

令和7年度

理学部

数物科学科 数物連携コース

第3年次編入学者選抜学力試験問題

数 学

令和6年6月8日(土)

10:00~11:30

注 意 事 項

1. 解答用紙表紙の指定された箇所に、受験番号、氏名を記入すること。
受験番号は、受験票の受験番号欄に記入してあるとおりに書くこと。
指定された箇所以外には、受験番号・氏名を絶対に書かないこと。
2. A1~A3の全問(3問)あるいはB1~B4の全問(4問)のいずれかを選択し、
選択した問題を全問解答すること。
3. 解答は、別冊子の解答用紙に記入すること。
解答用紙左上の問題番号を確認し、問題に対応する解答用紙に記入すること。
4. 各問題の解答用紙(両面)はそれぞれ1枚ある。
5. 問題冊子の総ページ数————— 5ページ
 問題 A1~A3 のページ————— 第3ページ
 問題 B1~B4 のページ————— 第4~5ページ
 (第1~2ページは白紙)
6. 試験終了後、この問題冊子は持ち帰ること。

A1 a, b は実数とする. 3次正方行列 A とベクトル p を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -a+2 & 1 & a^2+2a \\ a-1 & a & a+2 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} -2 \\ ab-5a+1 \\ -2a+b-5 \end{pmatrix}$$

と定め, 3次元実ベクトル空間 \mathbb{R}^3 の間の線形写像 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$f(v) = Av, \quad v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

で定める. 以下の問いに答えよ.

- (1) f の像 $\text{Im}(f)$ の次元を求めよ.
- (2) p が $\text{Im}(f)$ に属するための a, b の条件を求めよ.

A2 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \sqrt{(a_n - 1)^2 + 4}$$

と定める. 以下の問いに答えよ.

- (1) すべての自然数 n に対して $a_n < \frac{5}{2}$ となることを示せ.
- (2) すべての自然数 n に対して $a_n < a_{n+1}$ となることを示せ.
- (3) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束することを示し, その極限值を求めよ.

A3 $f(x) = \frac{x-1}{x^2(x^2+1)}$ とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{cx}{x^2+1} + \frac{d}{x^2+1}$ をみたす定数 a, b, c, d を求めよ.
- (2) $M > 1$ とするとき, 定積分 $\int_1^M f(x) dx$ を求めよ.
- (3) 広義積分 $\int_1^{\infty} f(x) dx$ の値を求めよ.

B1 微分に関する以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ ($-1 < x < 1$) を考える。

(a) $x=0$ の近傍でテイラー展開し, x の 3 乗の項まで求めよ。

(b) $y = f(x)$ のグラフの概形を描け。

(2) 関数 $T(l, g) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ について, 一次偏導関数 $\frac{\partial T}{\partial l}$, $\frac{\partial T}{\partial g}$, および全微分 dT を求めよ。

B2 積分に関する以下の問いに答えよ。

(1) 二重積分 $\iint_R e^{-x+y} dx dy$ を求めよ。ここで, 領域 R は, $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ で表される領域である。

(2) $a > 0$ とする。次式で与えられるサイクロイド曲線の長さを求めよ。

$$\begin{cases} x(\theta) = a(\theta - \sin \theta) \\ y(\theta) = a(1 - \cos \theta) \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

次ページに続く

B3 a を実定数とし、次の微分方程式を考える。

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = ae^t$$

以下の問いに答えよ。

- (1) $a = 0$ とおいた微分方程式の一次独立な 2 つの解を求めよ。
- (2) $a \neq 0$ のとき、初期条件 $y(0) = 0$, $\frac{dy}{dt}(0) = 0$ をみたす解を求めよ。

B4 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ。
- (2) 3次元縦ベクトル v が $Av = 0$ をみたすとき、あるベクトル u が存在して、 v は次式で表されることを示せ。

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + Au$$