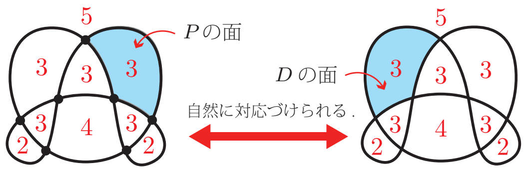
結び目図式の補領域に関する研究について

新庄 玲子 (国士舘大学理工学部)

田中心氏（東京学芸大学教育学部）との共同研究

1 背景

球面上の 4 価グラフは球面をいくつかの領域に分割する．球面上の結び目および絡み目の射影図も, 交差点を頂点と考えることでことで 4 価グラフとみなすことができる．そこで, 射影図においても n 本の辺に囲まれた領域を n 辺形と呼び, 射影図の各 n 辺形の個数について考察する．結び目射影図 P に対し，$f_n(P)$ で P の n 辺形の数を表す．射影図は球面上, 非自明かつ, 規約と仮定する．



G : 平面 4 価グラフ　　　P : 結び目射影図

結び目および絡み目の射影図は, 交点を頂点と考えることで球面に埋め込まれた 4 価グラフとみなすことができるので,　2 次元球面のオイラー標数が 2 であることと, 簡単な考察で次の等式 $(*)$ を得る．

$$(*)\ 2f_2(P) + f_3(P) = 8 + f_5(P) + 2f_6(P) + 3f_7(P) + \ldots.$$

グラフ理論においては $(*)$ を満たす平面 4 価単純グラフ構成するという問題が考えられている．例えば [1] や, それにおける結果を拡張した次の定理が知られている．

定理 1([2]) $\{f_3, f_5, f_6, \cdots\}$ を $(*)$ を満たす非負整数列とする．このとき, 非負整数 f_4 と, 2 次元球面上の 4 正則オイラーグラフ G で交点を横断的に通ることができ, $f_n(P) = f_n (n \neq 2), f_2(P) = 0$ を満たすものが存在する．

2 主結果

ここでは次の問題を考える．

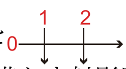
問題　K を結び目（もしくは絡み目）, $\{f_2, f_3, f_5, \cdots, f_m\}$ を $(*)$ を満たす非負整数列とする．K の射影図 D で $f_i(D) = f_i\ (2 \leq i \leq m, i \neq 4)$ を満たすものが存在するか．

この問題に関し完全な解答を得ることはできていないが, Jeong の定理を利用して次を得ることができた．

主定理　K を結び目, $\{f_2, f_3, f_5, f_6, \ldots, f_m\}$ を等式 $(*)$, $f_2 > 0$, $f_5 = k + 2f_2 - 2$ を満たす非負整数列, k を自然数とする．このとき非負整数 f_4 と, $f_i(P) = f_i\ (2 \leq i \leq m)$ が成り立つ K の射影図 P が存在する．

主定理は, 定理 1 の拡張となる補題 1 と, 補題 2 から従う．

補題 1　$\{f_2, f_3, f_5, f_6, f_7, \ldots, f_m\}$ を等式 $(*)$, $f_2 > 0$, $f_5 = k + 2f_2 - 2$ を満たす非負整数列,k を自然数とする．このとき非負整数 f_4 と, $f_i(P) = f_i\ (2 \leq i \leq m)$ が成り立つ結び目射影図 P が存在する．

補題 2　P を 

のような部分を持つ結び目射影図とする．任意の結び目 (もしくは絡み目) は $f_n(P') = f_n(P)$ $(n \neq 4)$ を満たす射影図 P' を持つ．ここで 弧にふられた 0,1,2 の番号は, 射影図に向きを入れて辿った時に 0,1,2 の順に現れるという意味である．

参考文献

[1] Gr ünbaum, B.: Some analogues of Eberhard's theorem on convex polytopes. Israel J. Math. 6(4), 398–411 (1968)

[2] Jeong, D.: Realizations with a cut-through Eulerian circuit. Discrete Math. 137(1-3), 265– 275 (1995)