令和7年度4月入学者選抜試験問題

奈良女子大学大学院人間文化総合科学研究科（博士前期課程）

数物科学専攻

【 一 般 選 抜 】

試験科目名 ： 筆記試験（物 理）

令和６年７月６日（土）

試験時間：１０：００～１２：００

注意事項

（１）問題［Ⅰ］から［Ⅳ］のうち３問題を選択して解答すること。

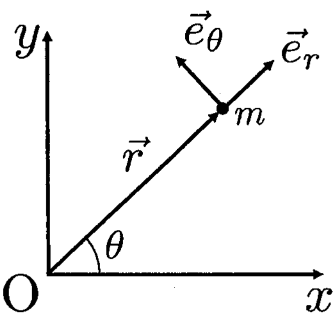
（２）問題ごとに別々の解答用紙を使って解答すること。
１枚の解答用紙に記載した問題番号以外の問題を解答した場合は採点の対象としない。

（３）解答用紙は必要に応じて追加できるので，手を挙げて知らせること。

問題冊子の総ページ数 －－－－－－－－－－－ ９ページ

[I]

2 次元平面上において，質量 m の質点が，位置 $\vec{r}$ にあるとき $r=|\vec{r}|$ として，中心力ポテンシャル $U(r)=\dfrac{\alpha}{r}$（α は実数の定数）による力を受けながら運動する場合を考える。このとき質点の速度ベクトルを $\dot{\vec{r}}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ とする。ここで図のように 2 次元極座標 (r,θ) をとり，動径 r 方向の単位ベクトルを $\vec{e}_r$，方位角 θ 方向の単位ベクトルを $\vec{e}_\theta$ とする。質点は常に θ が増す方向に運動するとして，以下の問いに答えよ。



問 1　(a) $\dot{\vec{e}}_r=\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ となることを示せ。

(b) $\dot{\vec{e}}_\theta=-\dot{\theta}\vec{e}_r$ となることを示せ。

(c) $\dot{\vec{r}}=\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ となることを示せ。

(d) $\ddot{\vec{r}}=a_r\vec{e}_r+a_\theta\vec{e}_\theta$ と表すとき，a_r および a_θ を r，$\dot{r}$，$\ddot{r}$，θ，$\dot{\theta}$，$\ddot{\theta}$ のうち必要なものを用いて表せ。

問 2　原点 O を基準とした質点の角運動量の大きさが $mr^2\dot{\theta}$ となることを示せ。

問 3　この系のラグランジアン $\mathcal{L}(r,\dot{r},\theta,\dot{\theta})$ を書け。

問 4　オイラー・ラグランジュ方程式を書き，r と θ についての運動方程式を導け。

次ページに続く

[I] の続き

問5　質点の角運動量の大きさが保存していることを示せ。

問6　質点の角運動量の大きさを定数 L とし，$u = \dfrac{1}{r}$ の変数変換を考える。問4で導出した運動方程式から以下の微分方程式が得られることを示せ。

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -u - \frac{m\alpha}{L^2}$$

問7　問6の方程式の一般解を求め，r と θ の関係式を導け。

[II]

図 1 に示すように，真空中に点電荷 $+q$ $(q>0)$ が $(x,y,z)=\left(0,0,\frac{d}{2}\right)$ の位置に，点電荷 $-q$ が $\left(0,0,-\frac{d}{2}\right)$ の位置にある。真空の誘電率を ε_0 として以下の問いに答えよ。

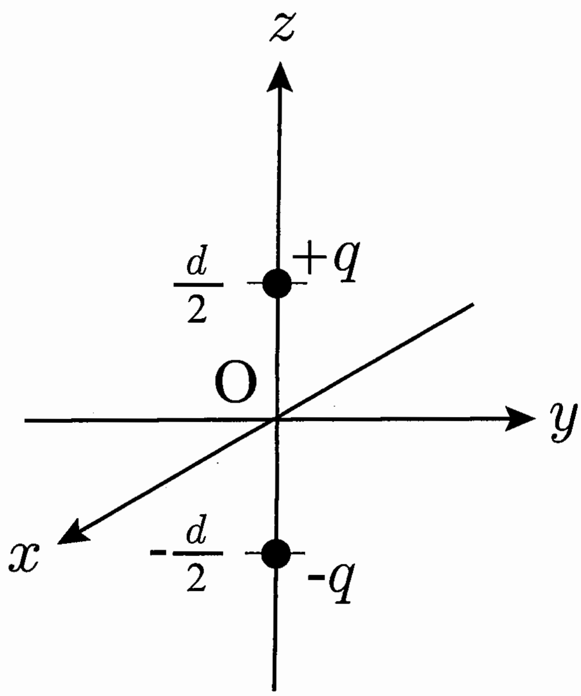


図 1

問 1　2 つの点電荷 $+q$ と $-q$ が静止している場合を考える。

(a) $+q$ が位置 $\vec{r}=(x,y,z)$ に作る電場を $\vec{E}_1(\vec{r})$ とする。$\vec{E}_1(\vec{r})$ の x，y，z 成分をそれぞれ示せ。

(b) 点電荷 $+q$ がつくる静電ポテンシャル $\phi_1(\vec{r})$ を無限遠方でゼロであるとして示せ。

(c) 点電荷 $+q$ および $-q$ がつくる電場 $\vec{E}(\vec{r})$ は，各々がつくる電場の重ね合わせで与えられる。xy 平面上では $\vec{E}(\vec{r})$ の x 成分および y 成分はゼロであることを説明し，z 成分を示せ。

次ページに続く

[II] の続き

問 2　点電荷 $+q$ および $-q$ が z 軸上で原点 O のまわりに振動する場合を考える。xy 平面上の点 A の位置を $\vec{r}_{\mathrm{A}} = (x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}}, 0)$，$r_{\mathrm{A}} = |\vec{r}_{\mathrm{A}}|$ として，そこに生じる磁場を求めよう。ここで，時刻 t において $d = d_0 \cos\omega t$ であるとし，長さ d_0 と角振動数 ω は定数である。ただし，$+q$ および $-q$ の運動する速さは光速より十分遅い。また，xy 平面上に生じる電場は，問 1 (c) で求めた $\vec{E}(\vec{r})$ において $d = d_0 \cos\omega t$ とおいた式で与えられるとする。

(a) $r_{\mathrm{A}} \gg d_0$ であり，r_{A}^2 に対して d_0^2 は無視してよいとして，A における電場の z 成分を示せ。

(b) 点電荷 $+q$ と $-q$ が z 軸上で振動するため，xy 平面上では，磁場 $\vec{H}$ は原点 O を中心とした円の周に沿った方向に生じ，$\vec{H}$ と電場の z 成分 E_z の変化の間には

$$\int_{\mathrm{C}} \vec{H} \cdot d\vec{r} = -\int_{\mathrm{S}} \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E_z \, dS \tag{1}$$

が成り立つとする。ここで左辺は図 2 に示す閉経路 C に沿った線積分であり，右辺は C が囲む領域 S での面積分である。

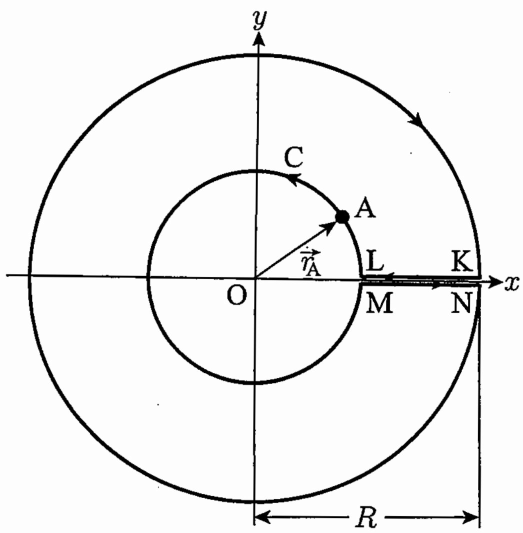


図 2

C は，点 A を通る xy 平面上の円と，半径 R の大きな円を，近接した平行な 2 本の線分 KL と MN でつないだ閉経路である。KL と MN については，間隔をゼロにした極限をとると，C 上の経路の向きが逆になって，線積分への寄与は相殺してゼロになる。また R を十分大きくすると，半径 R の円周における電磁場は無視してよい。このため，(1) 式の左辺の線積分には，半径 r_{A} の円周のみが寄与する。右辺の面積分の領域としては，半径 r_{A} の円より外側の xy 平面全体を考えればよい。点 A における磁場の周方向成分 H_{A} を求めよ。ただし，H_{A} は図 2 で反時計回りを正とする。

[III]

無限に深い井戸型ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & (x < 0) \\ 0 & (0 < x < L) \\ +\infty & (x > L) \end{cases}$$

に束縛された量子力学的な1次元粒子を考える。粒子1個の質量を m とする。粒子は質点とみなすことができ，簡単のためスピン自由度は無視する。また，$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ (h：プランク定数) として，以下の問いに答えよ。

問1　井戸型ポテンシャル $V(x)$ に束縛された1個の粒子を考える。

(a) 定常状態のシュレディンガー方程式を解き，境界条件 $\varphi_n(0) = 0$ および $\varphi_n(L) = 0$ から，固有状態の規格化された波動関数が

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{1}$$

と表されることを示せ。

(b) $\varphi_n(x)$ で表される状態 n のエネルギー固有値 ε_n の表式を求めよ。

問2　井戸型ポテンシャル $V(x)$ に，同種ボース粒子が2個束縛された場合を考える。粒子が区別できる場合には，一方の粒子をA，もう一方の粒子をBとすると，粒子Aが状態 n にいるときの波動関数は $\varphi_n(x_\mathrm{A})$，粒子Bが状態 n' にいるときの波動関数は $\varphi_{n'}(x_\mathrm{B})$ で表され，2粒子系の状態を表す波動関数 $\Phi(x_\mathrm{A}, x_\mathrm{B})$ は

$$\Phi(x_\mathrm{A}, x_\mathrm{B}) = \varphi_n(x_\mathrm{A})\,\varphi_{n'}(x_\mathrm{B})$$

という積の形で与えられる。ここで $\varphi_n(x)$ は，(1) 式で与えられる1粒子の波動関数である。波動関数の規格化条件は $\displaystyle\int_0^L dx_\mathrm{A} \int_0^L dx_\mathrm{B} |\Phi(x_\mathrm{A}, x_\mathrm{B})|^2 = 1$ である。

(a) 2個のボース粒子の間に相互作用はないとする。基底状態のエネルギーを，ε_n を用いて表せ。また，基底状態の規格化された波動関数を，$\varphi_n(x)$ を用いて表せ。

次ページに続く

[III] の続き

(b) 2 個のボース粒子の間に

$$U(x_{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{B}}) = a\,\delta(x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{B}}) \tag{2}$$

というポテンシャルで与えられる相互作用がはたらく場合を考える。ただし a を正の定数とし，$\delta(x)$ はディラックのデルタ関数である。$U(x_{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{B}})$ による 1 次の摂動エネルギーは，$U(x_{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{B}})$ の期待値で与えられる。基底状態に対する 1 次の摂動エネルギーを求めよ。必要であれば $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^4\theta\, d\theta = \frac{3\pi}{8}$ の積分公式を用いてもよい。

(c) 2 個のボース粒子の間に相互作用はないとして第 1 励起状態の規格化された波動関数 $\Phi'(x_{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{B}})$ を，$\varphi_n(x)$ を用いて表せ。ただし，2 個の粒子が同種ボース粒子の場合には，2 粒子系の波動関数 $\Phi'(x_{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{B}})$ は，座標の入れ替えに対して対称であり，$\Phi'(x_{\mathrm{B}}, x_{\mathrm{A}}) = \Phi'(x_{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{B}})$ という関係を満たさなければならない。

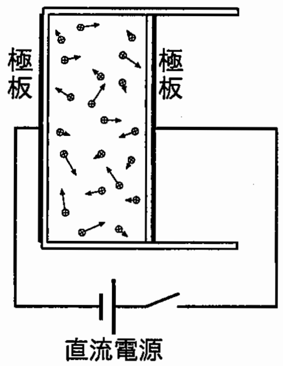
問 3　ポテンシャル $V(x)$ に，同種フェルミ粒子が 2 個束縛された場合を考える。問 2 のボース粒子の場合とは異なり，同種フェルミ粒子の場合は，波動関数 $\Phi_{\mathrm{F}}(x_{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{B}})$ は，座標の入れ替えに対して反対称であり，$\Phi_{\mathrm{F}}(x_{\mathrm{B}}, x_{\mathrm{A}}) = -\Phi_{\mathrm{F}}(x_{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{B}})$ という関係を満たさなければならない。

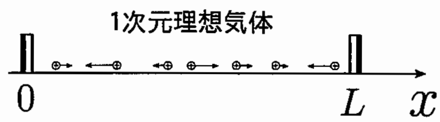
(a) 2 個のフェルミ粒子の間に相互作用はないとする。基底状態のエネルギーを，ε_n を用いて表せ。また，基底状態の規格化された波動関数 $\Phi_{\mathrm{F}}(x_{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{B}})$ を，$\varphi_n(x)$ を用いて表せ。

(b) 2 個のフェルミ粒子の間に，(2) 式のポテンシャルで与えられる相互作用がはたらくとき，基底状態に対する $U(x_{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{B}})$ による 1 次の摂動エネルギーを求めよ。

[IV]

図のように，荷電粒子からなる気体を，体積が変えられる絶縁体の容器に閉じ込めて一様な電場をかけたときに起こる現象を，1 次元理想気体の問題として考えよう。理想気体は N 個 $(N \gg 1)$ の質点とみなせる同種粒子からなり，x 軸方向に間隔が L だけ離れた 2 つの壁の間に閉じ込められて，絶対温度 T の環境で熱平衡状態になっているとする。各粒子は質量が m で正の電気量 q をもつが，粒子間の相互作用のエネルギーは無視できる。古典力学的な近似が成り立つとして以下の問いに答えよ。ボルツマン定数を k_{B}，プランク定数を h とする。





問 1　最初に 2 つの壁の間に電位差がない場合を考えよう。n 番目の粒子の位置を x_n $(0 < x_n < L)$，運動量を p_n とすると，1 次元理想気体のハミルトニアンは

$$H_N = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_N^2) \tag{1}$$

で与えられ，N 個の粒子が同種で区別できないことを考慮すると，位相空間においてエネルギー E 以下で実現できる状態が占める領域の体積は

$$\Gamma(E) = \frac{1}{N!}\int_0^L dx_1 \cdots \int_0^L dx_N \int \cdots \int_{H_N \le E} dp_1 \cdots dp_N = A_N L^N E^{N/2} \tag{2}$$

である。ここで A_N は L，E によらない定数である。

(a) 気体のエントロピー S は，エネルギーが $[E, E+\Delta E]$ の狭い範囲 $(\Delta E \ll E)$ で実現可能な量子状態の数 w を用いて $S = k_{\mathrm{B}} \log w$ と定義される。$N \gg 1$ では，L，E によらない定数を B_N として，$S \simeq N k_{\mathrm{B}}\left(\log L + \dfrac{1}{2}\log E\right) + B_N$ と表すことができることを示せ。

(b) 絶対温度 T と気体粒子 1 個あたりのエネルギー $\dfrac{E}{N}$ の関係を求めよ。

(c) 準静的に等温圧縮すると気体は環境に熱を放出する。壁の間隔を L から $L_0 (L_0 < L)$ に縮める過程でのエントロピーの変化を計算し，気体が放出する熱量を求めよ。

次ページに続く

[IV] の続き

問 2　次に，極板間に電位差を与え，$x=0$ と $x=L$ の壁の電位をそれぞれ 0 と V にした場合を考えよう ($V>0$)。気体中のある 1 個の粒子の位置を x，運動量を p とすると，その粒子のハミルトニアンは

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{qV}{L}x \tag{3}$$

で与えられ，状態 (x,p) が実現する確率密度はカノニカル分布

$$P(x,p)=\frac{1}{hZ}e^{-\beta H} \tag{4}$$

で与えられる。ここで $\beta=\dfrac{1}{k_{\mathrm{B}}T}$ で，Z は規格化条件から決まる 1 粒子の分配関数である。

(a) 1 粒子の分配関数は

$$Z=\frac{L}{h\beta qV}(1-e^{-\beta qV})\sqrt{\frac{2\pi m}{\beta}} \tag{5}$$

であることを示せ。必要であればガウス積分の公式 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}dp\ e^{-\alpha p^2}=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ $(\alpha>0)$ を利用してもよい。

(b) $P(x,p)$ から運動量 p についての 1 変数の確率密度 $P(p)$ を導出し，運動量分布は電位差 V によって変化しないことを示せ。

(c) エネルギーの期待値 $\langle H\rangle$ を計算し，$\beta qV\gg 1$ の場合には $\langle H\rangle\simeq\dfrac{3}{2}k_{\mathrm{B}}T$ と近似できることを示せ。

(d) 電位差 V が大きいと，粒子は静電気力のため $x=0$ の壁付近に集まる。$\beta qV\gg 1$ の場合には，粒子の位置 x の期待値は $\langle x\rangle\simeq\dfrac{L}{\beta qV}$ と近似できることを示せ。

(e) 気体の温度を一定に保ったまま，2 つの壁の間の電位差を 0 から V に準静的に増やしたとする。この過程で気体が放出する熱量を，$\beta qV\gg 1$ が成り立つとして近似的に求めよ。ただし，N 個の同種粒子からなる理想気体のヘルムホルツの自由エネルギーは $F=-k_{\mathrm{B}}T\log\dfrac{Z^N}{N!}$ で与えられることを利用してもよい。