令和7年度4月入学者選抜試験問題

奈良女子大学大学院人間文化総合科学研究科（博士前期課程）

数物科学専攻

【　一　般　選　抜　】

試験科目名　：　筆記試験（数　学）

令和６年７月６日（土）

試験時間：１０：００～１２：００

注意事項

（１）解答用紙の指定された箇所に受験番号，氏名，問題番号を記入すること。
受験番号は，受験票の受験番号欄に記入してあるとおりに書くこと。
指定された以外の箇所には，受験番号・氏名を絶対に書かないこと。

（２）問題冊子及び解答用紙は，指示があるまで開いてはならない。

（３）全問解答すること。

（４）問題１から問題３を問題ごとに別々の解答用紙を使って解答すること。
解答用紙（両面）は３枚ある。
解答用紙は必要に応じて追加できるので，手を挙げて知らせること。

（５）問題冊子に乱丁，落丁，印刷不鮮明など不備があった場合は，挙手をして試験監督者に申し出ること。

（６）問題冊子の総ページ数　---------------------　４ページ
問題ページ　---------------------　第２～第４ページ（第１ページは白紙）

（７）試験終了後，この問題冊子は持ち帰ること。

$\boxed{\mathbf{1}}$ k を実数とし， $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ とする．また，$\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^3$ への一次変換 f を，$\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3$ に対し $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ として定める．以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値をすべて求め，それぞれに対する固有空間を求めよ．

(2) $\mathbf{R}^3$ における，原点を中心とする半径 1 の球面を S とする．このとき，$S \cap f(S) = \emptyset$ となるための k の条件を求めよ．ただし，$f(S) = \{f(\boldsymbol{x}) | \boldsymbol{x} \in S\}$ とする．

$\boxed{2}$ 以下の問いに答えよ．ただし対数は自然対数とする．

(1) 正の整数 n に対し，

$$\log(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} \leq 1 + \log n$$

が成り立つことを示せ．

(2) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$ とする．このとき a_n は n について単調減少であることを示せ．

(3) (2) で定めた a_n について，$\lim_{n \to \infty} a_n$ が存在することを示し，さらにこの極限値は $\frac{1}{2}$ 以上であることを示せ．

$\boxed{3}$ 正の整数の集合を $\mathbf{N}$ とする．2次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^2$ の部分集合列 $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ に対し，

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbf{N}}\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right), \qquad \varlimsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbf{N}}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) $\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n \subset \varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n$ であることを示せ．

(2) $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$ であるとき，$\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n$ であることを示せ．

(3) 実数列 $\{r_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が，ある正の実数 r に収束するものとする．

$$A_n = \left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq r_n^2\right\}$$

と定めるとき，$\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n$ は成り立つといえるか．