劣臨界及び臨界Hardy 不等式に関連した最小化問題

佐野　めぐみ

（大阪市立大学・理D3）

第一回岡潔女性数学者セミナー

2017年12月2日(土) 於 奈良女子大学

§0 研究対象

- **(絶対)関数不等式**

例 : Sobolev不等式、Hardy不等式、Trudinger-Moser不等式 etc.

問題 : 不等式の成立・不成立、最良定数、等号成立条件 etc.

- **偏微分方程式**

例 : Emden-Fowler方程式、Liouville-Gel’fand方程式 etc.

問題: 解の存在・非存在、解の定性的性質 etc.

§0 関数不等式と方程式 （$N \geq 3, 0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$: 領域）

「任意の」関数 $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$に対して、以下の不等式が成立する.

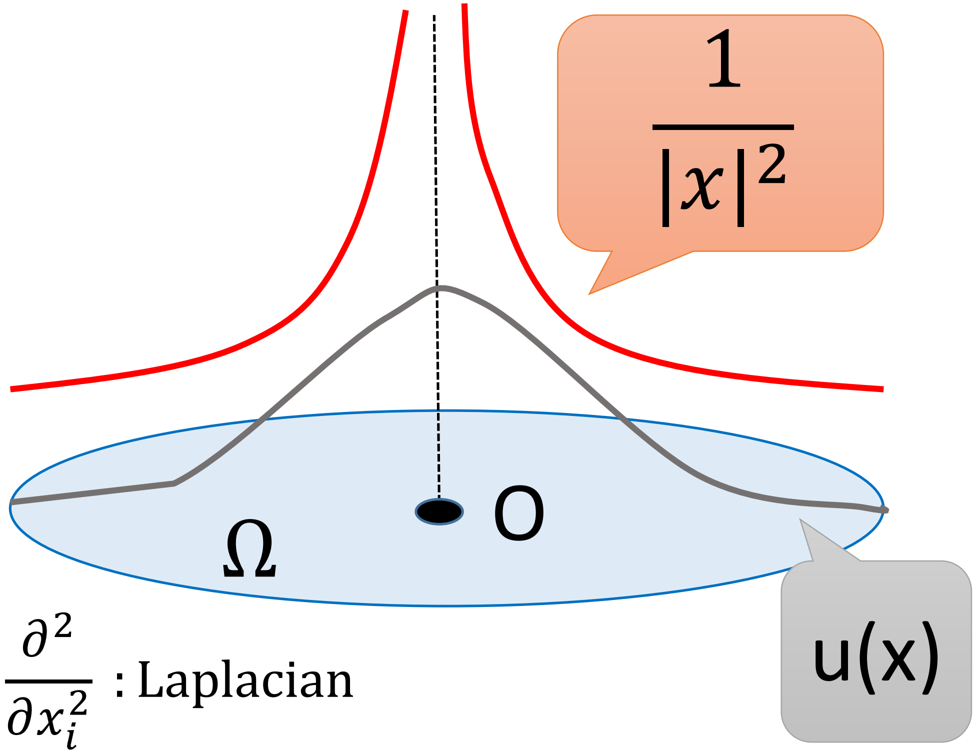
最良定数 →

$$\underbrace{\left(\frac{N-2}{2}\right)^2}\int_\Omega \frac{|u(x)|^2}{|x|^2}\,dx \leq \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx\ (<\infty)$$

もし等号を成立させるような関数 U が存在したら・・・

U は次の偏微分方程式の(弱)解になっている.

$$\begin{cases} -\Delta U(x) = \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \frac{U(x)}{|x|^2}, & x \in \Omega \\ U(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

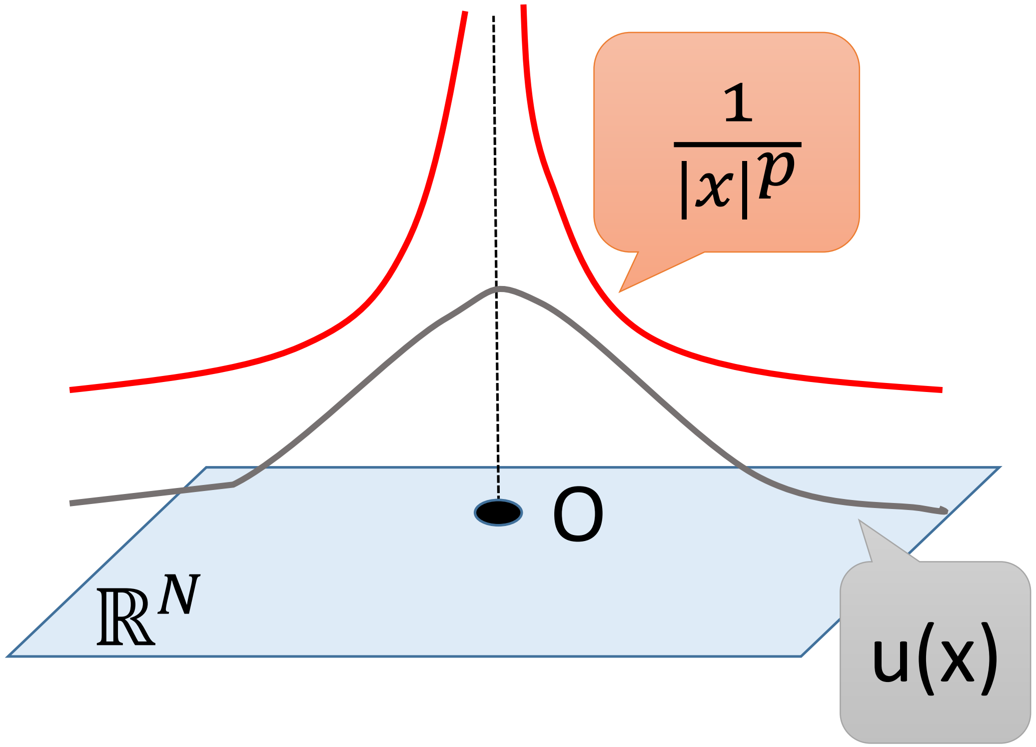


$\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$: Laplacian

§1 劣臨界Hardy不等式(H_p) $1 < p < N$とする.

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left| \nabla u(x) \cdot \frac{x}{|x|} \right|^p dx > \left(\frac{N-p}{p} \right)^p \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^p} dx$$

$$\left(\forall u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) \right)$$



最良

§1 劣臨界Hardy不等式($\boldsymbol{H_p}$) $1 < p < N$とする.

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left| \nabla u(x) \cdot \frac{x}{|x|} \right|^p dx > \left(\frac{N-p}{p} \right)^p \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^p} dx$$

$$\left(\forall u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) \right)$$

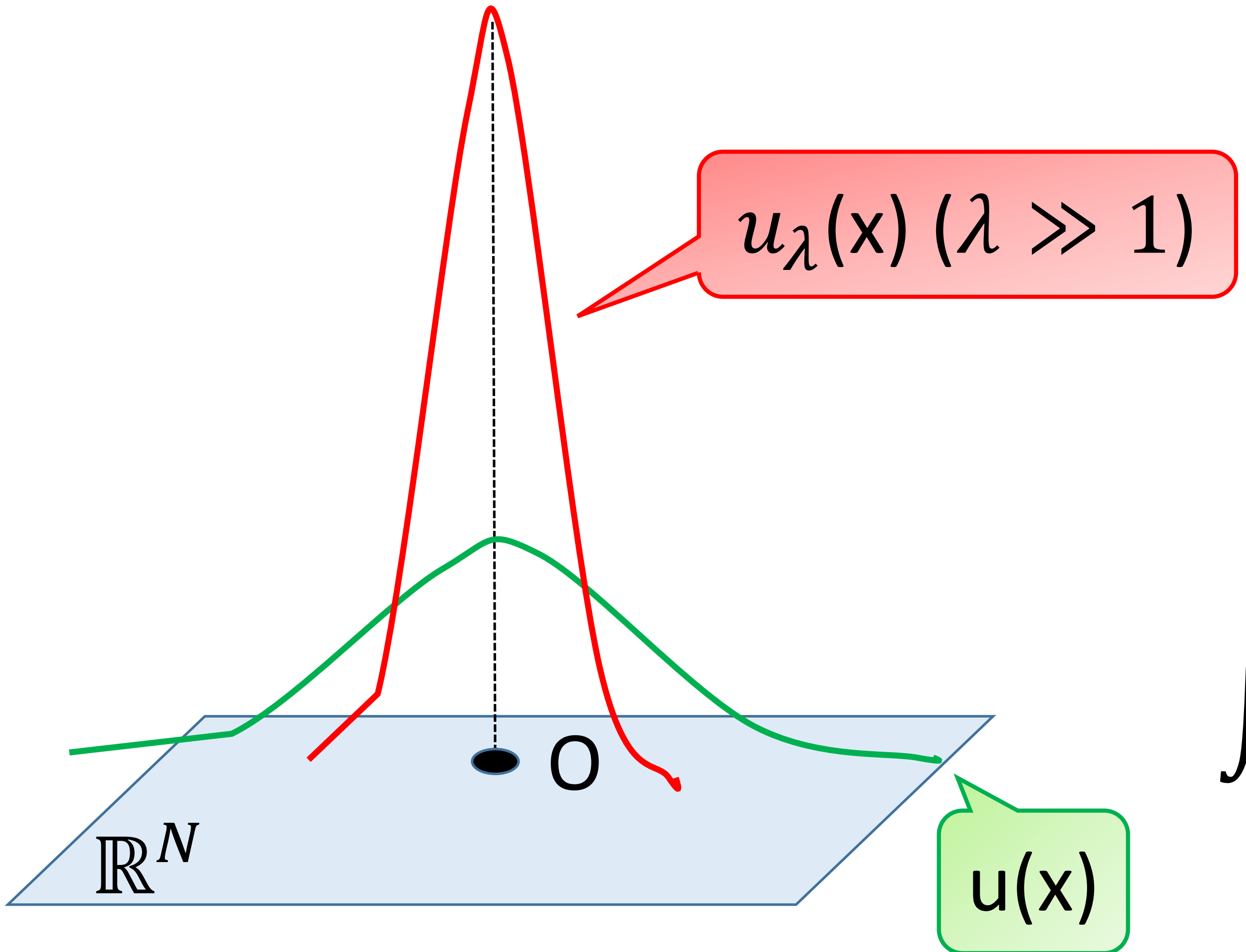
最良定数に付随する最小化問題

$$\inf_{\substack{u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) \\ u \neq 0}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} \left| \nabla u \cdot \frac{x}{|x|} \right|^p dx}{\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^p}{|x|^p} dx} = \left(\frac{N-p}{p} \right)^p$$

は達成されない.

重要な性質

- <u>スケール不変性</u>: $u_\lambda(x) = \lambda^{\frac{N-p}{p}} u(\lambda x)\ (\lambda > 0).$



$$\int_{\mathbb{R}^N} \left| \nabla u_\lambda(x) \cdot \frac{x}{|x|} \right|^p dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \left| \nabla u(x) \cdot \frac{x}{|x|} \right|^p dx$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u_\lambda(x)|^p}{|x|^p} dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^p} dx$$

重要な性質

- ``Virtual'' extremal : $U(x) := |x|^{-\frac{N-p}{p}} \notin W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

(等号不成立である理由)

もし, ${}^\exists V \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)$: Hardy不等式のextremal.

$\Rightarrow$ ${}^\exists U \in W_{0,\mathrm{rad}}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$: Hardy不等式の球対称なextremal.

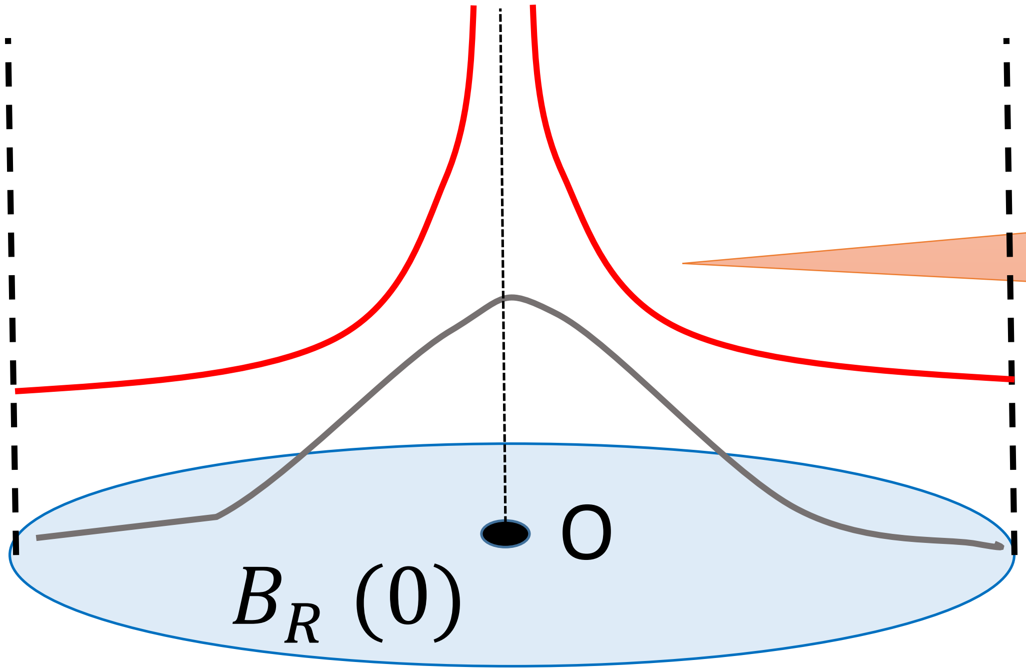
$\Rightarrow$ $\mathrm{U}(x) = c|x|^{-\frac{N-p}{p}} (c \in \mathbb{R})$

§2 臨界Hardy不等式

$p = N \geq 2, a \geq 1$とする.

$$\int_{B_R(0)} \left| \nabla w(y) \cdot \frac{y}{|y|} \right|^N dy \geq \left(\frac{N-1}{N}\right)^N \int_{B_R(0)} \frac{|w(y)|^N}{|y|^N \left(\log \frac{aR}{|y|}\right)^N} dy$$

$$\left(\forall w \in W_0^{1,N}(B_R(0))\right)$$



$$\frac{1}{|y|^N \left(\log \frac{aR}{|y|}\right)^N} \quad (a \gg 1)$$

w(x)

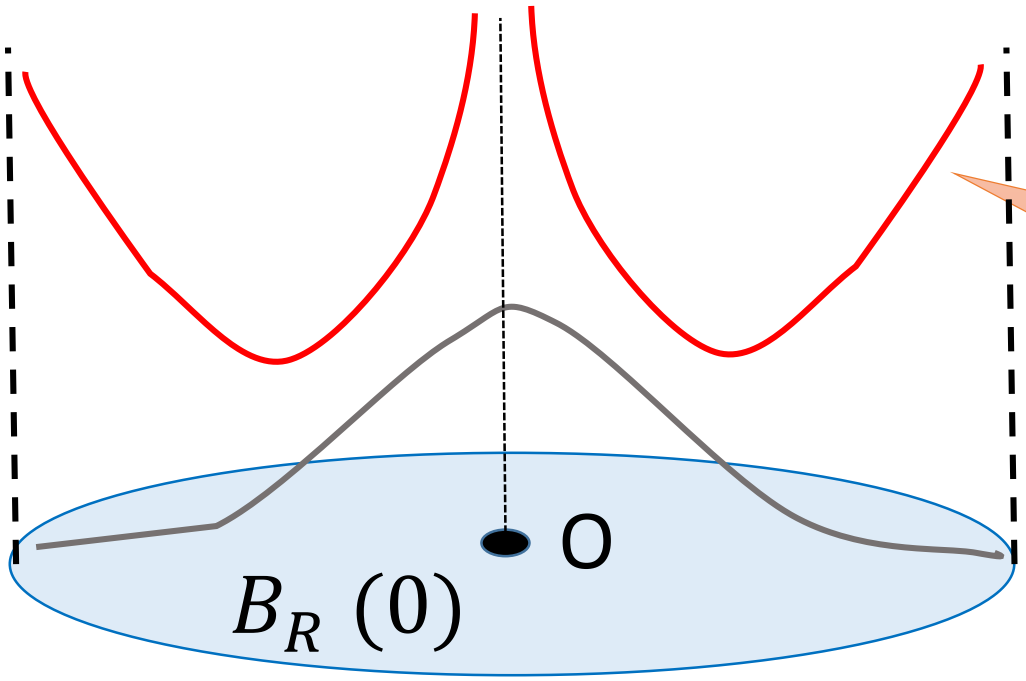
§2 臨界Hardy不等式$(\boldsymbol{H_N})$

$p = N \geq 2$とする.

$$\int_{B_R(0)} \left| \nabla w(y) \cdot \frac{y}{|y|} \right|^N dy \geq \left(\frac{N-1}{N}\right)^N \int_{B_R(0)} \frac{|w(y)|^N}{|y|^N \left(\log \frac{R}{|y|}\right)^N} dy$$

$$\left(\forall w \in W_0^{1,N}(B_R(0)) \right)$$

最良



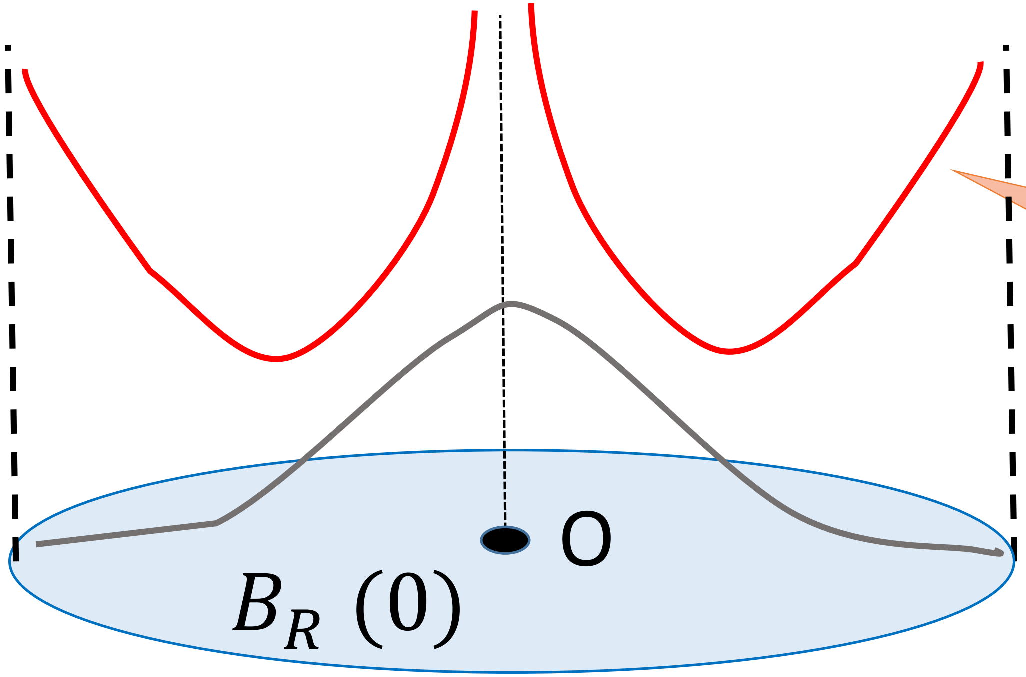
$$\frac{1}{|y|^N \left(\log \frac{R}{|y|}\right)^N}$$

w(x)

§2 臨界Hardy不等式$(\boldsymbol{H_N})$　　$p = N \geq 2$とする.

$$\int_{B_R(0)} \left| \nabla w(y) \cdot \frac{y}{|y|} \right|^N dy > \left(\frac{N-1}{N}\right)^N \int_{B_R(0)} \frac{|w(y)|^N}{|y|^N \left(\log \frac{R}{|y|}\right)^N} dy$$

$$\left(\forall w \in W_0^{1,N}(B_R(0)) \right)$$



$$\frac{1}{|y|^N \left(\log \frac{R}{|y|}\right)^N}$$

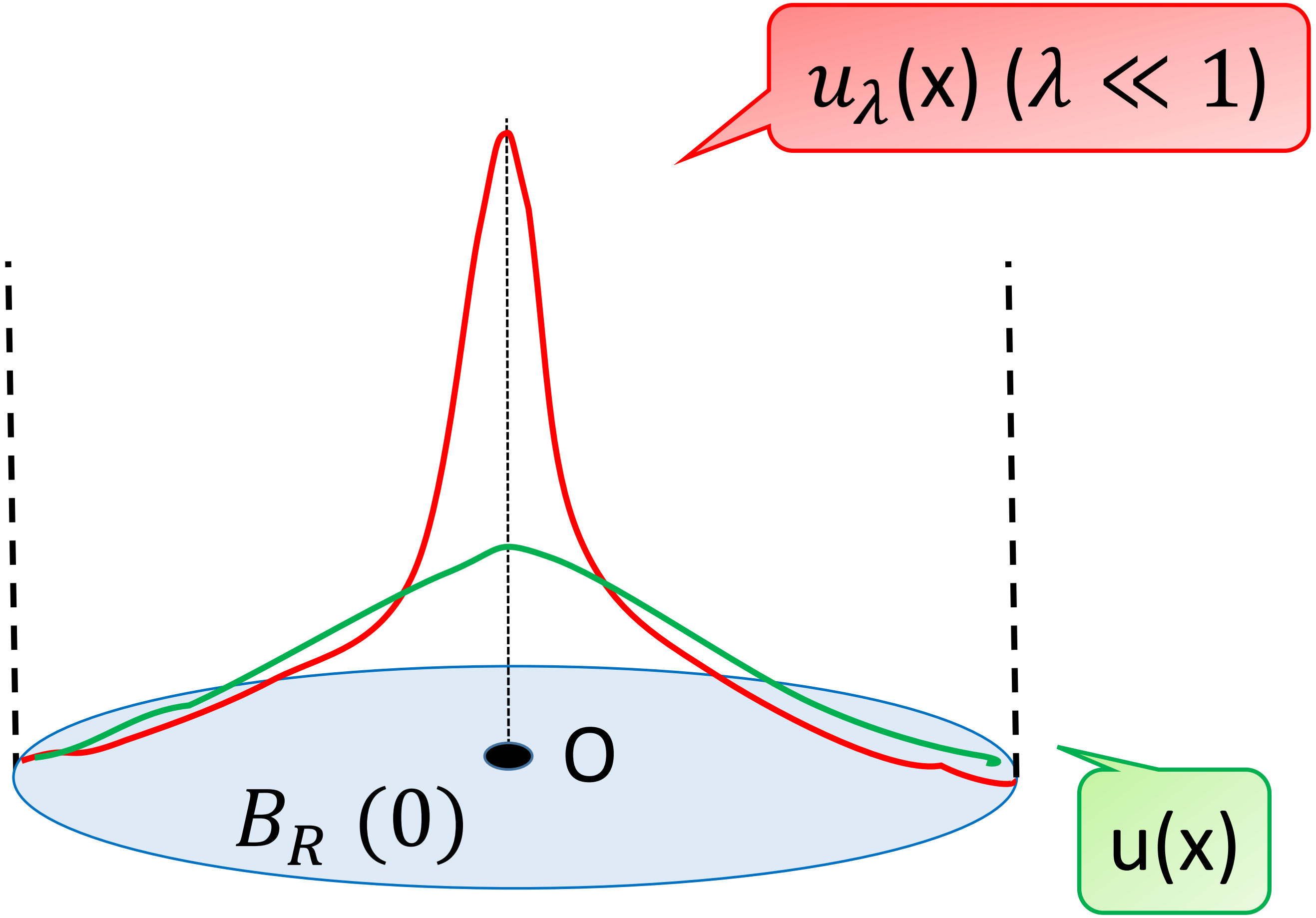
w(x)

Ref. Ioku-Ishiwata, 2015

重要な性質

Ref. Ioku-Ishiwata, 2015.

- スケール不変性: $w_\lambda(y) = \lambda^{-\frac{N-1}{N}} w\left(\left(\frac{|y|}{R}\right)^{\lambda-1} y\right)$



臨界Hardy不等式は,
通常のスケール変換:
$$u_\lambda(x) = \lambda^{\frac{N-p}{p}} u(\lambda x)$$
に関する不変性はない!

重要な性質

Ref. Ioku-Ishiwata, 2015.

- スケール不変性 : $w_\lambda(y) = \lambda^{-\frac{N-1}{N}} w\left(\left(\frac{|y|}{R}\right)^{\lambda-1} y\right)$

- Virtual extremal: $W(y) = \left(\log \frac{R}{|x|}\right)^{\frac{N-1}{N}}$

$\notin W_0^{1,N}(B_R).$

§3 主定理(球対称な場合)

m > N ≥ 2.

（高次元） 同値！ （低次元）

劣臨界Hardy

(H_p) on $\mathbb{R}^m$

$p = N$

臨界Hardy

(H_N) on $B_R^N(0)$

$$(\bigstar)\ u(|x|) = w(|y|) \text{ where } |x|^{-\frac{m-N}{N}} = \left(\log \frac{R}{|y|}\right)^{\frac{N-1}{N}}$$

定理 1 (S.-Takahashi, Cal. Var. PDE, 2017)

$2 \leq \mathrm{N} < \mathrm{m}$ とする. このとき任意の $\mathrm{w} \in C^1_{rad}(B^N_R(0) \setminus \{0\})$ に対し, $u \in C^1_{rad}(\mathbb{R}^m \setminus \{0\})$ を(★)で定めると(逆でも良い), 以下が成立する.

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left|\nabla u \cdot \frac{x}{|x|}\right|^N dx - \left(\frac{m-N}{N}\right)^N \int_{\mathbb{R}^m} \frac{|u|^N}{|x|^N} dx$$

$$= C(N,m)\left(\int_{B^N_R(0)} \left|\nabla w \cdot \frac{y}{|y|}\right|^N dy - \left(\frac{N-1}{N}\right)^N \int_{B^N_R(0)} \frac{|w|^N}{|y|^N\left(\log \frac{R}{|y|}\right)^N} dy\right)$$

ただし $C(N,m) = \frac{|\mathbb{S}^{m-1}|}{|\mathbb{S}^{N-1}|}\left(\frac{m-N}{N-1}\right)^{N-1}$ とする.

§3 主定理(非球対称な場合)

$m > N \geq 2.$

（高次元）

劣臨界Hardy

(H_p) on $\mathbb{R}^m$

$p = N$

$\hookleftarrow$

（低次元）

臨界Hardy

(H_N) on $B_R^N(0)$

(★★)

定理 2 (S.-Takahashi, Cal. Var. PDE, 2017)

$2 \leq \mathrm{N} < \mathrm{m}$とする. このとき任意の $\mathrm{w} \in C^1(B_R^N(0) \setminus \{0\})$ に対し, $u \in C^1(\mathbb{R}^m \setminus \{0\})$ を(★★)で定めると, 以下が成立する.

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left|\nabla u \cdot \frac{x}{|x|}\right|^N dx - \left(\frac{m-N}{N}\right)^N \int_{\mathbb{R}^m} \frac{|u|^N}{|x|^N} dx$$

$$= C(N,m)\left(\int_{B_R^N(0)} \left|\nabla w \cdot \frac{y}{|y|}\right|^N dy - \left(\frac{N-1}{N}\right)^N \int_{B_R^N(0)} \frac{|w|^N}{|y|^N\left(\log\frac{R}{|y|}\right)^N} dy\right)$$

ただし $C(N,m) = \frac{|\mathbb{S}^{m-1}|}{|\mathbb{S}^{N-1}|}\left(\frac{m-N}{N-1}\right)^{N-1}$とする.

Remark(球対称)

$m > N$

ボール上の劣臨界Hardy不等式

$$\int_{B_R^m(0)} \left| \nabla u \cdot \frac{x}{|x|} \right|^N dx \geq \left(\frac{m-N}{N} \right)^N \int_{B_R^m(0)} \frac{|u|^N}{|x|^N} dx$$

同値!

$$u(|x|) = w(|y|) \text{ where } \left(\frac{|x|}{R}\right)^{-\frac{m-N}{N}} = \left(\frac{\log \frac{aR}{|y|}}{\log a}\right)^{\frac{N-1}{N}}$$

非シャープな臨界Hardy不等式($a > 1$)

$$\int_{B_R^N(0)} \left| \nabla w \cdot \frac{y}{|y|} \right|^N dy \geq \left(\frac{N-1}{N} \right)^N \int_{B_R^N(0)} \frac{|w|^N}{|y|^N \left(\log \frac{aR}{|y|} \right)^N} dy$$

Remark(非球対称)

$m > N$

ボール上の劣臨界Hardy不等式

$$\int_{B_R^m(0)} \left|\nabla u \cdot \frac{x}{|x|}\right|^N dx \geq \left(\frac{m-N}{N}\right)^N \int_{B_R^m(0)} \frac{|u|^N}{|x|^N} dx$$

非シャープな臨界Hardy不等式$(a > 1)$

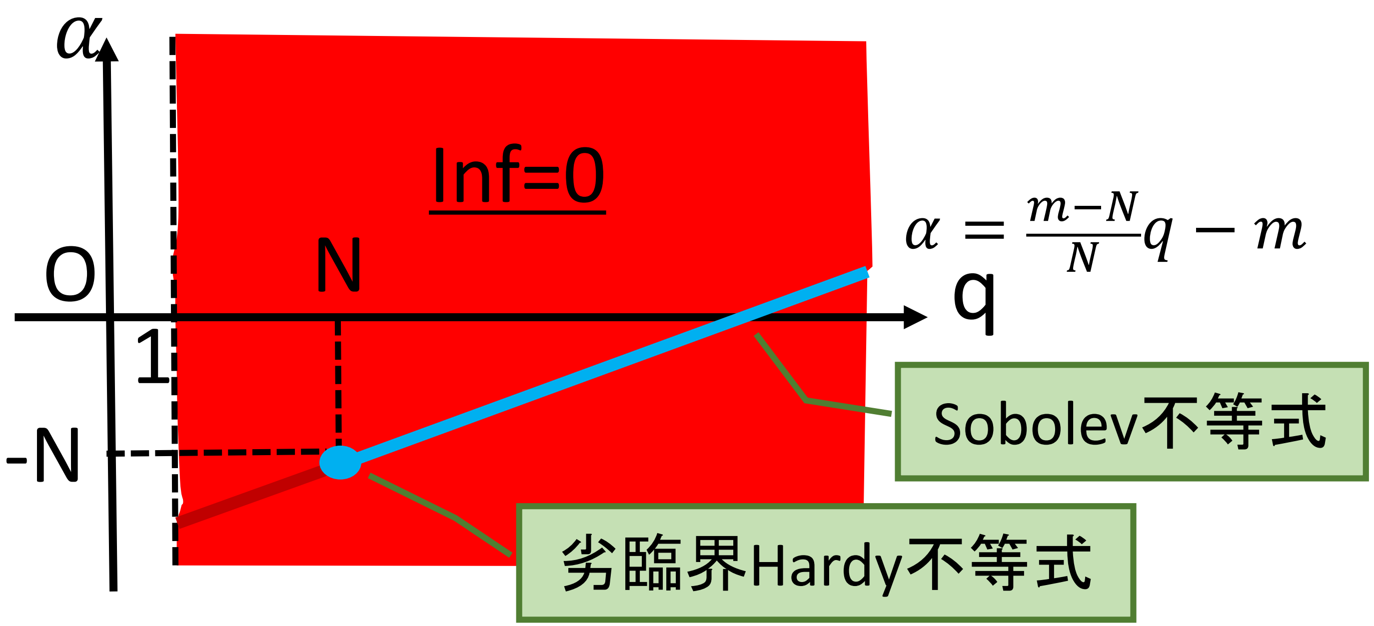
$$\int_{B_R^N(0)} \left|\nabla w \cdot \frac{y}{|y|}\right|^N dy \geq \left(\frac{N-1}{N}\right)^N \int_{B_R^N(0)} \frac{|w|^N}{|y|^N \left(\log \frac{aR}{|y|}\right)^N} dy$$

§4 発展(球対称)

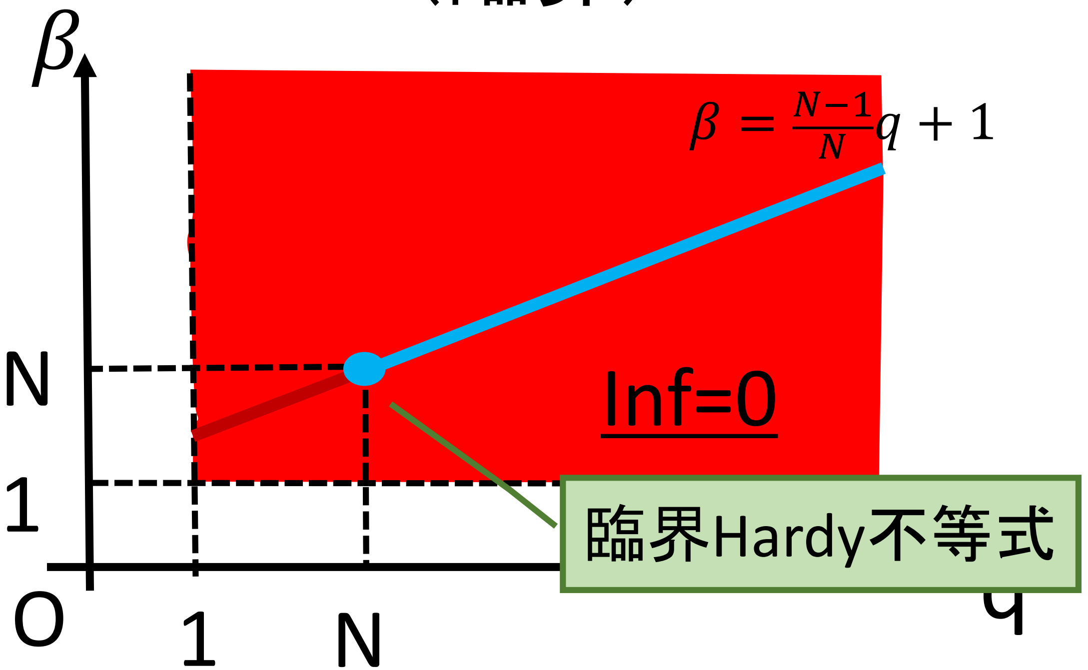
(Ref. S., submitted)　$m > N \geq 2$とする.

$$\inf_{W^{1,N}_{0,\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^m)} \frac{\int_{\mathbb{R}^m}|\nabla u|^N dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^m}|x|^\alpha|u|^q \, dx\right)^{\frac{N}{q}}} = C(m,N)\inf_{W^{1,N}_{0,\mathrm{rad}}(B^N(R))} \frac{\int_{B(R)}|\nabla w|^N dy}{\left(\int_{B(R)}\frac{|w|^q}{|y|^N\left(\log\frac{R}{|y|}\right)^\beta}dy\right)^{\frac{N}{q}}}$$

（劣臨界）



（臨界）

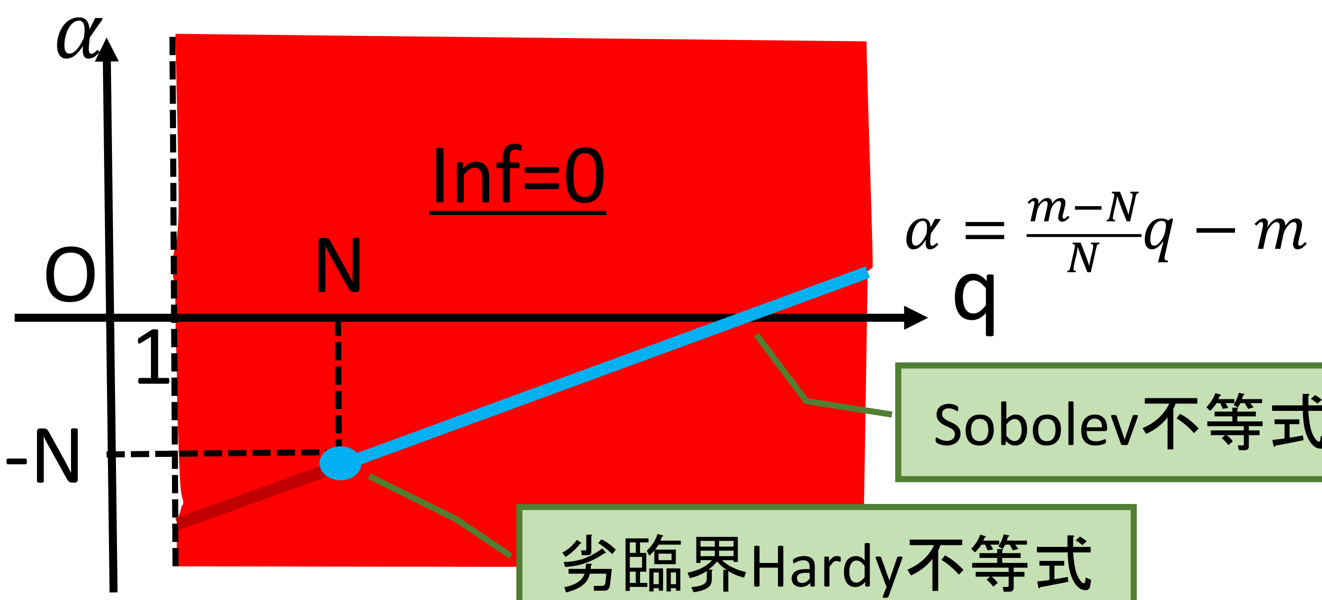


§4 発展(非球対称) (Ref. Horiuchi-Kumurin, 2012, S., submitted)

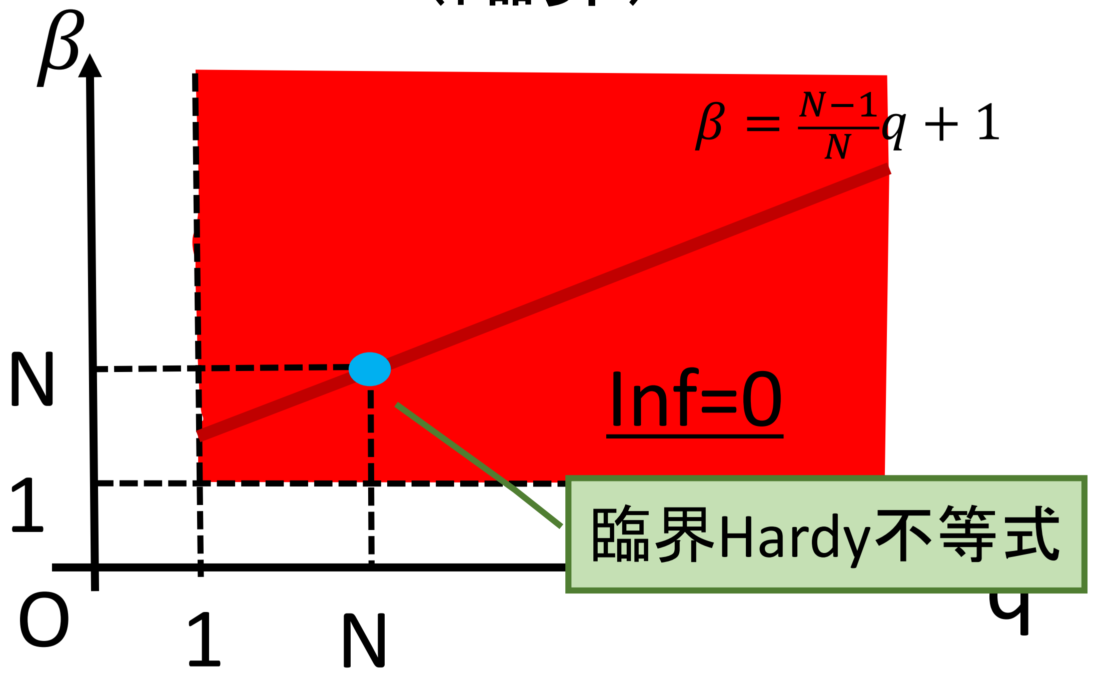
$$\inf_{W_0^{1,N}(\mathbb{R}^m)} \frac{\int_{\mathbb{R}^m} |\nabla u|^N dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^m} |x|^\alpha |u|^q \, dx\right)^{\frac{N}{q}}}$$

$$\inf_{W_0^{1,N}(B^N(R))} \frac{\int_{B(R)} |\nabla w|^N dy}{\left(\int_{B(R)} \frac{|w|^q}{|y|^N \left(\log \frac{R}{|y|}\right)^\beta} dy\right)^{\frac{N}{q}}}$$

（劣臨界）



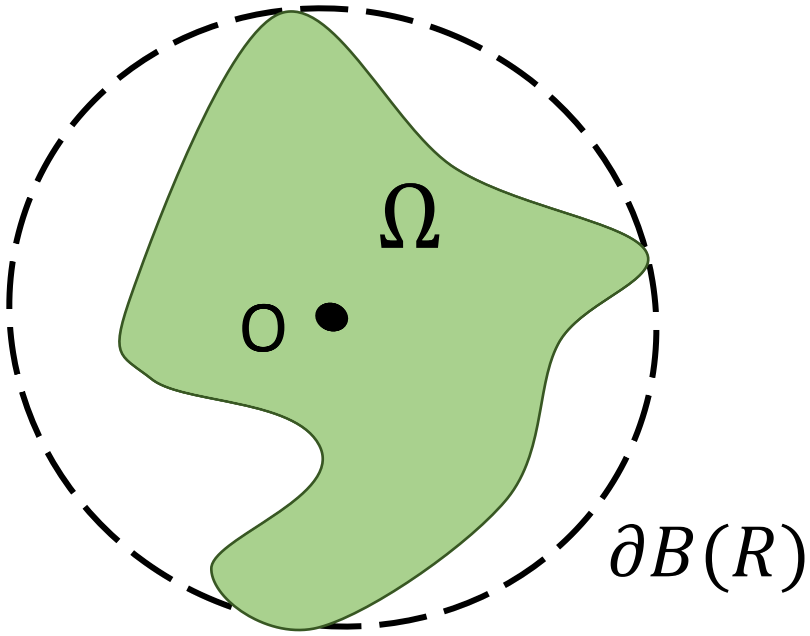
（臨界）

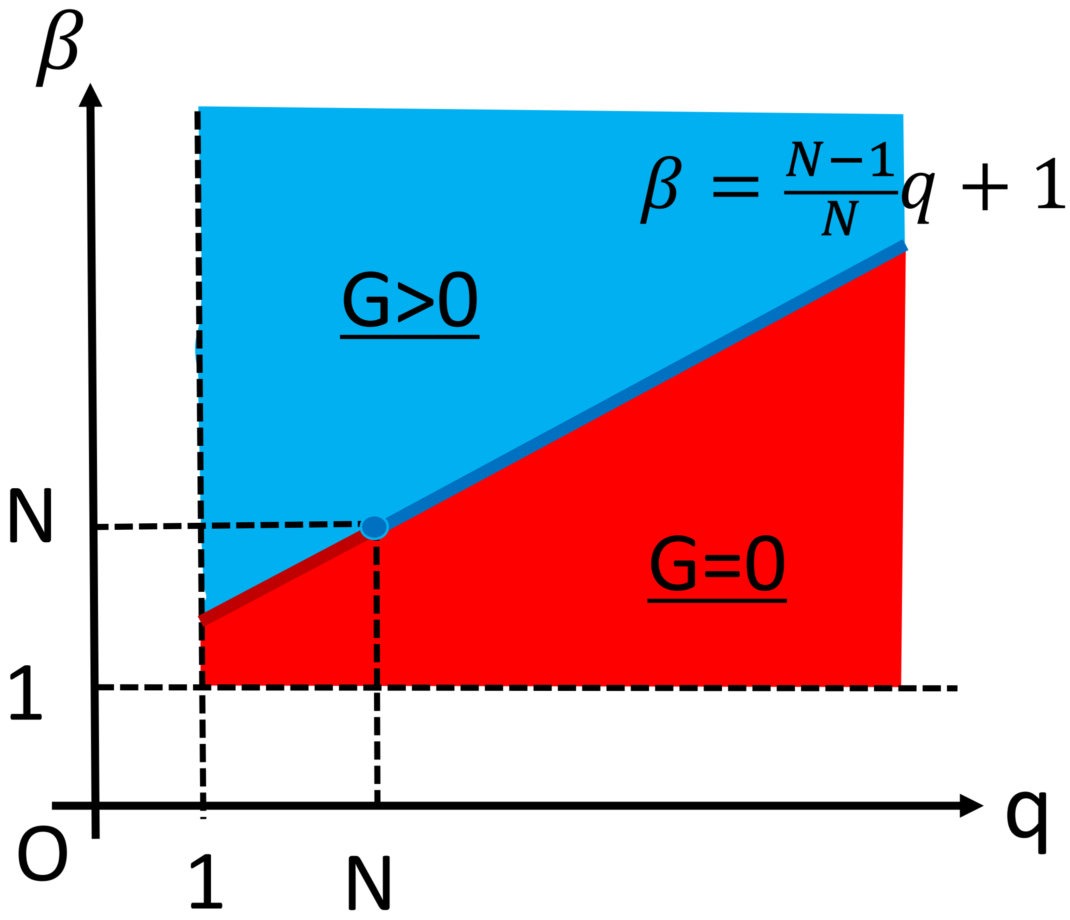


§4 発展(有界領域) (Ref. Machihara-Ozawa-Wadade,2013)

$$G := \inf_{W_0^{1,N}(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla w|^N dy}{\left(\int_\Omega \frac{|w|^q}{|y|^N\left(\log\frac{aR}{|y|}\right)^\beta} dy\right)^{\frac{N}{q}}}$$

$a > 1, \beta, q > 1,$
$0 \in \Omega, R := \sup_{x\in\Omega} |x|.$



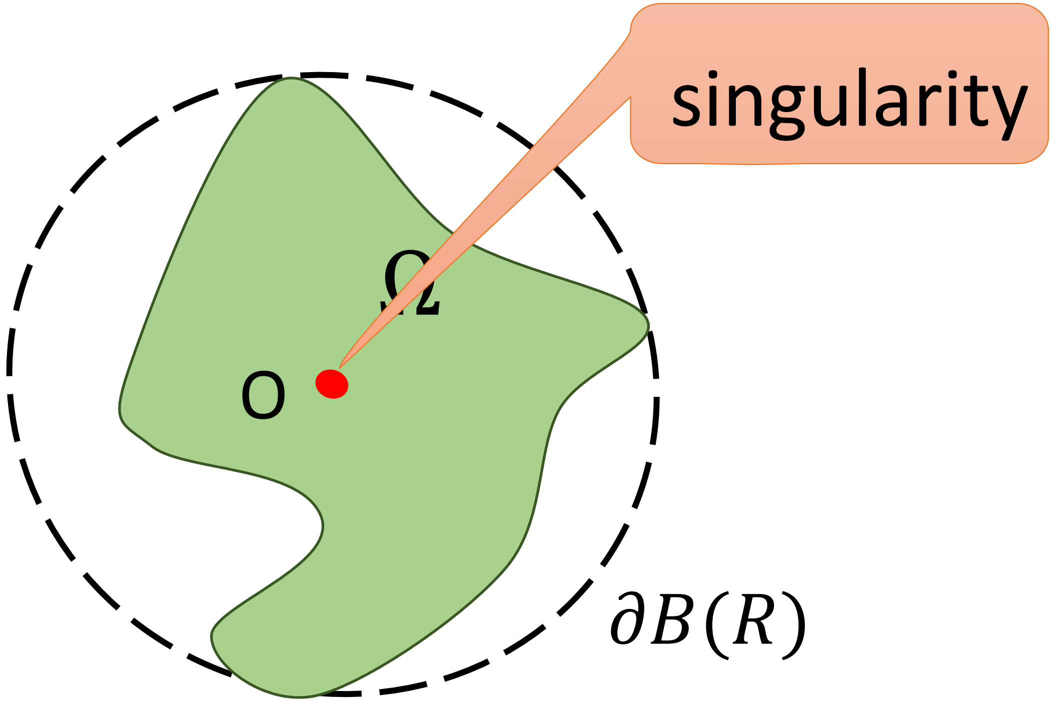


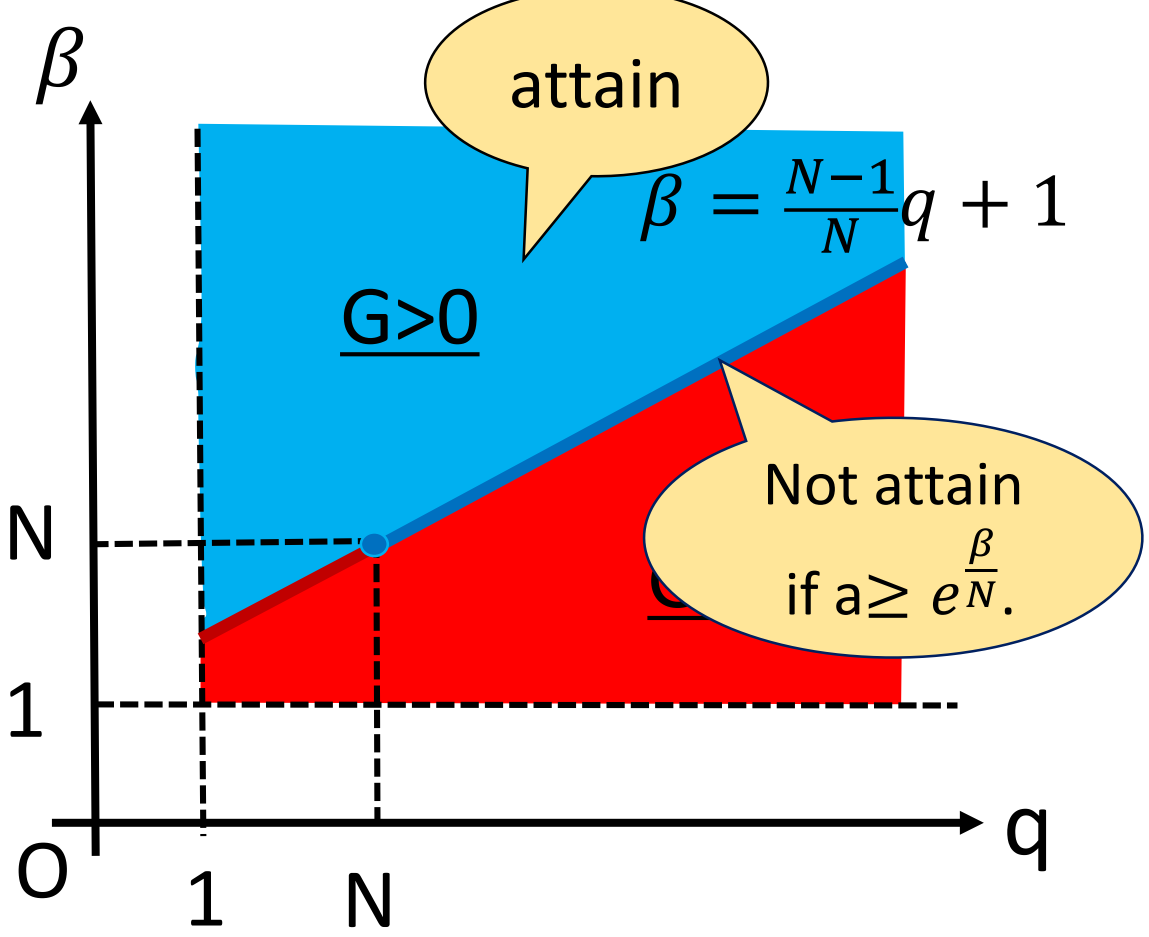
§4 発展(有界領域) (Ref. S., submitted)

$$G := \inf_{W_0^{1,N}(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla w|^N dy}{\left(\int_\Omega \frac{|w|^q}{|y|^N\left(\log\frac{aR}{|y|}\right)^\beta} dy\right)^{\frac{N}{q}}}$$

$a > 1, \beta, q > 1,$

$0 \in \Omega, R := \sup_{x\in\Omega} |x|.$

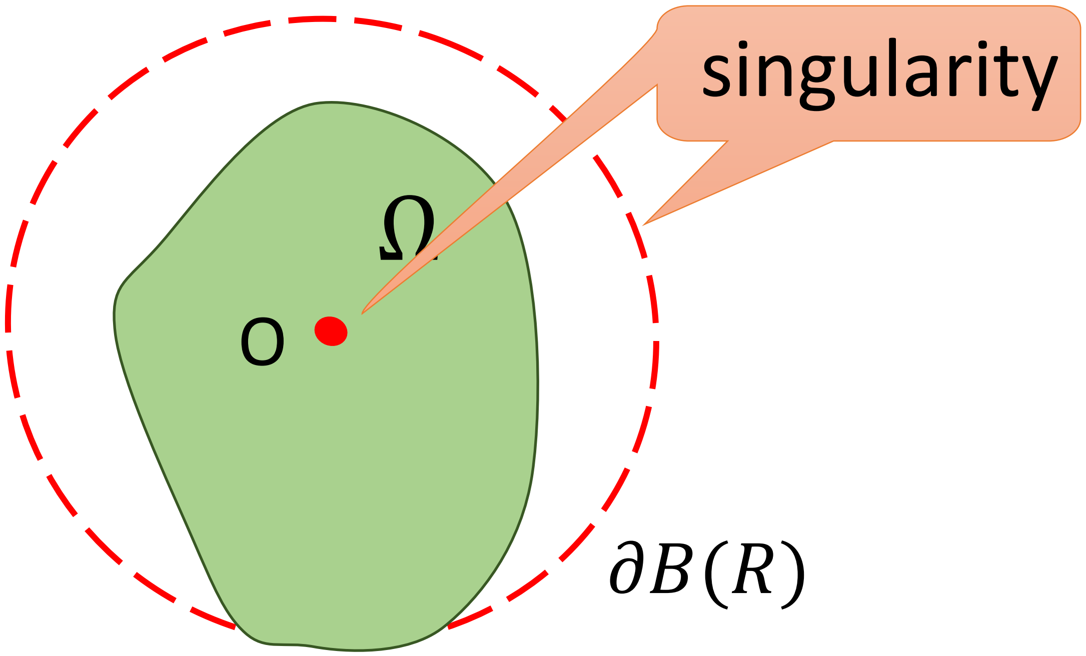


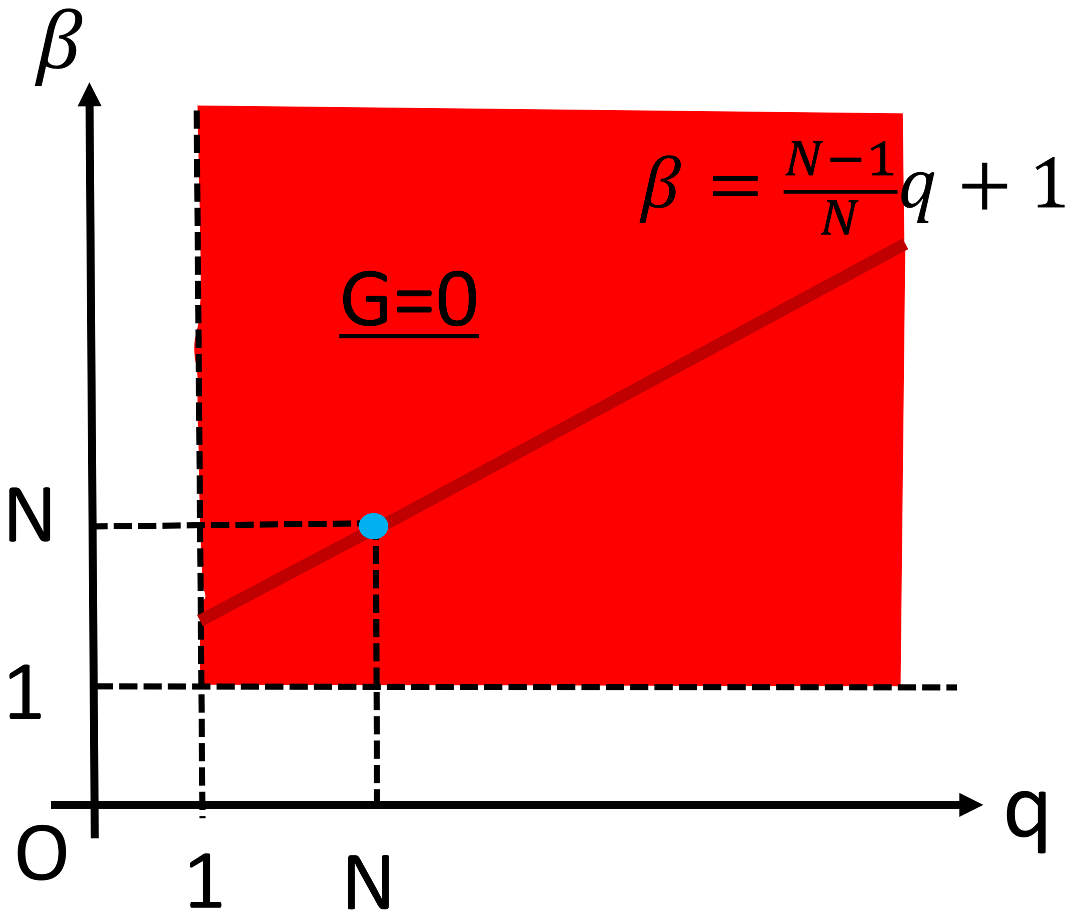


§4 発展(有界領域) (Ref. S., submitted)

$$G := \inf_{W_0^{1,N}(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla w|^N dy}{\left(\int_\Omega \frac{|w|^q}{|y|^N \left(\log\frac{R}{|y|}\right)^\beta} dy\right)^{\frac{N}{q}}}$$

$a = 1, \beta, q > 1,$
$0 \in \Omega,\ R := \sup_{x \in \Omega} |x|.$





§4 発展(有界領域) (Ref. S., submitted)

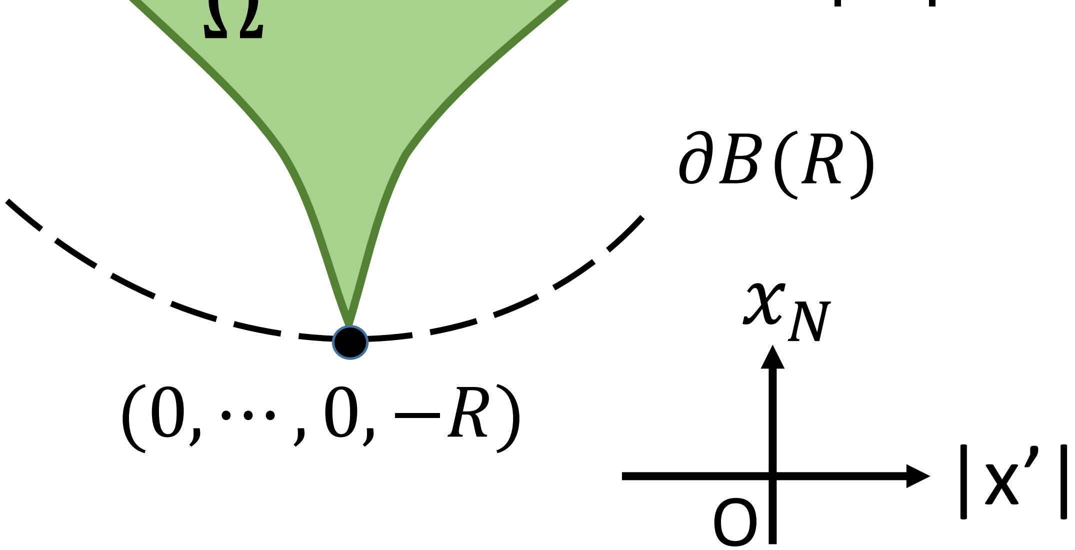
$$G := \inf_{W_0^{1,N}(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla w|^N dy}{\left(\int_\Omega \frac{|w|^q}{|y|^N \left(\log \frac{R}{|y|}\right)^\beta} dy\right)^{\frac{N}{q}}}$$

$\color{red}{a = 1}, \beta, q > 1,$

$0 \in \Omega,\ R := \sup_{x \in \Omega} |x|.$

$0 < \alpha \le 1.$

$\partial\Omega : |x'|^\alpha - R$



$\frac{N}{\alpha}+1-\frac{1}{\alpha} \le \beta^* \le \frac{N}{\alpha}$