位相的漸化式と完全 WKB 解析

竹井 優美子 (Yumiko Takei)*

B.Eynard と N.Orantin によって [EO] で導入された位相的漸化式は, 行列模型の相関函数が満たす loop 方程式の一般化であり, スペクトル曲線と呼ばれる平面曲線 $(x(z), y(z))$(z は Riemann 面 Σ 上を動くパラメータ) から (相関関数に対応する) 多重微分形式の族 $W_{g,n}$ を構成する手続きである.

一方, 完全 WKB 解析は特異摂動型の微分方程式

$$\left(\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} - Q(x, \hbar)\right) \psi(x, \hbar) = 0 \tag{1}$$

(ここで, $\hbar$ は Planck 定数と呼ばれる小さなパラメータ) に対する研究手法である. (1) は WKB 解と呼ばれる形式解

$$\psi(x, \hbar) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} S(x, \hbar)\, dx\right) \tag{2}$$

を持つ. ただし, $S = \sum_{j \geqq -1} \hbar^j S_j(x)$ である. 完全 WKB 解析は解の大域挙動を解析するのに有効であり, その中でも Voros 係数はモノドロミー群や Stokes 現象を記述するために用いられる非常に重要な量である ([KT]).

量子曲線の理論は, この位相的漸化式と WKB 解を結びつけるものである. 具体的には, スペクトル曲線が "admissibility condition" と呼ばれる条件を満たせば, $W_{g,n}$ を用いて微分方程式の WKB 解が構成できることを主張している ([BE]).

このことから「位相的漸化式における Voros 係数の対応物は何か？」という疑問が生じる. この問いに答えるため, まず Gauss の超幾何微分方程式の一族について考察し, 以下の結果を得た:

(i) 上記の微分方程式の WKB 解は相関函数 $W_{g,n}$ を用いて, [BE] と同様の公式で構成できる. 特に, Gauss の超幾何微分方程式は admissibility condition を満たさないため, [BE] の結果を適用することはできない. その意味で, 我々の結果は [BE] の結果の一部の拡張である.

(ii) 上記の方程式の Voros 係数は, 対応するスペクトル曲線の自由エネルギーの差分として記述できる. その応用として, 自由エネルギーと Voros 係数の明示公式がそれぞれ得られる.

詳しくは [IKoT1] と [IKoT2] を参照されたい.

---

* 神戸大学大学院理学研究科数学専攻博士課程後期課程 2 年,
ytakei@math.kobe-u.ac.jp

本研究は名古屋大学の岩木耕平氏及び神戸大学の小池達也氏との共同研究に基づく.

参考文献

[BE] Bouchard, V. and Eyanard, B., Reconstructing WKB from topological recursion, *Journal de l'Ecole polytechnique – Mathematiques*, **4** (2017), pp. 845–908.

[EO] Eynard, B. and Orantin, N., Invariants of algebraic curves and topological expansion, *Communications in Number Theory and Physics*, **1** (2007), pp. 347–452; arXiv:math-ph/0702045.

[IKoT1] Iwaki, K., Koike, T., and Takei, Y.-M., Voros Coefficients for the Hypergeometric Differential Equations and Eynard-Orantin's Topological Recursion, Part I : For the Weber Equation; arXiv:1805.10945.

[IKoT2] Iwaki, K., Koike, T., and Takei, Y.-M., Voros Coefficients for the Hypergeometric Differential Equations and Eynard-Orantin's Topological Recursion, Part II : For the Confluent Family of Hypergeometric Equations, preprint; arXiv:1810.02946.

[KT] 河合隆裕, 竹井義次., 特異摂動の代数解析学, 岩波書店, 1998.