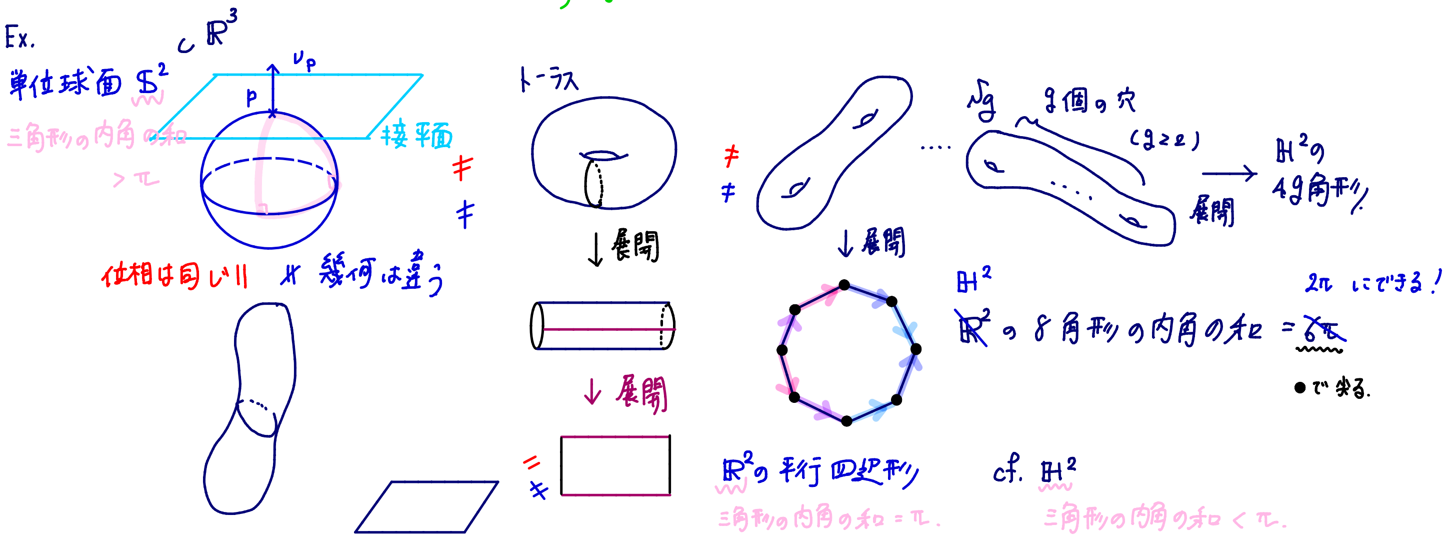
circle pattern metric でつなぐ曲面の位相(柔)と幾何(硬) -combinatorial Ricci flow の視点から- 高津飛鳥

S : 連結 : $^\forall p, q \in S$ を結ぶ曲線有
$\subset \mathbb{R}^3$ 向付可 : $\nu : S \to \mathbb{R}^3$: 連続な単位法線ベクトル
閉 : 有界閉集合

Ex.



曲面の位相的分類

… オイラー数 $\chi(S)$ のみで決まる.

三角形分割 がある。

$T = (V, E, F)$
頂点 辺 面.

$:= |V| - |E| + |F| = 2 - 2g \quad (^\exists g \in \mathbb{N}_{\geq 0})$

↳ 曲面は三角形を"滑らか"につなぎあわせたもの.

曲面の一意化定理

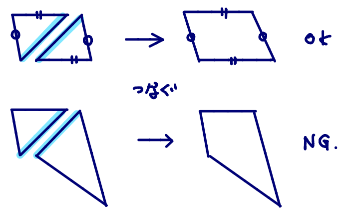
… $g = 1$ $\quad S_g \cong \mathbb{R}^2/\Gamma$

$g \geq 2$ $\quad S_g \cong \mathbb{H}^2/\Gamma$

Γは $\mathbb{R}^2$ / $\mathbb{H}^2$ の 4g角形!

* $T = (V, E, F)$: それぞれの三角形の大きさは分からない.
  ↓ "良い"大きさに整えて、つなぎあわせる.
* Γ が決まる. (形が決まる.)

$g = 1$, $|V| = 1$, $|E| = 3$, $|F| = 2$



Thurston : Circle Pattern metric

計量 … 長さを決める.

S_g : 曲面 $(g \geq 1)$

$T = (V, E, F)$: 三角形分割

$\Theta : E \to [0, \frac{\pi}{2}]$: 重み

$\tilde{S}_g := \begin{cases} \mathbb{R}^2 & g = 1 \\ \mathbb{H}^2 & g \geq 2 \end{cases}$

位相的対称.

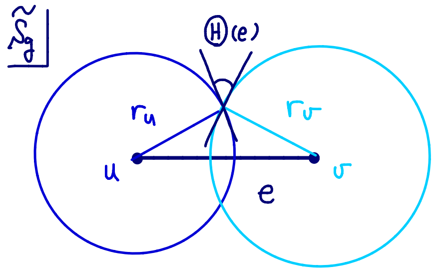
※ T を $\tilde{S}_g$ に引き戻すと再び三角形分割になると仮定する.

$r = (r_v)_{v \in V} \in \mathbb{R}^V_{>0}$: metric.

$e \in E$ (端点 u, v) の長さ $\ell(e)$ を

$\ell(e) := \left(\begin{array}{l} \tilde{S}_g \text{ 上の半径 } r_u, r_v \text{ で角度 } \Theta(e) \text{ で交わる} \\ 2\text{つの円の中心間の距離} \end{array} \right)$ で定める.

$\underset{g=1}{=} \sqrt{r_v^2 + r_u^2 - 2 r_v r_u \cos(\pi - \Theta(e))}$

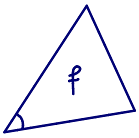


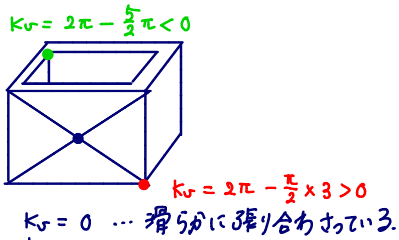
$f \in F$ の各辺の長さが定まる。

　$\text{Ⓗ}(e) \in [0, \frac{\pi}{2}]$

　　$\Rightarrow$ f は S_g の三角形とみなせる.

　　　$\Rightarrow$ 内角の大きさが定まる。





$a_v(r) := \sum_{v \in f \in F} (f$ の v における内角$)$

$K_v(r) := 2\pi - a_v(r)$: 曲率

Def. $r \in \mathbb{R}^V_{>0}$: Circle Pattern metric $:\Leftrightarrow K_v(r) \equiv 0 \quad {}^\forall v \in V \Rightarrow {}^\exists 1\ \Gamma$ が定まる.

　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　$\rightarrow g = 1$ のときは, 定数倍を除く.

Thm. (Thurston '78 (1)(2), Chow-Luo '03 (2)(3))

S_g : 曲面 $(g \geq 1)$
$(T, \text{Ⓗ})$: 重みつき三角形分割
に対し, 以下は同値 :

1) ${}^\exists$ CP metric.

2) $\emptyset \neq {}^\forall U \subsetneq V, \quad \phi(U) := -\sum_{f \in Lk(U)} (\pi - \text{Ⓗ}(e_f)) + 2\pi \chi(T_U) < 0$

存在するための必要十分条件.　$g \geq 2$: ok　$g = 1$: NG　ok

$Lk(U) := \{ f \in F \mid$ （$v \in U$, f, e_f, $x \notin U$）$\}$, T_U : T の CW-部分複体, 頂点 $= U$.

2') i) e_1, e_2, e_3 & $\sum_{i=1}^{3} \text{Ⓗ}(e_i) \geq \pi \Rightarrow {}^\exists f \in F$ s.t. e_1, e_2, e_3, f　(e_1, e_2, e_3 : NG)

ii) e_1, e_2, e_3, e_4 & $\sum_{i=1}^{4} \text{Ⓗ}(e_i) = 2\pi \Rightarrow {}^\exists f_1, f_2 \in F$ s.t. $e_1, e_2, e_3, e_4, f_1, f_2$　(e_1, e_2, e_3, e_4 : NG)

存在するものの探し方

3) (CRF)　$\frac{d}{dt} r_v(t) = -K_v(r(t))\, \sigma_g(r_v(t)), \quad \sigma_g(r_v) := \begin{cases} r_v & g = 1 \\ \sinh r_v & g \geq 2 \end{cases}$

は, 任意の初期値に対し, $t \to \infty$ のとき, $\mathbb{R}^V_{>0}$ で収束する.
　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　CP metric に.

/ cf. Ricci flow :　3次元コンパクト多様体の型は8種類.
Thurston が提唱した幾何化予想の解決で中心的役割を担う.
計量が曲率に沿って発展し, 曲面上では, 体積に正規化を施せば
$t \to \infty$ で定曲率計量に収束する.

Q. (Chow-Luo)
(2) が満たされない場合の (CRF) の挙動は ?

Thm. (Takatsu) … 重みが閾値の場合.

S_g : 曲面 $(g \geq 1)$
$(T, \text{Ⓗ})$: 重みつき三角形分割
が $\max_{\emptyset \neq U \subsetneq V} \phi(U) = 0$ を満たすとする.

$\Rightarrow$ 任意の初期値に対し, (CRF) の解は $t \to \infty$ のとき, $\mathbb{R}^V_{>0}$ で収束しないが $\lim_{t \to \infty} K_v(r(t)) = 0 \quad {}^\forall v \in V$ である。

さらに, $\emptyset \neq {}^\exists 1\ V_0 \subsetneq V$ が存在し, ${}^\forall v_0 \in V_0$ に対し, $\rho_v(t) := \begin{cases} \frac{r_v(t)}{r_{v_0}(t)} & g = 1 \\ r_v(t) & g \geq 2 \end{cases}$ と定めれば,

$S_g, (T, \text{Ⓗ})$ のみに依存.

${}^\forall v \in V$ に対し, $\rho_v := \lim_{t \to \infty} \rho_v(t)$ が存在し, $v \notin V_0 \Leftrightarrow \rho_v = 0$

かつ $(\rho_v)_{v \in V_0}$: $(T_0, \text{Ⓗ}_0)$ の ${}^\exists 1$ CP metric. である.

　　頂点が V_0 の S_g の三角形分割
　　(2) を満たす.

key of pf.

- (CRF) は凸関数の勾配流とみなせる.
- (2) を満たす $\Leftrightarrow$ 凸関数は臨界点を持つ.

既知.

- 今は臨界点がない $\rightsquigarrow$ 幾何的条件を用いて, 無限遠のある方向に臨界点があることを示す。/