Lax pair をもつ非線形方程式の完全 WKB 解析

梅田陽子 (山口大学)

完全 WKB 解析

- T. Kawai and Y. Takei, Algebraic Analysis of Singular Perturbation Theory, *Amer. Math. Soc.*, 2005, (特異摂動の代数解析, 岩波 1998)
- 高階 ($m \geq 3$) 線型常微分方程式

$$\left(\eta^{-m}\frac{d^m}{dx^m} + a_1(x)\eta^{-(m-1)}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \cdots + a_m(x)\right)\psi = 0.$$

- 超幾何方程式（c.f. Mika Tanda, Takashi Aoki, Toshinori Takahashi)
- 非線型常微分方程式 - Painlevé 方程式, 高階 Painlevé 方程式
- 偏微分方程式系- Pearcey 系 (c.f. Sampei Hirose)

2nd-ODE の場合と大きな違い

- 高階 ($m \geq 3$) 線型常微分方程式
  仮想変わり点, New Stokes 曲線が必要
- 非線型常微分方程式
  インスタントン解, 第 1 種変わり点, 第 2 種変わり点

本研究に関する重要な結果

- T. Kawai, T. Koike, Y. Nishikawa, Y. Takei, On the Stokes geometry of higher order Painlevé equations, Astérisque **297** (2004) 117-166.
- T. Aoki T. Kawai, Y. Takei, WKB analysis of Painlevé transcendents with a large parameter. II, World Scientific Publishing (1996) 1–49.
- Y. Takei, Toward the exact WKB analysis for higher-order Painlevé equations - The case of Noumi-Yamada systems with a large parameter-, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **40** (2004) 709–730
- N. Honda, On the Stokes geometry for Noumi-Yamada system, RIMS Kokyuroku Bessatus B2 (2007) 45-72.

- パンルヴェ方程式 P_{J} (J= I, II, . . . , VI)
- パンルヴェ階層 $(P_{\mathrm{J}})_m$ (J = I, II, 34, IV)
- 野海山田方程式

大きなパラメータをもつ I 型パンルヴェ階層

For $m = 1, 2, \ldots,$ the m-th member $(P_{\mathrm{I}})_m$ (cf. Kudryashov)

$$(P_{\mathrm{I}})_m \quad \begin{cases} \eta^{-1}\dfrac{du_j}{dt} = 2v_j, & j = 1, 2, \ldots, m, \\[2ex] \eta^{-1}\dfrac{dv_j}{dt} = 2(u_{j+1} + u_1 u_j + w_j), & j = 1, 2, \ldots, m, \end{cases}$$

$$w_j = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{j} u_k u_{j+1-k} + \sum_{k=1}^{j-1} u_k w_{j-k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{j-1} v_k v_{j-k} + c_j + \delta_{jm} t.$$

ここで, c_j は定数, $u_{m+1} = 0$.

$$\text{If } m = 1, \quad (P_{\mathrm{I}})_1 \quad \Leftrightarrow \quad (P_{\mathrm{I}}) \quad \frac{d^2\lambda}{dt^2} = \eta^2(6\lambda^2 + t)$$

大きなパラメータをもつ IV 型パンルヴェ階層

For $m = 1, 2, \ldots,$ the m-th member $(P_{\mathrm{IV}})_m$ (cf. Gordoa-Joshi-Pickering)

$$(P_{\mathrm{IV}})_m \begin{cases} \eta^{-1}\dfrac{du_j}{dt} = -2(u_1u_j + v_j + u_{j+1}) + 2c_ju_1, & j = 1, 2, \ldots, m, \\ \eta^{-1}\dfrac{dv_j}{dt} = 2(v_1u_j + v_{j+1} + w_j) - 2c_jv_1, & j = 1, 2, \ldots, m \end{cases}$$

with

$$u_{m+1} = -(\gamma t u_1 + \alpha_1 + \frac{1}{2}\eta^{-1}\gamma), \quad v_{m+1} = -w_m - \gamma t v_1 - \frac{(v_m - \alpha_1)^2 - \alpha_2^2}{2(u_m - \gamma t - c_m)}.$$

Here $\gamma(\neq 0)$, α_1, α_2, c_j 定数,

$$w_j := \sum_{k=1}^{j-1} u_{j-k}w_k + \sum_{k=1}^{j} u_{j-k+1}v_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{j-1} v_{j-k}v_k - \sum_{k=1}^{j-1} c_{j-k}w_k.$$

大きなパラメータをもつ Noumi-Yamada system NY_{2m}

$$\eta^{-1}\frac{du_j}{dt} = u_j(u_{j+1} - u_{j+2} + \cdots - u_{j+2m}) + \alpha_j$$

$j = 0, 1, \ldots, 2m$, α_j are formal power series of η^{-1} with coefficients satisfying

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{2m} = \eta^{-1}.$$

Here u_j may be assumed to satisfy the following normalization condition

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{2m} = t.$$

and $u_{j+2m+1} = u_j$.

$$(*)\begin{cases} \eta^{-1}\dfrac{du_j}{dt} = f_j(u, v), & j = 1, 2, \ldots, m, \\ \eta^{-1}\dfrac{dv_j}{dt} = g_j(u, v), & j = 1, 2, \ldots, m. \end{cases}$$

u_j, v_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ 変数 t の未知函数. f_j, g_j は u_j, v_j の多項式.

Lax pair $$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \eta A\right)\psi = 0, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta B\right)\psi = 0$$

A, B : square matrix, $\psi = \psi(x, t)$: unknown vector

両立条件 $$\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial B}{\partial x} + \eta(AB - BA) = 0$$

両立条件が $(*)$ を表す場合を考える.

$(P_{\mathrm{J}})_m$ (J=I, II, 34, IV), Noumi-Yamada system のストークス幾何の共通構造

$$(*)_1 \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} - \eta A\right)\psi = 0, \qquad (*)_2 \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta B\right)\psi = 0$$

[T.Kawai-T.Koike-Y.Nishikawa-Y.Takei] and [Y.Takei] proved

Fact1 $t = \tau^I$ を第 1 種変わり点とする. この時 $t = \tau^I$ で, $(*)_1$ の a double tps $x = b_j(t)$ と a simple tps $x = a(t)$ がぶつかる.

Fact 2 $t = \tau^{II}$ を第 2 種変わり点とする. この時 $t = \tau^{II}$ で, $(*)_1$ の two double tps $x = b_j(t)$, $x = b_{j'}(t)$ がぶつかる.

Fact3 t が非線形のストークス曲線上にある時, $(*)_1$ の二つの変わり点がストークス曲線で結ばれる.

非線形常微分方程式の Stokes 幾何の復習 (cf.[KKNT], [T]):

$$\text{NODE}(*) \begin{cases} \eta^{-1}\dfrac{du_j}{dt} = f_j(u, v), & j = 1, 2, \ldots, m, \\ \eta^{-1}\dfrac{dv_j}{dt} = g_j(u, v), & j = 1, 2, \ldots, m. \end{cases}$$

零パラメータ解: $u_j(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^{-k}\hat{u}_{j,k}(t), \qquad v_j(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^{-k}\hat{v}_{j,k}(t)$

$$u_j = \hat{u}_{j,0} + \triangle u_j, \qquad v_j = \hat{v}_{j,0} + \triangle v_j$$

$(\triangle u, \triangle v)$ に関して線形部分

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \triangle u \\ \triangle v \end{pmatrix} = \eta C(t, \eta)\begin{pmatrix} \triangle u \\ \triangle v \end{pmatrix}, \qquad \triangle u = {}^t(\triangle u_1, \ldots, \triangle u_m)$$

$$C(t, \eta) = C_0(t) + \eta^{-1}C_1(t) + \eta^{-2}C_2(t) + \cdots$$

Def. ([KKNT, T])

$\det(\lambda E - C_0(t)) = 0$ の判別式の零点を, $(*)$ の変わり点という.

$\Lambda(\lambda, t) = \det(\lambda E - C_0(t))$ とおく. $E = E_{2m}$, $\Lambda(\lambda, t)$ が λ の偶関数の時,
$\Lambda(\lambda, t) = 0$ は $\nu_i(t) = -\nu_{-i}(t)$ なる m-pairs$(\nu_i(t), \nu_{-i}(t))$ の根をもつ.

(i) t_0 は第 1 種変わり点 $\Leftrightarrow$ $^\exists i$ s.t. $\nu_i = \nu_{-i}$ at t_0.

(ii) t_0 は第 2 種変わり点 $\Leftrightarrow$ $^\exists i \neq {}^\exists j$ s.t. $\nu_i = \nu_j$ or $\nu_i = \nu_{-j}$ at t_0.

NODE の変わり点 t_* から派生するストークス曲線は,

$$\mathrm{Im} \int_{t^*}^{t} (\nu_k(s) - \nu_{k'}(s))ds = 0$$

ここで, $\nu_k(t)$, $\nu_{k'}(t)$ は $t = t^*$ で一致する C_0 の二つの特性根.

Lax pair 側の Stokes 幾何の復習

$$(L_{\mathrm{I}}) \quad \left(\frac{\partial}{\partial\theta} - \eta A\right)\psi(\theta, t) = 0 \qquad (L_{\mathrm{II}}) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta B\right)\psi(\theta, t) = 0$$

非線形の解（零パラメータ解) を $(\mathrm{L_I})_m$ と $(\mathrm{L_{II}})_m$ の係数に代入する：

$$(L_I) \quad \frac{\partial}{\partial\theta}\psi = \eta A\psi, \quad A = A(\theta, t; \eta) = A_0(\theta, t) + \eta^{-1}A_1(\theta, t) + \cdots,$$

$$(L_{II}) \quad \frac{\partial}{\partial t}\psi = \eta B\psi, \quad B = B(\theta, t; \eta) = B_0(\theta, t) + \eta^{-1}B_1(\theta, t) + \cdots.$$

A_0 の特性方程式 $\det(\lambda E - A_0(\theta, t))$ の判別式の零点を (L_I) の変わり点と呼ぶ.

$(P_{\mathrm{J}})_m$ (J=I, II, 34, IV), Noumi-Yamada system のストークス幾何の共通構造

$$(*)_1 \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} - \eta A\right)\psi = 0, \qquad (*)_2 \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta B\right)\psi = 0$$

[KKNT] and [T] proved

Fact1 $t = \tau^I$ を第 1 種変わり点とする. この時
$t = \tau^I$ で, $(*)_1$ の a double tps $x = b_j(t)$ と a simple tps $x = a(t)$ がぶつかる.

Fact 2 $t = \tau^{II}$ を第 2 種変わり点とする. この時
$t = \tau^{II}$ で, $(*)_1$ の two double tps $x = b_j(t)$, $x = b_{j'}(t)$ がぶつかる.

Fact3 t が非線形のストークス曲線上にある時,
$(*)_1$ の二つの変わり点がストークス曲線で結ばれる.

NODE のストークス曲線上の両側で, 対応する $(*)_1$ のストークス曲線の形状が変化することを意味する. この退化現象とモノドロミー保存変形を利用し, NODE の Stokes 曲線上の Stokes 現象を記述する

解析の鍵は, 付随する線形方程式の存在

$$(P_{\mathrm{I}}) \quad \frac{d^2\lambda}{dt^2} = \eta^2(6\lambda^2 + t)$$

形式解 (零パラメータ解): $\lambda^{(0)}(t,\eta) = \lambda_0(t) + \eta^{-1}\lambda_1(t) + \eta^{-2}\lambda_2(t) + \cdots .$

$$\begin{cases} (SL) & \left(-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \eta^2 Q(x,t,\eta)\right)\psi(x,t,\eta) = 0, \\ (DF) & \dfrac{\partial \psi}{\partial t} = A(x,t,\lambda)\dfrac{\partial \psi}{\partial x} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial A}{\partial x}(x,t,\lambda)\psi \end{cases}$$

両立条件: $\dfrac{\partial Q}{\partial t} = A\dfrac{\partial Q}{\partial x} + 2\dfrac{\partial A}{\partial x}Q - \dfrac{1}{2}\eta^{-2}\dfrac{\partial^3 A}{\partial x^3}$

(P_I) は (SL) のモノドロミー保存変形を記述する方程式
詳細は T. Kawai and Y. Takei, Algebraic Analysis of Singular Perturbation Theory, *Amer. Math. Soc.*, 2005, (特異摂動の代数解析, 岩波 1998)

(P_{I}) の場合

形式解 (零パラメータ解): $\lambda^{(0)}(t,\eta) = \lambda_0(t) + \eta^{-2}\lambda_2(t) + \cdots$.

- 零パラメータ解のボレル変換 $\lambda_{\mathrm{I},B}(t,y)$ は $y = m\phi(t)$ $(m \in \mathbb{Z})$, $\phi(t) = \int^t \sqrt{12\lambda_0}dt$ の形の無限個の特異性をもつ.

正しく Stokes 現象を記述するために, 2 つの自由パラメータを含んだインスタントン解と呼ばれる形式解が必要である.

$$\lambda(t;\alpha,\beta) = \lambda_0(t) + \eta^{-\frac{1}{2}}(\alpha f_{+1}(t)e^{\eta\phi(t)} + \beta f_{-1}(t)e^{-\eta\phi(t)}) + \eta^{-1}(\alpha^2 f_{+2}(t)e^{2\eta\phi(t)} + \alpha\beta f_0(t) + \beta^2 f_{-2}(t)e^{-2\eta\phi(t)}) + \cdots .$$

ここで, α, β は自由パラメータ, $f_{\pm\ell}(t)$ はある関数.

- $\alpha = 0$ または $\beta = 0$ の時, 1-パラメータ解を得る.
- $\alpha = \beta = 0$ の時, 零パラメータ解に一致

高階パンルヴェ方程式の場合

- 0 パラメータ解:

$$u_j(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^{-k} \hat{u}_{j,k}(t), \quad v_j(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^{-k} \hat{v}_{j,k}(t), \quad j = 1, \ldots, m.$$

- インスタントン解:

$$u_j(t,\beta) = \hat{u}_{j,0}(t) + \sum_{|k|\ge 1} \eta^{-\frac{k}{2}} \left(\sum_{p\in\mathbb{Z}^m,\,|p|\in\{k,k-2,k-4,\ldots\}} u_{j,k,p}(t) e^{p\cdot\tau} \right),$$

$$v_j(t,\beta) = \hat{v}_{j,0}(t) + \sum_{|k|\ge 1} \eta^{-\frac{k}{2}} \left(\sum_{p\in\mathbb{Z}^m,\,|p|\in\{k,k-2,k-4,\ldots\}} v_{j,k,p}(t) e^{p\cdot\tau} \right),$$

  - $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_m)$
  - (u, v) は $2m$ 個の自由パラメータ $(\beta_1^+, \ldots, \beta_m^+, \beta_1^- \ldots, \beta_m^-)$ を含む:

$$\beta_j^+ = \eta^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{j,k}^+ \eta^{-k}, \qquad \beta_j^- = \eta^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{j,k}^- \eta^{-k}$$

Reference

- T. Kawai, Y. Takei, WKB analysis of Painlevé transcendents with a large parameter. III. Local reduction of 2-parameter Painlevé trancendents. Adv. Math. **134** (1998) no. 1, 178–218.
- Y. Takei, An explicit description of the connection formula for the first Painlevé equation, Toward the Exact WKB Analysis of Differential Equations, Linear or Non-Linear, Kyoto University Press (2000) 271–296.
- T. Kawai, Y. Takei, WKB analysis of higher order Painlevé equations with a large parameter. II. Structure theorem for instanton-type solutions of $(P_J)_m$ $(J =$ I, 34, II-2 or IV) near a simple *P*-turning point of the first kind, Pub. RIMS, Kyoto Univ. **47** (2011) 153–219.
- N. Honda, T. Kawai, Y. Takei, Virtual turning points, Springer briefs in Mathematical Physics, 4, *Springer*, 2015.

Q1: インスタントン解はどのように構成するのか？

$$(*)_1 \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} - \eta A\right)\psi = 0, \qquad (*)_2 \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta B\right)\psi = 0$$

$(P_{\mathrm{J}})_m$ (J=I, II, 34, IV),　Noumi-Yamada system

Fact1 $t = \tau^I$ を第 1 種変わり点とする．この時
$t = \tau^I$ で, $(*)_1$ の a double tps $x = b_j(t)$ と a simple tps
$x = a(t)$ がぶつかる．

Fact 2 $t = \tau^{II}$ を第 2 種変わり点とする．この時
$t = \tau^{II}$ で, $(*)_1$ の two double tps $x = b_j(t)$, $x = b_{j'}(t)$ がぶつかる．

Fact3 t が非線形のストークス曲線上にある時,
$(*)_1$ の二つの変わり点がストークス曲線で結ばれる．

Q2: 上の重要な Facts は $(*)$ のようなラックスペアをもつ非線形 ODE に対して一般的に成り立つのか？

インスタントン解構成法

- $(P_{\mathrm{J}})_m$ (J = I, II, 34, IV) のインスタントン解の構成
  1. “On a construction of general formal solutions of equations of the first Painlevé hierarchy I”, Advances in Mathematics 235 (2013) 496–524. (with T.Aoki, N.Honda)
  2. “Instanton-type formal solutions for the second and the fourth Painlevé hierarchies with a large parameter” JMSJ, Vol. 67, No.3 (2015)
  3. “Multiple-scale analysis for some class of systems of non-linear differential equations”, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B53 (2014) 283-299.
  4. “Instanton-type solutions of P_{34}-hierarchy with a large parameter”, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, to appear.

Multiple-scale analysis を用いない方法：
Y. Takei, Singular-perturbative reduction to Birkhoff normal form and instanton-type formal solutions of Hamiltonian systems, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 34 (1998) 601–627

u_k, v_k $(k = 1, \ldots, m)$: t の未知関数, θ: 独立変数,

$$U(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \theta^k, \;\; V(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k \theta^k, \;\; C(\theta) = \sum_{k=1}^{m} c_k \theta^k$$

with 任意の $u_{m+1}, v_{m+1} \in \mathcal{O}(t)[u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m]$.

$$\eta^{-1} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} U\theta \\ V\theta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \times (1 - U) + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial U} \\ \frac{\partial H}{\partial V} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{H(U,V)}{1-U} \end{pmatrix}.$$

$H(U, V)$ は任意の複素定数 p_i を係数にもつ U,V の多項式:

$$H(U, V) = (p_1 U^2 + p_2 V^2)\theta + p_3 UV + p_4 CU + p_5 CV + p_6 U + p_7 V + p_8 C + p_9$$

$$f_1 = q_0 + q_1\theta + q_m\theta^m + q_{m+1}\theta^{m+1}, \quad f_2 = r_0 + r_1\theta + r_m\theta^m + r_{m+1}\theta^{m+1}.$$

ここで $A \equiv B$ は $A - B = 0$ modulo θ^{m+2}.

$$\eta^{-1}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} U\theta \\ V\theta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \times (1-U) + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial U} \\ \frac{\partial H}{\partial V} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{H(U,V)}{1-U} \end{pmatrix}.$$

$$H(U,\ V) = (p_1 U^2 + p_2 V^2)\theta + p_3 UV + p_4 CU + p_5 CV + p_6 U + p_7 V + p_8 C + p_9$$

and

$$f_1 := p_7 + (\alpha u_1 + p_5 c_1)\,\theta + y_1\theta^m + (y_1 u_1 + y_2)\theta^{m+1},$$
$$f_2 := -\beta - (2\beta u_1 + \alpha v_1 + \varepsilon c_1)\,\theta + z_1\theta^m + (2z_1 u_1 - y_1 v_1 + z_2)\theta^{m+1}.$$

ここで y_i, z_i は t の任意正則関数,

$$\alpha := p_3 + p_7, \quad \beta := p_6 + p_9, \quad \varepsilon := p_4 + p_8.$$

例えば, $p_2 = -1$, $p_8 = 2$, $p_9 = 1$, $z_2 = 2t$, 他は 0 ならば,
システムは $(P_{\mathrm{I}})_m$ と同値. ([Aoki-Honda-U])

$$\eta^{-1}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} U\theta \\ V\theta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2V\theta \\ -(1+2u_1\theta)(1-U) + \dfrac{1+2C-\theta V^2}{1-U} + 2t\theta^{m+1} \end{pmatrix},$$

with $C(\theta) = \sum_{k=1}^{m} c_{k-1}\theta^k$, $\;c_0 := 0$, $\;u_{m+1} = v_{m+1} = 0$.

$$W := \frac{1+2C-\theta V^2}{1-U} \qquad \text{and} \quad W = \sum_{k=0}^{\infty} w_j\theta^j$$

$$W(1-U) = 1+2C-\theta V^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad W = 1 + WU + 2C - \theta V^2$$

$$w_0 + w_1\theta + w_2\theta^2 + \cdots = 1 + (w_0 + 2c_0)\theta + \cdots$$

大きなパラメータをもつ第１パンルヴェ階層

$m = 1, 2, \ldots$ に対して, the m-th member $(P_{\mathrm{I}})_m$

$$
(P_{\mathrm{I}})_m \quad \begin{cases} \eta^{-1}\dfrac{du_j}{dt} = 2v_j, & j = 1, 2, \ldots, m, \\[2ex] \eta^{-1}\dfrac{dv_j}{dt} = 2(u_{j+1} + u_1 u_j + w_j), & j = 1, 2, \ldots, m, \end{cases}
$$

$$
w_j = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{j} u_k u_{j+1-k} + \sum_{k=1}^{j-1} u_k w_{j-k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{j-1} v_k v_{j-k} + c_j + \delta_{jm} t.
$$

ここで c_j's は定数, $u_{m+1} = 0$.

$$\eta^{-1}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} U\theta \\ V\theta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \times (1-U) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{H(U,V)}{1-U} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial U} \\ \frac{\partial H}{\partial V} \end{pmatrix},$$

$$U(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k\theta^k,\ V(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k\theta^k,\ C(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\theta^k$$

$(P_{\mathrm{I}})_m$	$(P_{34})_m$
$H(U, V) := 1 + 2C - \theta V^2$ $f_1 := 0$ $f_2 := -(1 + 2u_1\theta) + 2t\theta^{m+1}$	$H(U, V) := 1 + 2C - \theta V^2$ $f_1 = 0$ $f_2 = -(1 + 2(u_1 + c_0)\theta)(1 - 2\gamma t\theta^m)$

$(P_{\mathrm{II}})_m$	$(P_{\mathrm{IV}})_m$
$H(U, V) := 2UV + 2CV + \theta V^2$ $f_1 := 2(u_1 + c_1)\theta$ $f_2 := -2v_1\theta$	$H(U, V) := 2UV + 2CV + \theta V^2$ $f_1 := 2(u_1 + c_1)\theta - 2\gamma t\theta^m(1 + u_1\theta)$ $f_2 := -2v_1\theta + 2\gamma t v_1\theta^{m+1}$

$$\eta^{-1}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} U\theta \\ V\theta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \times (1-U) + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial U} \\ \frac{\partial H}{\partial V} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{H(U,V)}{1-U} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\eta^{-1}\frac{du_j}{dt} &= -\alpha u_{j+1} - (\alpha u_1 + p_5 c_1)u_j - 2p_2 v_j - p_5 c_{j+1} + y_1\delta_{j,m-1} + y_2\delta_{j,m}, \\
\eta^{-1}\frac{dv_j}{dt} &= \beta u_{j+1} + p_3 v_{j+1} + p_4 c_{j+1} + (2p_1 + 2\beta u_1 + \alpha v_1 + \varepsilon c_1)u_j \\
&\quad + w_{j+1} + z_1\delta_{j,m-1} + (z_1 u_1 - y_1 v_1 + z_2)\delta_{j,m}
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
w_j = {} & p_1\sum_{k=1}^{j-2} u_k u_{j-k-1} + p_2\sum_{k=1}^{j-2} v_k v_{j-k-1} + p_3\sum_{k=1}^{j-1} u_k v_{j-k} + p_4\sum_{k=1}^{j-1} u_k c_{j-k} \\
& + p_5\sum_{k=1}^{j-1} v_k c_{j-k} + \sum_{k=1}^{j-1} w_k u_{j-k} + \beta u_j + p_7 v_j + p_8 c_j \quad (1 \le j \le m+1).
\end{aligned}$$

Q1

We have general formal solutions (called instanton-type solutions) with $2m$ free parameters $(\beta_{-m}, \ldots, \beta_m) \in \mathbb{C}^{2m}[[\eta^{-1}]]$ for our system in the cases I, II:

Case I: $\alpha = p_3 + p_7 \neq 0, \quad p_2 \neq 0.$

Case II: $\alpha = p_3 + p_7 = 0, \quad \beta = p_6 + p_9 \neq 0, \quad p_2 \neq 0.$

証明は ”General formal solutions for a unified family of P_{J}-hierarchies (J=I, II, IV, 34) ” submitted に記載しております

$$\eta^{-1}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} U\theta \\ V\theta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \times (1-U) + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial U} \\ \frac{\partial H}{\partial V} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{H(U,V)}{1-U} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad \eta^{-1}\dfrac{d(U\theta)}{dt} \equiv f_1(1-U) - \dfrac{\partial H}{\partial V} - \alpha u_{m+1}\theta^{m+1} \\ \text{(ii)} \quad \eta^{-1}\dfrac{d(V\theta)}{dt} \equiv f_2(1-U) + \dfrac{H(U,V)}{1-U} + \dfrac{\partial H}{\partial U} + (2\beta u_{m+1} + \alpha v_{m+1})\theta^{m+1} \end{cases}$$

with

$$U(\theta) = \sum_{k=1}^{m} u_k\theta^k, \quad V(\theta) = \sum_{k=1}^{m} v_k\theta^k \quad \text{and} \quad C(\theta) = \sum_{k=1}^{m} c_k\theta^k$$

いくつかの条件の下, システムは (I),(II) の両立条件に等しい.

$$\text{(I)} \quad \left(\gamma\theta^k \frac{\partial}{\partial\theta} - \eta A\right)\psi(\theta,\, t) = 0, \qquad \text{(II)} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta B\right)\psi(\theta,\, t) = 0,$$

ここで $\gamma \neq 0$ and

$$A := \begin{pmatrix} \triangle_1 & (1-U)\theta \\ \triangle_2 & -\triangle_1 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} \square_1 & 1 \\ \square_2 & -\square_1 \end{pmatrix}$$

$$\triangle_1 :\equiv -\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial V} - \frac{p_3}{2}(1-U) + \frac{1}{2}(y_1\theta^m + y_2\theta^{m+1}) - \frac{\alpha}{2}u_{m+1}\theta^{m+1},$$

$$\triangle_2 :\equiv p_2 \times \Bigg(-\frac{\partial H}{\partial U} - \frac{H(U,\, V)}{1-U} - (z_1\theta^m + (z_1u_1 - y_1v_1 + z_2)\theta^{m+1}) - (2\beta u_{m+1} + \alpha v_{m+1})\theta^{m+1}\Bigg),$$

$$\square_1 := -\frac{1}{2\theta}(\alpha + (\alpha u_1 + p_5c_1)\theta), \quad \square_2 := -\frac{p_2}{\theta}(\beta + (2\beta u_1 + \alpha v_1 + \varepsilon c_1)\theta).$$

ラックスペアの見つけ方:

$$\begin{cases} \text{(i)} & \eta^{-1}\dfrac{d(U\theta)}{dt} = f_1(1-U) - \dfrac{\partial H}{\partial V} - \alpha u_{m+1}\theta^{m+1} \\ \text{(ii)} & \eta^{-1}\dfrac{d(V\theta)}{dt} = f_2(1-U) + \dfrac{H(U,V)}{1-U} + \dfrac{\partial H}{\partial U} + (2\beta u_{m+1} + \alpha v_{m+1})\theta^{m+1} \end{cases}$$

両立条件: $\partial_t A - \gamma\theta^k\partial_\theta B + \eta(AB - BA) = 0$

$$A = \begin{pmatrix} \triangle_1 & (1-U)\theta \\ \triangle_2 & -\triangle_1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \square_1 & 1 \\ \square_2 & -\square_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (1) & \eta^{-1}\partial_t U\theta = 2\triangle_1 - 2\square_1(1-U)\theta \\ (2) & \eta^{-1}\partial_t\triangle_1 - \eta^{-1}\gamma\theta^k\partial_\theta\square_1 = \triangle_2 - \square_2(1-U)\theta \\ (3) & \eta^{-1}\partial_t\triangle_2 - \eta^{-1}\gamma\theta^k\partial_\theta\square_2 = -2\square_1\triangle_2 + 2\square_2\triangle_1 \end{cases}$$

(i) = (1)　　(ii) = (2)

Case A:

$\gamma(\neq 0)$: 任意定数. $p_1 = 0$, $p_2 \neq 0$, $k = m + 3$ を仮定する.
もし u_{m+1}, v_{m+1} を次を満たすように与えるならば

$$\gamma\alpha\theta^{m+1} = y_1'\theta^m + y_2'\theta^{m+1} - \alpha\frac{\partial u_{m+1}}{\partial t}\theta^{m+1} \tag{1}$$

$$\gamma\beta\theta^{m+1} = -\left(z_1'\theta^m + (z_1'u_1 - y_1'v_1 + z_2')\theta^{m+1} + \left(2\beta\frac{\partial u_{m+1}}{\partial t} + \alpha\frac{\partial v_{m+1}}{\partial t}\right)\theta^{m+1}\right) \tag{2}$$

system は先の形の Lax pair を持つ.

Case B:

$\gamma(\neq 0)$: 任意定数. $p_1 = 0$, $p_2 \neq 0$, $k = m + 2$ を仮定する. もし u_{m+1}, v_{m+1} を次を満たすように与えるならば

$$\gamma\alpha\theta^{m} = y_1'\theta^m + y_2'\theta^{m+1} - \alpha\frac{\partial u_{m+1}}{\partial t}\theta^{m+1} \tag{3}$$

$$\gamma\beta\theta^{m} = -\left(z_1'\theta^m + (z_1'u_1 - y_1'v_1 + z_2')\theta^{m+1} + \left(2\beta\frac{\partial u_{m+1}}{\partial t} + \alpha\frac{\partial v_{m+1}}{\partial t}\right)\theta^{m+1}\right) \tag{4}$$

$\gamma(\neq 0)$:任意定数. $p_1 = 0$, $p_2 \neq 0$ を仮定. $\partial_t := \frac{\partial}{\partial t}$.

1. Case I : $\alpha \neq 0$
   (A) $k = m + 3$ の時, y_1,z_1 : 任意定数. y_2, z_2: 任意の t の正則関数.

$$\partial_t u_{m+1} = \frac{1}{\alpha} y_2' - \gamma \quad \text{and} \quad \partial_t v_{m+1} = \frac{1}{\alpha}\left(\beta\gamma - z_2' - \frac{2\beta}{\alpha} y_2'\right). \tag{5}$$

   (B) $k = m + 2$ の時, y_2, z_2: t の任意正則関数. $y_1 = \gamma\alpha t + \delta_1$, $z_1 = -\gamma\beta t + \delta_2$. ここで δ_i $(i = 1, 2)$ は任意定数.

$$\partial_t u_{m+1} = \frac{1}{\alpha} y_2' \quad \text{and} \quad \partial_t v_{m+1} = \frac{1}{\alpha}\left(\gamma(\beta u_1 + \alpha v_1) - z_2' - \frac{2\beta}{\alpha} y_2'\right). \tag{6}$$

2. Case II : $\alpha = 0, \beta \neq 0$
   (A) $k = m + 3$ の時, y_1 y_2, z_1:任意定数, z_2, v_{m+1}: t の任意正則関数

$$\partial_t u_{m+1} = -\frac{1}{2\beta}(z_2' + \gamma\beta). \tag{7}$$

   (B) $k = m + 2$ の時, y_i $(i = 1, 2)$:任意定数, z_2, v_{m+1}: t の任意正則関数. $z_1 = -\gamma\beta t + \delta$ (δ:任意定数).

$$\partial_t u_{m+1} = -\frac{1}{2\beta}(z_2' - \gamma\beta u_1). \tag{8}$$

Stokes geometry

$$\eta^{-1}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} U\theta \\ V\theta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \times (1-U) + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial U} \\ \frac{\partial H}{\partial V} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{H(U,V)}{1-U} \end{pmatrix}.$$

$$(*)_1 \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} - \eta A\right)\psi = 0, \qquad (*)_2 \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta B\right)\psi = 0$$

上記の system に対して次が成立する.

Fact1 $t = \tau^I$ を第 1 種変わり点とする. この時 $t = \tau^I$ で, $(*)_1$ の a double tps $x = b_j(t)$ と a simple tps $x = a(t)$ が一致する.

Fact 2 $t = \tau^{II}$ を第 2 種変わり点とする. この時 $t = \tau^{II}$ で, $(*)_1$ の two double tps $x = b_j(t)$, $x = b_{j'}(t)$ が一致する.

Fact3 t が非線形のストークス曲線上にある時, $(*)_1$ の二つの変わり点がストークス曲線で結ばれる.

$$(\mathrm{I}) \quad \left(\gamma\theta^k \frac{\partial}{\partial\theta} - \eta A\right)\psi(\theta,\, t) = 0, \qquad (\mathrm{II}) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta B\right)\psi(\theta,\, t) = 0.$$

ψ の第一成分 ψ_1 は次を満たす

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2} + P(t,\, \theta)\dfrac{\partial}{\partial\theta} + q(t,\, \theta)\right)\psi_1 = 0, \\ \dfrac{\partial\psi_1}{\partial t} = \dfrac{\gamma\theta^{k-1}}{1-U}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial\theta} + \eta\left(\dfrac{p_2 V}{1-U} - \dfrac{1}{2}(\alpha u_1 + p_5 c_1)\right)\psi_1 \end{cases}$$

変数変換

$$\Psi = e^{\frac{1}{2}\int^{\theta} p(t,\theta)d\theta}\psi_1$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2} = Q(\theta,\, t; \eta)\Psi, \\ \dfrac{\partial\Psi}{\partial t} = \mathcal{A}\dfrac{\partial\Psi}{\partial\theta} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\mathcal{A}}{\partial\theta}\Psi, \qquad \mathcal{A} = \dfrac{\gamma\theta^{k-1}}{1-U} \end{cases}$$

The top term of Q = - det$A$

$$
\begin{aligned}
Q = &-\frac{\eta^2}{\gamma^2\theta^{2k}}\mathrm{det}A \\
&-\frac{\eta}{\gamma}\left(\frac{p_2}{\theta^{k-1}}\left(\frac{\partial V}{\partial\theta}+V\frac{\frac{\partial U}{\partial\theta}}{1-U}\right)+\frac{1}{2}h(\theta,\,t)\frac{1}{\mathcal{A}}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial\theta}\right) \\
&+\frac{1}{4}\frac{1}{\mathcal{A}^2}\left(\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\mathcal{A}}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial\theta}\right),
\end{aligned}
$$

with $h(t,\,\theta) = \dfrac{p_5C+\alpha-(y_1\theta^m+y_2\theta^{m+1})+\alpha u_{m+1}\theta^{m+1}}{\theta^k}$

証明は 論文”On the Stokes geometry of a unified family of $(P_{\mathrm{J}})_m$ (J=I, II, IV, 34)”, submitted に記載しております

誠にありがとうございます。
心よりお礼申し上げます。