意の球 B について，

$$\liminf_{n\to\infty}\tfrac{1}{n}\log P\left(p^{n+c_n}S_{k(n)}\in B\right)=-\alpha\theta_+\log p,$$
$$\limsup_{n\to\infty}\tfrac{1}{n}\log P\left(p^{n+c_n}S_{k(n)}\in B\right)=-\alpha\theta_-\log p$$

が成立する．ただし，$\theta_+=\limsup\limits_{n\to\infty}c_n/n$，$\theta_-=\liminf\limits_{n\to\infty}c_n/n$．この仮定の下で，$\theta=\lim\limits_{n\to\infty}c_n/n$ が存在するとき，またそのときに限り，$p^{n+c_n}S_{k(n)}$ は $I(x)=\alpha\theta\log p\ (x\neq 0)$，$I(0)=0$ を rate function として大偏差原理をみたす．$I(x)$ が good rate function となるのは $\theta=+\infty$ のときだけである．