

On the equivalence classes of spherical curves by Reidemeister moves I and III

伊藤 昇* 橋爪 恵†

1 背景の概説と主結果

いくつかの1次元の3次元球面への埋め込みを**絡み目**といい、特に成分が1のものを**結び目**という。単純には、ひもを適当に絡め、その端点を繋いだものが結び目である。結び目・絡み目理論の研究での大きな問題の一つに任意の2つ絡み目に対してその2つの絡み目は同じものなのか判定するというものがある。本研究はこの結び目・絡み目に関するもので、特異点論との関わりも考えられているものである。

今回対象としているのは1次元の2次元へのはめ込みである**球面曲線**である。これは結び目・絡み目理論の研究者に対しては結び目射影図を考えていると思って問題ない。球面曲線はライデマイスター移動 RI, RII, RIII (図1)によってすべて交点のない球面曲線(自明な球面曲線)にできることが知られている。一方で、結び目図式におけるライデマイスター移動 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ に対して、結び目図式から定義されるバシリエフ不変量は Ω_2 の独立性を区別しないことも知られている。バシリエフ不変量は結び目の完全不変量であることを期待する研究者もいることから、「任意の球面曲線は RI, RIII で自明にできるのではないだろうか (Östlund 予想)」, という問題が生じていた [6]。2014年に Hagge と Yazinski はその反例を出した [2]。そのため RI と RIII の同値関係による球面曲線の分類問題は非自明であることがわかった。さらに無限個の同値類の存在も示された [4]。しかし、現在に至るまでどの同値類も決定はなされていない。この同値類はどのように決定されるのだろうか? また、与えられた球面曲線がどの同値類に入るかはどのように判定されたりするのであろうか? 本稿ではこの問題について取り組む。

記号 1. 球面曲線 P に対して P の交点数を $n(P)$ とする。

*email:noboru@ms.u-tokyo.ac.jp, 所属: 東京大学 大学院数理科学研究科 〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1

†email:megumihashizume@meiji.ac.jp, 所属: 明治大学研究・知財戦略機構 〒164-8525 東京都中野区中野 4-21-1

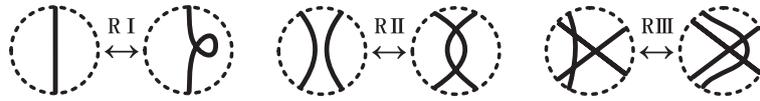


図 1: RI, RII, RIII

定義 1. 球面曲線の局所変形 $\alpha^+, \alpha^-, \beta^+, \beta^-$ を図 2 で定義する. 局所変形の向きを指定しないときは α^+, α^- (β^+, β^- , resp.) をまとめて α (β , resp.) と書く¹.

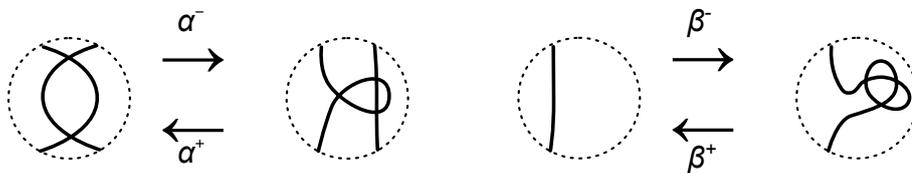


図 2: $\alpha^+, \alpha^-, \beta^+, \beta^-$.

定義 2. P を球面曲線とする. t_1, t_2 をそれぞれ P の一部とする. D_1, D_2 を球面 S^2 上の 2 つの円盤とする. S^2 の円周 E で $D_1 \sqcup_E D_2 = S^2$ かつ $E \cap P = \{ \text{a double point } d \}$ かつ $t_1 \subset D_1, t_2 \subset D_2$ を満たすものが存在するとき P は *reducible* (可約) という. このときの d を *nugatory double point* と呼ぶ. 可約ではない球面曲線を *irreducible* (既約) という (図 3).

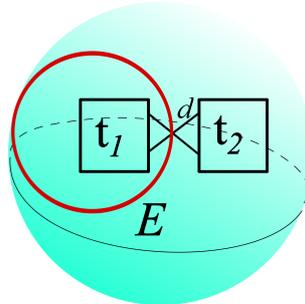


図 3: nugatory double point

本講演では次の結果を紹介した.

定理 1. P, P' を既約球面曲線とする. $n(P)$ は記号 1 のものとする.

このとき, $|n(P') - n(P)| = 0, 1$, もしくは 3 である.

1. $n(P') - n(P) = 0 \Leftrightarrow P, P'$ は唯 1 回の RIII で移る.

¹ α, β についてスライドとは異なり, 鏡像を同一視する記法を用いた.

2. $|n(P') - n(P)| = 1 \Leftrightarrow P, P'$ は唯 1 回の α で移る.
3. $|n(P') - n(P)| = 3 \Leftrightarrow P, P'$ は唯 1 回の β で移る.

球面曲線の RI, RIII の同値関係において, すぐに気づくことは RIII は交点数を変えないこと, 球面曲線に 3 辺形がないと適用できないことである. 問題は, ある球面曲線から出発して, RI が効いて生まれる球面曲線がどのようなものであるかを記述することである. 定理 1 の意味を平易にいうと次のようになる. 2 つの既約な曲線間でちょうど 1 回の RIII といくつかの RI による変形を記述するため, 無駄な RI を削ぎ落とし, RI が essential に曲線を変化させるちょうど 1 回の RIII を含む変形を明示した. 言い換えると, 2 つの既約球面曲線間で, ちょうど 1 回の RIII を含む変形列は, 交点数を変えないなら RIII, 交点数を変える局所変形は 2 種類であることを示した. これにより, 与えられた既約球面曲線から, ちょうど 1 回の RIII を含む変形で得られる既約球面曲線の有限個の可能性が明示的に求められたことになる.

2 準備

この章では第 1 章の記号を自由に使ってよいものとする.

記号 2. P, P' を球面曲線とする. $d_3(P, P')$ を次で定める. $d_3(P, P') = \min\{\text{the number of RIII's} \mid P, P' \text{ が up to ambient isotopy で RI, RIII により移り合う}\}$. P, P' が up to ambient isotopy で RI, RIII により移り合わないとき $d_3(P, P') = \infty$ とする.

P, P' の条件が対称的であることに注意すると, 定理 1 は次を示せばよい (交点数 $n(P)$ に条件を入れる)².

命題 1. 球面曲線 P とする. $n(P), \alpha^+, \beta^+$ は第 1 章のものとする. P, P' を irreducible な球面曲線とし, $d_3(P, P') = 1, n(P') \leq n(P)$ とする. このとき, $n(P') - n(P) = 0, -1$, もしくは -3 であり, それ以外はない. さらに次が言える:

1. $n(P') - n(P) = 0$ のとき P, P' は唯 1 回の RIII で移る.
2. $n(P') - n(P) = -1$ のとき P, P' は唯 1 回の α^+ で移る.
3. $n(P') - n(P) = -3$ のとき P, P' は唯 1 回の β^+ で移る.

定義 3. RI, RIII の各場合に対して $\text{RI}^\pm, \text{wRIII}^{(0)}, \text{wRIII}^{(\pm 1)}, \text{sRIII}^{(0)}, \text{sRIII}^{(\pm 1)}, \text{sRIII}^{(\pm 2)}$ を図 4 によって定める.

命題 1 を証明する前に鍵となる式について考察しておく.

²定理 1, 命題 1 の α, β の符号はライデマイスター移動 RIII の符号から誘導して定めたものである.

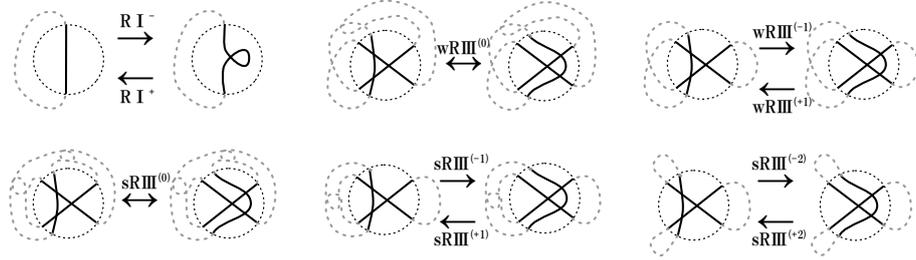


図 4: RI^\pm , $wRIII^{(0)}$, $wRIII^{(\pm 1)}$, $sRIII^{(0)}$, $sRIII^{(\pm 1)}$, $sRIII^{(\pm 2)}$. 円盤外の点線は球面曲線のつながり方を表す.

記号 3. P, P' を球面曲線とする. P, P' が up to ambient isotopy で $RI, RIII$ により移り合うとする. このとき, ambient isotopy を省略した $RI, RIII$ からなる有限列 $\{Op_i\}_{i=1}^m$ を, 次のように表示することにする.

$$P = P_0 \xrightarrow{Op_1} P_1 \xrightarrow{Op_2} P_2 \xrightarrow{Op_3} \dots \xrightarrow{Op_m} P_m = P'.$$

P, P' が $d_3(P, P') = 1$ を満たすとき次の補題 1 から 4 が成り立つ [1].

補題 1. $n(P') - n(P) = \#\{i \mid Op_i = RI^+\} - \#\{i \mid Op_i = RI^-\}$.

記号 4. P に対して $f_c(P)$ を prime factor の個数とする.

補題 2. Op_i が $RI^+(RI^-, \text{ resp.})$ ならば $f_c(P_i) - f_c(P_{i-1}) = 1 (-1, \text{ resp.})$.

定義 3 により次がわかる.

補題 3. $k = 1$ または 2 とする. このとき次が言える. Op_i が $wRIII^{(+1)}(wRIII^{(-1)}, \text{ resp.})$ ならば $f_c(P_i) - f_c(P_{i-1}) = 1 (-1, \text{ resp.})$. Op_i が $sRIII^{(+k)}(sRIII^{(-k)}, \text{ resp.})$ ならば $f_c(P_i) - f_c(P_{i-1}) = k (-k, \text{ resp.})$.

補題 1-3 より, 補題 4 が言える.

補題 4. 記号 3 の $\{Op_i\}_{i=1}^m$ に対して

$$\begin{aligned} f_c(P') - f_c(P) &= n(P') - n(P) + \#\{Op_i = RIII \mid f_c(P_i) - f_c(P_{i-1}) = 1\} \\ &\quad - \#\{Op_i = RIII \mid f_c(P_i) - f_c(P_{i-1}) = -1\} \\ &\quad + 2\#\{Op_i = RIII \mid f_c(P_i) - f_c(P_{i-1}) = 2\} \\ &\quad - 2\#\{Op_i = RIII \mid f_c(P_i) - f_c(P_{i-1}) = -2\}. \end{aligned} \tag{1}$$

記号 5. 与えられた球面曲線 P に対して RI^- を繰り返し使って 1 辺形を無くしたものを $\text{reduced}(P)$ と書く³.

³記号は [1] に従った.

[3, Theorem 2.2 (1)] によりこれは一意に定まる (essential には Khovanov[5] による). このことから補題 5 が言える.

補題 5. P, P' を既約な球面曲線とする. $d_3(P, P') = 1$ を実現する列

$$P = P_0 \xrightarrow{Op_1} P_1 \xrightarrow{Op_2} P_2 \xrightarrow{Op_3} \dots \xrightarrow{Op_m} P_m = P'$$

が存在するとし, $Op_i = \text{RIII}$ とする. このとき

$$\text{reduced}(P_{i-1}) = P, \text{reduced}(P_i) = P'$$

3 命題 1 の証明

RI が生成する同値関係においては, 各同値類で 1 辺形をもたない球面曲線 $\text{reduced}(P)$ が唯一つ定まることが知られている [3, Theorem 2.2 (1)] (この結果自体は, essential には [5] において doodle に対して扱われた同値関係に含まれる). この章での記号は第 1 章, 第 2 章に準ずる.

記号 6. 式 (1) の右辺の 4 項について付番する:

- (i) $:= \#\{Op_i = \text{RIII} \mid f_c(P_i) - f_c(P_{i-1}) = 1\},$
- (ii) $:= \#\{Op_i = \text{RIII} \mid f_c(P_i) - f_c(P_{i-1}) = -1\},$
- (iii) $:= \#\{Op_i = \text{RIII} \mid f_c(P_i) - f_c(P_{i-1}) = 2\},$
- (iv) $:= \#\{Op_i = \text{RIII} \mid f_c(P_i) - f_c(P_{i-1}) = -2\}.$

記号 7. 1 回の $w\text{RIII}^{(+1)}$ ($s\text{RIII}^{(+1)}$, resp.) によって新しくできた nugatory double point を d^w (d^s , resp.) と呼ぶ. また, この $w\text{RIII}^{(+1)}$ ($s\text{RIII}^{(+1)}$, resp.) を適用後にできた 3 辺形の頂点を途中で通過せずに d^w (d^s , resp.) から d^w (d^s , resp.) に戻るとき, その sub-curve を T^w (T^s , resp.) とする (図 5).

1 回の $s\text{RIII}^{(+2)}$ によって新しくできた nugatory double points を d, d', d'' と呼ぶ. また, この $s\text{RIII}^{(+2)}$ を適用後にできた 3 辺形の頂点を途中で通過せずに d (d' , resp.) から d (d' , resp.) に戻るとき, その sub-curve を T_1 (T_2 , resp.) とする (図 6).

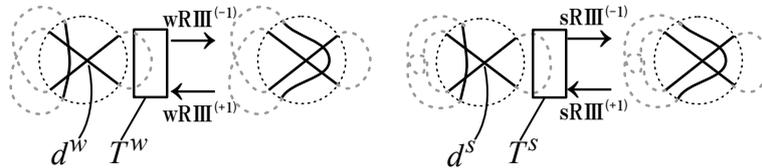


図 5: $w\text{RIII}^{(\pm 1)}, s\text{RIII}^{(\pm 1)}$ に付随する d^w, T^w, d^s, T^s .

命題 1 の証明をする.

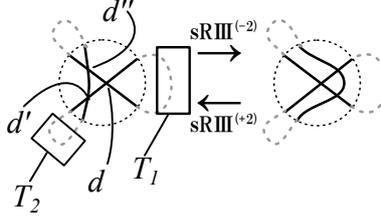


図 6: $sRIII^{(\pm 2)}$ に付随する d, d', d'', T_1, T_2 .

Proof. 仮定 $n(P') \leq n(P)$ から,

$$\begin{aligned} Op_i = RIII &\in \{Op_i = RIII \mid f_c(P_i) - f_c(P_{i-1}) = 1\} \\ &\sqcup \{Op_i = RIII \mid f_c(P_i) - f_c(P_{i-1}) = 2\} \\ &\sqcup \{Op_i = RIII \mid f_c(P_i) - f_c(P_{i-1}) = 0\}. \end{aligned}$$

よって 1 回行われる $RIII$ がどの集合に属しているかによって場合分けを行う。まず $(ii) = 1$ ($(iv) = 1$, resp.) の可能性はない。すると, $(i) = 1$, $(iii) = 1$, $Op_i = RIII^{(0)}$ のいずれかとなる。以下, この順番で場合分けを行う。

Case 1. $n(P') - n(P) = 0$ とする。

Case 1-1. $(i) = 1$ のとき。式 (1) より $f_c(P') - f_c(P) = 1$ 。このとき, $wRIII^{(+1)}$ ($sRIII^{(+1)}$, resp.) もしくは RI^+ によって生成された nugatory double point d^w (d^s , resp.) が P' に残る。これは P' の既約性に矛盾する。

Case 1-2. $(iii) = 1$ のとき。式 (1) より $f_c(P') - f_c(P) = 2$ 。このとき, $sRIII^{(+2)}$ もしくは RI^+ によって生成された nugatory double point d, d' , または d'' が P' に残る。これは P' の既約性に矛盾する。

Case 1-3. $Op_i = RIII^{(0)}$ のとき。このとき f_c を変化させない。式 (1) から $n(P') - n(P) = 0$ である。補題 5 と P, P' が既約であることから, $P = \text{reduced}(P_{i-1})$, $P' = \text{reduced}(P_i)$ である。このとき P' は 1 回の $RIII$ により P から移される。

Case 2. $n(P') - n(P) = -1$ とする。

Case 2-1. $(i) = 1$ のとき。 P' が irreducible より, $wRIII^{(+1)}$ ($sRIII^{(+1)}$, resp.) に関する nugatory double point の一つ d^w (d^s , resp.) が RI^- によって消去される。したがって T^w (T^s , resp.) は有限回の RI 's により simple arc となる。補題 5 と P, P' が既約であることから, $P' = \text{reduced}(P_i)$ は 1 回の α^+ により $P = \text{reduced}(P_{i-1})$ から移される。

Case 2-2. $(iii) = 1$ のとき. 式 (1) より $f_c(P') - f_c(P) = 1$. このとき T_1 または T_2 が prime factor として残るので, d, d', d'' のいずれか一つが P' に現れる. これは P' が既約であることに反する (d, d', d'' のどれもが nugatory double point だから). この可能性はない.

Case 2-3. $Op_i = \text{RIII}^{(0)}$ のとき. $n(P') - n(P) = -1$ であるから, $Op_i = \text{RIII}^{(0)}$ によって nugatory double point が生まれて, それは RI^- で消去される. 一方, $Op_i = \text{RIII}^{(0)}$ によって nugatory double point は生まれない. これらは矛盾を生み, $Op_i = \text{RIII}^{(0)}$ の可能性はない.

Case 3. $n(P') - n(P) = -3$ とする.

Case 3-1. $(i) = 1$ のとき. 式 (1) より $f_c(P') - f_c(P) = -2$. このとき, P' が既約だから d^w (d^s , resp.) は RI^- で消去される. 補題 5 と P が既約であることから, $\text{reduced}(P_{i-1}) = P$. これに注意すると, P においては T^w (T^s , resp.) は simple arc である. したがって, 減る可能性のある prime factor は 1 しかない. これは $f_c(P') - f_c(P) = -2$ に矛盾する. このとき, prime factors が 2 減らなければならないので, RI^- の数 $- \text{RI}^+$ の数は 2. P は nugatory double point をもつ. P の既約性に矛盾.

Case 3-2. $(iii) = 1$ のとき. P' が既約であることにより, $\text{sRIII}^{(+2)}$ ($= Op_i$) に関する double points d, d', d'' (nugatory double points) が RI^- によって消去される. よって, 一般性を失わず例えば T_1, T_2 が有限回の RI^s によって simple arcs に変形される. 今, 補題 5 と P, P' が既約であることから, $P' = \text{reduced}(P_i)$, $P = \text{reduced}(P_{i-1})$. このことに注意すると, T_1, T_2 が有限回の RI^s によって simple arcs に変形されるので, P' は 1 回の β^+ により P から移される.

Case 3-3. $Op_i = \text{RIII}^{(0)}$ のとき. 補題 5 と P, P' が既約であることから, $P = \text{reduced}(P_{i-1})$, $P' = \text{reduced}(P_i)$ である. $f_c(P') - f_c(P) = 0$. $n(P') - n(P) = -3$ であるから, 式 (1) は成り立たない. $Op_i = \text{RIII}^{(0)}$ の可能性はない.

Case 4. $n(P') - n(P) = -2$ とする. このとき, 減る double points を b, b' とする. このとき $Op_i = \text{sRIII}^{(\pm 2)}$ しか可能性はないので, b, b' は d, d', d'' のうちの 2 つとしてよい. 一般性を失わず例えば d, d' とすると, T_1, T_2 は RI^s により simple arcs となる. よって, d'' も RI^- により消去される. このとき, P' は既約だから, $n(P') - n(P) \leq -3$ となり, $n(P') - n(P) = -2$ と矛盾.

Case 5. $n(P') - n(P) \leq -4$ とする. このとき $Op_i = \text{sRIII}^{(\pm 2)}$ しか可能性はない. 減る c_j ($j = 1, 2, 3, 4, \dots$) は d, d', d'' の数 ($= 3$) を超えている. 矛盾.

□

謝辞

自身の研究分野，研究結果を様々な分野の研究者に知っていただける機会を与えてくださった奈良女子大学の松澤先生，他岡潔女性数学者セミナー世話人の先生方に深く感謝致します。また，セミナーを行なうにあたってスタッフとして支えてくれた学生さんにも感謝致します。

参考文献

- [1] Y. Funakoshi, M. Hashizume, N. Ito, T. Kobayashi, H. Murai, A distance on the equivalence classes of spherical curves generated by deformations of type RI, preprint, submitted.
- [2] T. Hagge and J. Yazinski, On the necessity of Reidemeister move 2 for simplifying immersed planar curves, *Banach Center Publ.*, 103, 101–110, 2014.
- [3] N. Ito and Y. Takimura, (1, 2) and weak (1, 3) homotopy on knot projections, *J. Knot Theory Ramifications* **22** (2013), 1350085, 14pp.
- [4] N. Ito and Y. Takimura, On a nontrivial knot projection under (1, 3) homotopy, *Topology Appl.* 210 (2016), 22–28.
- [5] M. Khovanov, Doodle groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **349** (1997) 2297–2315.
- [6] O-P. Östlund, Invariants of knot diagrams and diagrammatic knot invariants, Thesis (Ph.D.)–Uppsala Universitet, 2001.