ゼータ関数及び L 関数の零点の分布

ADE IRMA SURIAJAYA (アデ イルマ スリアジャヤ / チャチャ)

〒 *351-0198* 埼玉県和光市広沢 *2-1* 理化学研究所 分野横断型数理科学連携研究チーム

リーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ は

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},\quad \mathrm{Re}(s)>1$$

によって定まる $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ 上正則関数である．$\zeta(s)$ は負の偶数点 $s=-2,-4,-6,-8,\cdots$ で「自明な零点」と呼ばれる一位の零点を持つが，それら以外の零点は「 非自明な零点」と呼ばれ，その正確な位置は未解決である．この非自明な零点 ρ は全て $0<\mathrm{Re}(\rho)<1$ を満たし，全て実数ではない．よって，$\zeta(s)$ の非自明な零点と実数でない零点，また，$\mathrm{Re}(s)>0$ にある零点は全て同じ用語である．非自明な零点は全て直線 $\mathrm{Re}(s)=1/2$ 上にあると予想されている（cf.「リーマン予想」）．

$\zeta(s)$ の非自明な零点の分布は，素数の分布をきっかけに，たくさん調べられ，現在，それ自身だけではなく，その導関数の零点との関係も知られ，導関数の零点の分布もたくさん研究されてきている．この研究の出発点は，1935 年に Speiser 氏が示したリーマン予想と $\zeta(s)$ の一階導関数 $\zeta'(s)$ の零点の分布の同値条件と考えられる．2012 年に赤塚広隆氏は，1970 年代に Berndt 氏，Levinson 氏，Montgomery 氏が示した $\zeta(s)$ の k 階導関数 $\zeta^{(k)}(s)$ の零点の分布に関する近似式を，$k=1$ に対して，リーマン予想を仮定し，より精密な評価を得た．発表者は 2015 年にこの赤塚広隆氏の結果を全ての正の整数 k に対して拡張した．

解析的な性質が $\zeta(s)$ に非常に近い，$\zeta(s)$ の一般化の一つであるディリクレ L 関数がある．$q>1$ を法とする原始的なディリクレ指標 χ に対して，ディリクレ L 関数 $L(s,\chi)$ は

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s},\quad \mathrm{Re}(s)>0$$

によって定まる $\mathbb{C}$ 上正則関数である．$\zeta(s)$ の場合と同様に，$\mathrm{Re}(s)\le 0$ に「自明な零点」を持ち，$\mathrm{Re}(s)>0$ にある「非自明な零点」の正確な位置は未知である．$L(s,\chi)$ の非自明な零点は，$\zeta(s)$ と同様に，全て直線 $\mathrm{Re}(s)=1/2$ 上にあると予想されている（cf.「一般されたリーマン予想」）．

$L(s,\chi)$ の非自明な零点の分布は等差数列の中の素数の分布と密接に関係していることをきっかけに，$L(s,\chi)$ の非自明な零点の分布もたくさん調べられ，$\zeta(s)$ の場合と同じように，導関数の零点も研究されてきている．1996 年に Yıldırım 氏は $L(s,\chi)$ の k 階導関数 $L^{(k)}(s,\chi)$ の零点のいろんな性質を調べて零点の分類もしたが，$L^{(k)}(s,\chi)$ の零点を自明と非自明な零点だけに分類したのではなく，存在性と挙動が不明である放浪する零点にも分類した．放浪する零点が存在し得る領域を決める大きな q のファクターにより，零点の分布に関する漸近公式を調べるとき，誤差が非常に大きくなる．発表者と赤塚広隆氏は，最近出版された論文に $k=1$ に対して，Yıldırım 氏が示した $L'(s,\chi)$ の非零領域を改良し，放浪する零点が存在しないことを示した．

また，発表者と赤塚広隆氏は同様の論文に，$\mathrm{Re}(s)\le 0$ にある $L'(s,\chi)$ の零点は，有限個の零点を除けば，それぞれ $L(s,\chi)$ の自明な零点に一対一の対応をしていることを示し，Speiser の結果の拡張（一般化された リーマン予想との同値条件）も得た．これらを用い，$L'(s,\chi)$ の零点の分布に関して精密な評価をした．発表者は 2017 年の別の論文で一般化されたリーマン予想の仮定の下でより精密な評価も示した．

E-mail address: adeirmasuriajaya@riken.jp.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 11M06.

Key words and phrases. リーマンゼータ関数, ディリクレ L 関数, 導関数, 零点.

本研究は部分的に赤塚広隆氏 (小樽商科大学) との共同研究であり，似鳥国際奨学財団，岩谷直治記念財団，科研費 (課題番号:15J02325)，(理研) 数理創造プログラムの助成を受けたものである.