

曲面の非等方的エネルギーの幾何

小磯 深幸* (九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所)

1 問題設定と主結果の概要

本稿では, [10] 及び [7] で得られた結果の概要を紹介させていただく. テーマを一言で述べると, 「例えば結晶のように向きに依存するエネルギーを持つ立体の形は一意的か」となる. [10] では, エネルギー汎関数が凸性を持つ時にはエネルギー極小解の一意性が成立することを証明した. [7] では, エネルギー汎関数に凸性を仮定しない場合には「良い性質」を持つ解の一意性が必ずしも成立しないことを証明した. なお, 本節では問題と主結果の概要を説明し, 主要な用語の厳密な定義は付録として次節で述べる.

シャボン玉はなぜ丸いか? この問いは, 古典的な等周問題「3次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 において, 同じ体積を囲む閉曲面の中で面積が最小のものは何か?」の解が球面だからであると, 数学的に説明することができる. その理由は, シャボン玉は軽いためその重さを無視して働く力が表面張力のみであると見なし, 表面張力が表面積に比例すると考えると, シャボン玉は同じ体積の空気を包む薄膜の中で面積最小の形をとると考えられるからである.

一方, 液晶や固体の結晶は必ずしも球形ではなく, 例えば食塩の結晶は立方体である. これは, 結晶は原子や分子の配列に方向性があるために, 最小にするべきエネルギーが方向に依存することに由来する.

さて, \mathbb{R}^3 内の曲面の面積, 結晶のエネルギー, 相対論で重要なローレンツ・ミンコフスキー空間内の曲面の面積 ([5]) などを特別な場合として含む一般的なエネルギー汎関数として, 曲面の非等方的エネルギーがある. これが本稿の主題である.

なお, 表示を簡単にするために前半の研究課題の紹介の部分は \mathbb{R}^3 内の曲面について述べるが, 後半では最近の研究成果を $(n+1)$ 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^{n+1} 内の n 次元超曲面に対して述べる.

さて, 本研究は結晶の数学的抽象化も対象とするため, 滑らかな曲面だけでなく多面体や紡錘形のようなカドや尖った点を持つ曲面も考えたい. そこで, 「区分的 C^2 級弱はめ込み」という概念を導入する (定義 2.1). このクラスに属する曲面は, 有限個の C^2 級曲面を連続的に繋いでできる向き付け可能な曲面で, カドや尖った点のような「特異点」を許容し, 特異点の近傍で曲率が発散することも許容する (図 1, 2). また, 測度 0 の集合を除き法線方向が定義されることを要請する. 簡単のため, 以下では, このような曲面を「区分的 C^2 級曲面」と呼ぶ.

*本研究は科研費 (課題番号:JP18H04487) の助成を受けたものである. 2010 Mathematics Subject Classification: 49Q10, 53C45, 53C42, 53C44. キーワード: 非等方的平均曲率, 非等方的エネルギー, Cahn-Hoffman ベクトル場, Wulff 図形.

$S^2 = \{\nu \in \mathbb{R}^3 \mid |\nu| = 1\}$ を \mathbb{R}^3 内の単位球面とし, $\gamma : S^2 \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ を正值連続関数とする. この γ が非等方的エネルギー密度関数となる.

M を区分的 C^2 級閉曲面とし, その特異点全体の成す集合を $S(M)$ で表す. $M' := M \setminus S(M)$ の各点 p における M' の単位法ベクトルを $\nu(p)$ で表す. ただし, $\nu(p)$ の向きは, $\nu(p)$ と M' の p での単位接ベクトル $e_1(p), e_2(p)$ を並べた時に \mathbb{R}^3 の向きと整合性が取れるように選ぶ (定義 2.1). M の非等方的エネルギーを

$$\mathcal{F}_\gamma(M) := \int_{M'} \gamma(\nu) dA \quad (1)$$

により定義する. ここで dA は M の面積要素である. 特に $\gamma \equiv 1$ の時は, $\mathcal{F}_\gamma(M)$ は曲面 M の面積である. \mathbb{R}^3 内の同じ体積 V を囲む閉曲面の中で \mathcal{F}_γ の最小解 $W_\gamma(V)$ がただ一つ存在する (Wulff の定理, cf.[17]). 体積 $V_0 := (1/3) \int_{S^2} \gamma(\nu) dS^2$ に対するエネルギー最小解 $W_\gamma(V_0)$ をウルフ図形 (Wulff shape) と呼び, W_γ で表す. $W_\gamma(V)$ は W_γ に相似であり, $\gamma \equiv 1$ の時は $W_\gamma = S^2$ である. 以下では, どんな半径の球面も球面と呼ぶように, W_γ に相似な閉曲面は全て Wulff 図形と呼ぶことにする.

上述のように \mathcal{F}_γ の最小解は Wulff 図形のみであるが, より一般に, \mathcal{F}_γ の臨界点は Wulff 図形以外にも存在するだろうか? ここで, \mathcal{F}_γ の臨界点とは, \mathcal{F}_γ を, 与えられた体積 V を囲む閉曲面全体の成す無限次元空間 $\Omega[V]$ 上の関数 (汎関数と呼ぶ)

$$\mathcal{F}_\gamma : \Omega[V] \rightarrow \mathbb{R}, \quad M \mapsto \mathcal{F}_\gamma(M)$$

とみなした時の「第 1 変分 (関数の微分に対応する)」が 0 の曲面のことである. γ が C^2 級の時, 臨界点は, 非等方的平均曲率と呼ばれる曲面の曲がり具合を表す量 (定義 2.6) が至る所一定の曲面 (constant anisotropic mean curvature surface; CAMC 曲面と呼ぶ) となる. 特に $\gamma \equiv 1$ の時, 臨界点は平均曲率一定曲面となり, 「シャボン玉の数理モデル」と親しみを込めて呼ばれたり CMC 曲面と略記されてよく研究されている. なお, 臨界点 M において \mathcal{F}_γ の「第 2 変分 (関数の 2 階微分に対応する)」が非負の時, M は安定であると言う. よって特に, M が \mathcal{F}_γ の極小値を取るならば M は安定である.

さて, 問「 \mathcal{F}_γ の臨界点は Wulff 図形と相似か?」に戻る. この問の解答は $\gamma \equiv 1$ の時は「No!」であり, 複雑な形の CMC 閉曲面が存在することが知られている ([18], [8], [9]). しかしながら, 臨界点に「性質の良さ」を仮定すると一意的であることが期待される. 即ち, 臨界点 M が次の (I)-(III) の少なく共 1 つを満たせば, それは Wulff 図形と相似であると予想するのは自然である.

(I) M は自己交叉しない. (II) M は S^2 と同相である. (III) M は安定である. 実際, Wulff 図形 W_γ が滑らかな狭義凸曲面である時にはこの予想は正しいことが, 以下の論文の中で証明されている: (I): [1] for $\gamma \equiv 1$, [4] for general γ . (II): [3] for $\gamma \equiv 1$, [14] for general γ . (III): [6] for $\gamma \equiv 1$, [12] and [2] for general γ .

では, W_γ が滑らかでない場合や狭義凸ではない場合はどうか? これが本稿の主題である. [13] では, 平面内の CAMC 閉曲線の一意性が, γ が連続かつ凸である (注意 2.1) という仮定の元で証明されている. また, [15] では \mathbb{R}^3 内の曲面が扱われており, γ が C^3 級で W_γ が区分的に滑らかかつ W_γ の曲率と考える曲面に対する付加的仮定の元で安定な CAMC 閉曲面の一意性が示されている. このような歴史的経過を踏まえ, [10], [7] は以下

の結果を証明した. なお, 以下では, 次元を一般化し, \mathbb{R}^{n+1} 内の n 次元超曲面について述べる. まず, (III) を満たす CAMC 超曲面の一意性定理が次の形で成立する.

定理 1.1 ([10]). $S^n = \{\nu \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\nu\| = 1\}$ とおく. $\gamma: S^n \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ は C^2 級かつ凸とする. この時, 安定な CAMC 閉超曲面で r -th anisotropic mean curvature ($r = 1, \dots, n$) (定義 2.6) が可積分のものは Wulff 図形の相似に限る.

この結果は [15] の一般化となっている. また, (I) または (II) を満たす CAMC(超) 曲面の非一意性定理が以下のように得られた.

定理 1.2 ([7]). S^2 と同相な CAMC 閉曲面であって Wulff 図形の相似ではないものが存在するような, 凸でない C^∞ 級関数 $\gamma: S^2 \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ が存在する.

定理 1.3 ([7]). 自己交差を持たない CAMC 閉超曲面であって Wulff 図形の相似ではないものが存在するような, 凸でない C^∞ 級関数 $\gamma: S^n \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ が存在する.

本稿では, 定理 1.1 の証明は省略し, 定理 1.2, 1.3 の証明を与える例をあげる.

例 1.1 ([7]). $\gamma_2: S^2 \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ を次で定義する.

$$\gamma_2(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = (\nu_1^2 + \nu_2^2)^3 + \nu_3^6, \quad (\nu_1, \nu_2, \nu_3) \in S^2. \quad (2)$$

この時, 図 1a の閉曲面が Wulff 図形 W_{γ_2} である. さらに, 図 1b, 図 1c の閉曲面は CAMC 閉曲面であり, W_{γ_2} とは異なる. これらの曲面は全て回転面であり, それぞれ, 図 1d, 1e, 1f の閉曲線を縦軸について回転させることにより得られる. 緯線の次元を上げて S^1 から S^{n-1} にすることにより, $\gamma_n: S^n \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ 及び \mathbb{R}^{n+1} 内の n 次元 CAMC 回転閉超曲面の例が得られる. そしてこれらの例は, 定理 1.2, 1.3 の γ の例を与える.

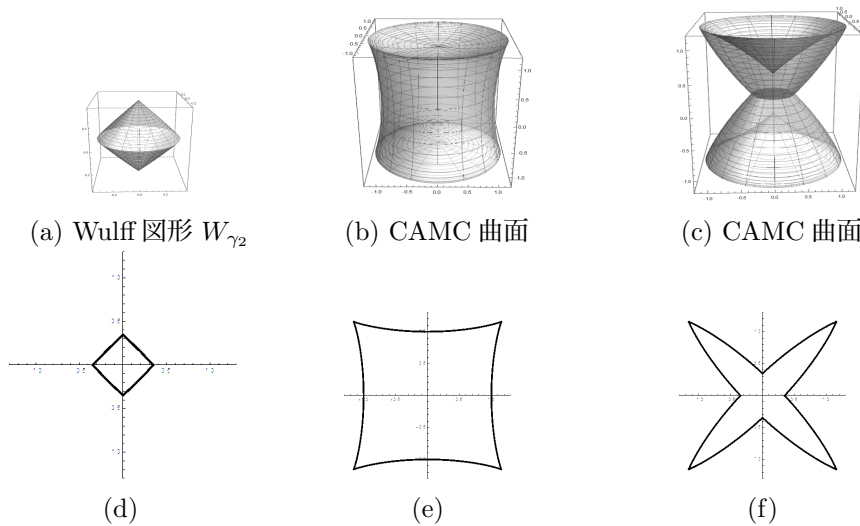


図 1: (a) は (2) で定義される γ_2 に対する Wulff 図形 W_{γ_2} . (b), (c) は γ_2 に対する CAMC 閉曲面. いずれも S^2 と同相であり自己交叉しないが, W_{γ_2} とは異なる. (a), (b), (c) は, それぞれ, 閉曲線 (d), (e), (f) を縦軸の周りに回転させることにより得られる回転面であり, 非等方的平均曲率は (内向き単位法ベクトルに対し) 至る所 -1 である.

2 付録：§1 で使用した用語の定義

本節では、§1 で使用した用語の厳密な定義を述べる。

2.1 区分的 C^r 級弱はめ込み、及び、その非等方的エネルギー ([10])

定義 2.1 (区分的 C^r 級弱はめ込み, [10]). $M = \cup_{i=1}^k M_i$ は向き付けられたコンパクトで連結な n 次元 C^∞ 多様体とする. ただし, 各 M_i は M の n 次元コンパクト部分多様体で, $M_i \cap M_j = \partial M_i \cap \partial M_j$, ($i, j \in \{1, \dots, k\}, i \neq j$), を満たすとする. ここで, ∂M_i は M_i の境界である. $r \in \mathbb{N}$ とする. 写像 $X : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ が区分的 C^r 級弱はめ込みであるとは, X と全ての $i \in \{1, \dots, k\}$ について以下の (A1), (A2), (A3) が成り立つ時を言う.

(A1) X は連続であり, 各 $X_i := X|_{M_i} : M_i \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ は C^r 級である.

(A2) M_i の内部を M_i° と書く時, X の制限 $X|_{M_i^\circ}$ は C^r 級はめ込みである.

(A3) $X_i|_{M_i^\circ}$ の単位法ベクトル場 $\nu_i : M_i^\circ \rightarrow S^n$ は C^{r-1} 級写像 $\nu_i : M_i \rightarrow S^n$ に拡張される. ここで, ν_i の向きは, M_i の任意の局所座標 (u^1, \dots, u^n) について $\{\nu_i, \partial/\partial u^1, \dots, \partial/\partial u^n\}$ が \mathbb{R}^{n+1} の標準的な向きと同じ向きを定めるようにとる.

X が点 $p \in M$ ではめ込みではない時, p は X の特異点であると言う. X の特異点全体の成す集合を $S(X)$ で表す.

$\gamma : S^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ は連続関数とする. $X : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ は区分的 C^1 級弱はめ込みとし, $\nu : M \setminus S(X) \rightarrow S^n$ は $X|_{M \setminus S(X)}$ の単位法ベクトル場とする. X の非等方的エネルギー $\mathcal{F}_\gamma(X)$ は次で定義される.

$$\mathcal{F}_\gamma(X) := \int_M \gamma(\nu) dA := \sum_{i=1}^k \int_{M_i} \gamma(\nu_i) dA. \quad (3)$$

2.2 Wulff 図形と非等方的エネルギー汎関数の凸性

$\gamma : S^n \rightarrow \mathbb{R}_{> 0}$ は連続とする. 以下は既知である.

定義 2.2 (\mathbb{R}^{n+1} 内の閉超曲面の凸性). S は \mathbb{R}^{n+1} 内の閉超曲面, 即ち有界開集合 Ω の境界とする. $\bar{\Omega} = \Omega \cup S$ とおく. S が凸 (resp. 狭義凸) とは, 任意の2点 $P, Q \in S$ を結ぶ線分 PQ について, $PQ \subset \bar{\Omega}$ (resp. $PQ \subset \bar{\Omega}$ かつ $PQ \cap S = \{P, Q\}$) が成立する時を言う.

注意 2.1 (非等方的エネルギー密度関数 γ の凸性. cf.[17]). (i) 集合 $\{\gamma(\nu)^{-1}\nu \mid \nu \in S^n\}$ が \mathbb{R}^{n+1} 内の凸閉超曲面の時, γ は凸であると言う.

(ii) γ が凸であることは, γ の homogeneous extension $\bar{\gamma} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$,

$$\bar{\gamma}(rX) := r\gamma(X), \quad \forall X \in S^n, \quad \forall r \geq 0, \quad (4)$$

が凸関数 (即ち, $\bar{\gamma}(X+Y) \leq \bar{\gamma}(X) + \bar{\gamma}(Y), \forall X, Y \in \mathbb{R}^{n+1}$) であることと同値である.

定義 2.3 (Wulff 図形). 凸集合 $\tilde{W}[\gamma] := \cap_{\nu \in S^n} \{X \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle X, \nu \rangle \leq \gamma(\nu)\}$ の境界を γ に対する Wulff 図形と呼び, W_γ で表す. ここで, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は \mathbb{R}^{n+1} の標準内積を表す. なお, $\tilde{W}[\gamma]$ そのものを Wulff 図形と呼ぶのが標準的であるが, 本稿では超曲面を扱うのが主体のため $W_\gamma := \partial \tilde{W}[\gamma]$ を Wulff 図形と呼ぶ.

注意 2.2 (Wulff 図形の滑らかさと凸性, cf.[11]). W_γ は滑らかとは限らない. W_γ が滑らかかつ狭義凸であるための必要十分条件は, γ が C^2 級かつ $n \times n$ 行列 $D^2\gamma + \gamma \cdot I_n$ が S^n の各点において正定値であることである. ここで, $D^2\gamma$ は γ の S^n 上のヘッセ行列 (Hessian) であり, I_n は n 次単位行列である.

2.3 Cahn-Hoffman 写像と非等方的平均曲率一定 (CAMC) 超曲面の例

以下, $\gamma : S^n \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ は C^2 級とする.

定義 2.4 (Cahn-Hoffman 写像, [10]). 次で定義される写像 $\xi_\gamma : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ を γ に対する Cahn-Hoffman 写像と呼ぶ.

$$\xi_\gamma(\nu) := D\gamma + \gamma(\nu)\nu, \quad \nu \in S^n. \quad (5)$$

ここで, $D\gamma$ は γ の勾配ベクトル場である.

注意 2.3 (Cahn-Hoffman 写像, cf.[10]). (i) $\gamma \equiv 1$ の時, ξ_γ は S^n から S^n の上への恒等写像である.

(ii) Wulff 図形 W_γ は, ξ_γ の像 $\xi_\gamma(S^n)$ の凸部分集合で \mathbb{R}^{n+1} の原点を内部に含む.

(iii) ξ_γ の非等方的平均曲率は至る所 -1 である.

例 2.1 ([7]). (i) $\gamma_1 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ を次で定義する.

$$\gamma_1(\cos \theta, \sin \theta) := \cos^6 \theta + \sin^6 \theta. \quad (6)$$

γ_1 に対する Cahn-Hoffman 写像 $\xi_{\gamma_1} : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ は次のように表示される.

$$\begin{aligned} \xi_{\gamma_1}(\cos \theta, \sin \theta) &= ((\cos \theta)(\cos^6 \theta + 6 \cos^4 \theta \sin^2 \theta - 5 \sin^6 \theta), \\ &\quad (\sin \theta)(-5 \cos^6 \theta + 6 \cos^4 \theta \sin^2 \theta + \sin^6 \theta)). \end{aligned} \quad (7)$$

像 $\xi_{\gamma_1}(S^1)$ は図 2a の曲線になる. 注意 2.3(iii) により, 図 1d の閉曲線が Wulff 図形 W_{γ_1} であることがわかる. さらに, 図 1e,1f の閉曲線は CAMC であるが, W_{γ_1} とは異なる.

(ii) γ_1 を縦軸について回転させて得られる非等方的エネルギー密度関数が (2) の $\gamma_2 : S^2 \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ である. Cahn-Hoffman 写像 $\xi_{\gamma_2} : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ の像 $\xi_{\gamma_2}(S^2)$ は図 2b のようになる. 注意 2.3(iii) により, 図 1a の閉曲面が Wulff 図形 W_{γ_2} であり, 図 1b,1c の閉曲面は CAMC であるが W_{γ_2} とは異なる.

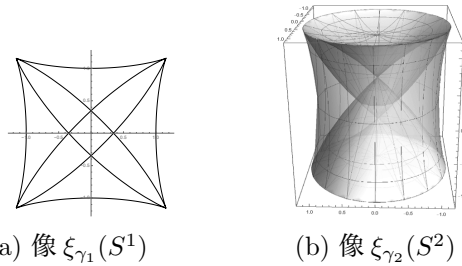


図 2: (a) は (6) の γ_1 に対する Cahn-Hoffman 写像 (7) の像. (b) は (2) の $\gamma_2 : S^2 \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ に対する Cahn-Hoffman 写像 $\xi_{\gamma_2} : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ の像.

2.4 Cahn-Hoffman 場または非等方的 Gauss 写像, 非等方的曲率, Euler-Lagrange 方程式

$\gamma : S^n \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ は C^2 級とし, $X : M = \cup_{i=1}^k M_i \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ は区分的 C^2 級弱はめ込みとする. §2.1, 2.3 の記号を用いる.

定義 2.5 (Cahn-Hoffman 場, または, 非等方的 Gauss 写像, 非等方的型作用素. cf.[10]). (i) 次で定義される写像 $\tilde{\xi}_{\gamma,i}$ を X の γ に対する Cahn-Hoffman 場, または, 非等方的 Gauss 写像と呼ぶ.

$$\tilde{\xi}_{\gamma,i} := \xi_\gamma \circ \nu_i : M_i \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad i = 1, \dots, k.$$

簡単のため, しばしば $\tilde{\xi}_{\gamma,i}$ を $\tilde{\xi}_i$ と書く.

(ii) 線形写像 $S_p^\gamma := -(d\tilde{\xi}_{\gamma,i})_p : T_p M_i \rightarrow T_p M_i$, ($p \in M_i^o$), を X_i の γ に対する非等方的型作用素と呼ぶ. ここで, $T_p M_i$ は超曲面 $X(M_i)$ の点 $X(p)$ における接空間と同一視している.

定義 2.6 (非等方的曲率. cf.[16], [4]). (i) S_p^γ の固有値を X の点 p での非等方的主曲率と呼び, $k_1^\gamma(p), \dots, k_n^\gamma(p)$ で表す.

(ii) σ_r^γ を $k_1^\gamma, \dots, k_n^\gamma$ の基本対称関数 (elementary symmetric function) とする. 即ち,

$$\sigma_r^\gamma := \sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_r \leq n} k_{l_1}^\gamma \cdots k_{l_r}^\gamma, \quad r = 1, \dots, n \quad (8)$$

とおく. $\sigma_0^\gamma := 1$ とおく. $H_r^\gamma := \sigma_r^\gamma / {}_n C_r$ を X の r -th anisotropic mean curvature と呼ぶ.

(iii) H_1^γ を X の非等方的平均曲率と呼ぶ. 簡単のため, しばしば H_1^γ を Λ と書く.

命題 2.1 (Euler-Lagrange 方程式, Koiso [10]. $n = 2$ の時は B. Palmer [15]). X が, 囲む $(n+1)$ 次元体積を保つ任意の変分に対する \mathcal{F}_γ の臨界点であるための必要十分条件は, 以下の (i) と (ii) が成り立つことである.

(i) X の非等方的平均曲率 Λ は $M \setminus S(X)$ 上で一定である.

(ii) 任意の点 $\zeta \in \partial M_i \cap \partial M_j$ において, $\tilde{\xi}_i(\zeta) - \tilde{\xi}_j(\zeta) \in T_\zeta M_i \cap T_\zeta M_j = T_\zeta(\partial M_i \cap \partial M_j)$, ($i, j \in \{1, \dots, k\}$), が成り立つ.

定義 2.7 (CAMC 超曲面. [10]). X が命題 2.1 の (i) と (ii) を満たす時, X を非等方的平均曲率一定 (CAMC) 超曲面と呼ぶ.

注意 2.4. $\gamma \equiv 1$ の時, 非等方的 Gauss 写像, 非等方的型作用素, 非等方的主曲率, r -th anisotropic mean curvature, 非等方的平均曲率は, それぞれ, Gauss 写像, 型作用素, 主曲率, r -th mean curvature, 平均曲率と一致する.

参考文献

- [1] A. D. Alexandrov. A characteristic property of spheres. *Ann. Mat. Pura Appl.* **58** (1962), 303–315.
- [2] N. Ando. Hartman-Wintner's theorem and its applications. *Calc. Var. Partial Differential Equations* **43** (2012), 389–402.

- [3] J. L. Barbosa and M. do Carmo. Stability of hypersurfaces with constant mean curvature. *Math. Z.* **185** (1984), 339–353.
- [4] Y. He, H. Li, H. Ma and J. Ge. Compact embedded hypersurfaces with constant higher order anisotropic mean curvatures. *Indiana Univ. Math. J.* **58** (2009), 853–868.
- [5] A. Honda, M. Koiso and Y. Tanaka. Non-convex anisotropic surface energy and zero mean curvature surfaces in the Lorentz-Minkowski space. *Journal of Math-for-Industry* **5** (2013), 73–82.
- [6] H. Hopf. Differential geometry in the large. Lecture Notes in Math. **1000**. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [7] Y. Jikumaru and M. Koiso. Non-uniqueness of closed embedded non-smooth hypersurfaces with constant anisotropic mean curvature. preprint.
- [8] N. Kapouleas. Complete constant mean curvature surfaces in euclidean three-space. *Ann. of Math.(2)* **131** (1990), 239–330.
- [9] N. Kapouleas. Constant mean curvature surfaces constructed by fusing Wente tori. *Invent. Math.* **119** (1995), 443–518.
- [10] M. Koiso. Uniqueness of stable closed non-smooth hypersurfaces with constant anisotropic mean curvature. preprint.
- [11] M. Koiso and B. Palmer. Geometry and stability of surfaces with constant anisotropic mean curvature. *Indiana Univ. Math. J.* **54** (2005), 1817–1852.
- [12] M. Koiso and B. Palmer. Anisotropic umbilic points and Hopf’s theorem for surfaces with constant anisotropic mean curvature. *Indiana Univ. Math. J.* **59** (2010), 79–90.
- [13] F. Morgan. Planar Wulff shape is unique equilibrium. *Proc. Amer. Math. Soc.* **133** (2005), 809–813.
- [14] B. Palmer. Stability of the Wulff shape. *Proc. Amer. Math. Soc.* **126** (1998), 3661–3667.
- [15] B. Palmer. Stable closed equilibria for anisotropic surface energies: surfaces with edges. *J. Geom. Mech.* **4** (2012), 89–97.
- [16] R. C. Reilly. The relative differential geometry of nonparametric hypersurfaces. *Duke Math. J.* **43** (1976), 705–721.
- [17] J. E. Taylor. Crystalline variational problems. *Bull. Amer. Math. Soc.* **84** (1978), 568–588.
- [18] H. C. Wente. Counterexample to a conjecture of H. Hopf. *Pacific J. Math.* **121** (1986), 193–243.