複素空間形の実超曲面について

昆　万佑子（信州大学）

正則断面曲率 $4c$ の複素 n 次元複素空間形を $M^n(c)$ と表す．$M^n(c)$ の実超曲面 M は，概接触構造 (ϕ, ξ, η, g) を持つ．実超曲面の各種曲率テンソルや型作用素に種々の幾何学的な条件を課して分類を行うことは，実超曲面の理論の主要な問題の一つであるが，本講演ではリッチテンソルに着目した分類定理を紹介する．

正則断面曲率が 0 ではない複素空間形の実超曲面で，Einstein であるものは存在しないことが知られている．M のリッチテンソル S が，定数 a, b に対して $S(X,Y) = ag(X,Y) + b\eta(X)\eta(Y)$ を満たすとき，実超曲面は pseudo-Einstein であるという．なお，a, b が関数であるときも，a, b は定数となることが知られている．複素空間形の pseudo-Einstein 実超曲面に対しては，Kon(1979)，Montiel(1985)，Kim-Ryan(2008)，Ivey-Ryan(2009) による分類定理が得られている．

ある実数 a が存在し，ξ と直交する X, Y に対して，$S(X,Y) = ag(X,Y)$ を満たすという条件を考察する．これは，pseudo-Einstein を拡張した条件である．このとき，以下の結果を得た．

定理 A (2018, K).　M は複素空間形 $M^n(c)$, $n \geq 3$, $c \neq 0$ の実超曲面であるとする．ある定数 a に対して，リッチテンソル S が $S(X,Y) = ag(X,Y)$, $X, Y \perp \xi$ を満たすための必要十分条件は，M が pseudo-Einstein 超曲面であることである．

また，構造ベクトル場 ξ が主曲率ベクトル場である実超曲面を Hopf 超曲面であるといい，複素空間形の実超曲面において広く研究されている一般的な条件の一つである．リッチテンソル S がある関数 β に対して $S\xi = \beta\xi$ を満たすという条件は，この条件を拡張したものであり，線織実超曲面など，Hopf 超曲面ではないが $S\xi = \beta\xi$ を満たす重要な具体例も存在する．この条件のもと，実超曲面のいくつかの分類定理を紹介する．以下はその一例である．

リッチテンソル S が，$g((\nabla_X S)X, \xi) = 0$, $X \perp \xi$ を満たすとき，S は transversal η-Killing であるという．

定理 B (2018, K).　M は $M^2(c)$, $c \neq 0$ の実超曲面であるとする．リッチテンソル S がある関数 β に対して $S\xi = \beta\xi$ を満たし，transversal η-Killing であることの必要十分条件は，M が局所的に totally η-umbilical であるか，線織実超曲面であることである．