ちくま学芸文庫

数学をいかに使うか

志村五郎

筑摩書房

ちくま学芸文庫

数学の好きな人のために

続・数学をいかに使うか

志村五郎

筑摩書房

で通すと大部の本になるのでお話の部分もある．少し技術的になって証明や計算が長くなる所は最後の附録の章の§A1から§A8に入れてある．附録としてはあるがその中の§§A1，A6，A8などは本文の一部だと思って読んでもらいたい．

複素解析やLebesgue積分が出て来る章ではそのごく易しい部分の知識を仮定した．そうしないと書けないからである．その理論の教科書を入手して，始めの方を少し読んでおけば十分であるが，それをしなくても，本書に書いてあるだけでも感じはつかめると思う．Lebesgue積分も複素解析も，その易しい部分は大学の一般初年級の微積分に含めてよい時代になっているのではないかと思う．もちろん微積分のかなりの部分は高校でやって，その続きのような気分でやればよい．本書はそういう気分で書かれているのである．

要するに数学は学ぶにせよ教えるにせよ，きめられた伝統的な段階をふんできっちりとやらなければならないものではない．特に「何でも厳密に」などと考えてはいけない．これは教育上で言っているのであって，厳密でなければならない場所はもちろんある．

ともあれ，本書を気楽に読んで，そこに読者が何か新らしいことを発見して，また，それを到達点ではなく出発点とすることを期待するものである．

2010年6月

志村五郎

目　次

$\mathbf{Z}$ を週期にした方がやり易い.）そこで $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ の上で測度が考えられる．これは $[0,1]\times\cdots\times[0,1]$（$n$ 個の直積）と思ってよく，$L^p(\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n)$ が定義される．(9.3) の $\mathbf{R}^n$ を $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ にすればよい．

$f\in L^1(\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n)$ を取って，その Fourier 係数 $\tilde{f}(m)$ が $m\in\mathbf{Z}^n$ に対し

$$\tilde{f}(m)=\int_{\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n} f(x)\mathbf{e}\left(-\textstyle\sum_{\nu=1}^n m_\nu x_\nu\right)dx \tag{9.7}$$

で定義される．$n=1$ ならば f は $[0,1]$ の関数と考えられて，$m\in\mathbf{Z}$ に対して $\tilde{f}(m)=\int_0^1 f(x)\mathbf{e}(-mx)dx$ である．Fourier 変換の場合 $\mathbf{R}^n$ 上の関数 f にやはり $\mathbf{R}^n$ 上の関数 $\hat{f}$ を対応させるのであるが，今度は $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ 上の関数 f に対し，$\mathbf{Z}^n$ 上の関数 $\tilde{f}$ を対応させるのである．

$L^p(\mathbf{Z}^n)$ も定義できる．この章の始めに N について言ったように，$\mathbf{Z}^n$ の各元の測度を 1 とするから，$L^p(\mathbf{Z}^n)$ は $\mathbf{Z}^n$ 上の関数 g で $\sum_{m\in\mathbf{Z}^n}|g(m)|^p<\infty$ となるもの全体である．だから

$$L^1(\mathbf{R}^n)\cap L^2(\mathbf{R}^n)\in f\mapsto \hat{f}\in L^2(\mathbf{R}^n)$$

の代りに

$$L^1(\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n)\cap L^2(\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n)\in f\mapsto \tilde{f}\in L^2(\mathbf{Z}^n)$$

となり，また

$$L^1(\mathbf{Z}^n)\cap L^2(\mathbf{Z}^n)\in g\mapsto g^*\in L^2(\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n),$$

$$g^*(x)=\sum_{m\in\mathbf{Z}^n} g(m)\mathbf{e}\left(-\textstyle\sum_{\nu=1}^n m_\nu x_\nu\right)$$

となっている．そして定理 9.2 はすべてこの場合の言明に書きかえることができる．それは読者が自分で書いて見られるとよいと思う．[SW] にきちんと書いてある．

だから Lebesgue 積分を教科書に入れるならば，L^2 の概念や Fourier 変換がユニタリー作用素であるぐらいの所まで含めた初等的な（[SW] などよりは分量の少ない）本があってもよいのではないか．

$\mathbf{Z}^n,\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ は locally compact abelian group であって，Fourier 解析はそのような群の上での理論として自然に展開される．これはつまらない拡張のための拡張ではなく，整数論などでも重要であるが，ここでは立ち入らない．

Fourier 解析にはいろいろ興味ある応用があるが，ここでは 7 章に書いたテータ関数の変換式 (7.5) を出すのに必要な **Poisson の和公式**だけ注意しておこう．

定理 9.3（Poisson の 和 公 式，Poisson Summation Formula）．$f\in L^1(\mathbf{R}^n)$ が連続であるとき

$$\mathrm{vol}(\mathbf{R}^n/L)\sum_{\ell\in L} f(x+\ell)=\sum_{m\in\tilde{L}}\hat{f}(m)\mathbf{e}({}^t mx) \tag{9.8}$$

が成り立つ．ただし両側の級数が絶対収束するものとす

る．右側についてこれは $\sum_{m\in\tilde{L}}|\hat{f}(m)|$ が収束することを意味する．特に

$$\mathrm{vol}(\mathbf{R}^n/L)\sum_{\ell\in L}f(\ell)=\sum_{m\in\tilde{L}}\hat{f}(m). \tag{9.9}$$

ここで L は $\mathbf{R}^n$ の格子で，

$$\tilde{L}=\{x\in\mathbf{R}^n \mid \text{すべての } y\in L \text{ に対し } {}^txy\in\mathbf{Z}\}$$

とする．$L=\tilde{L}=\mathbf{Z}^n$ としても実質的内容は失われない．そのとき $\mathrm{vol}(\mathbf{R}^n/L)=1$.

ここでは簡単のために収束を仮定したが，収束の条件はいろいろある．[SW] にもある．収束を仮定すれば証明は易しい．[S07] にある．

この定理を応用するためによく知られた事実に注意する．

定理 9.4. $\mathbf{R}$ 上の関数 $f(x)=\exp(-\pi x^2)$ に対して $\hat{f}=f$.

証明. これはそう簡単でないが，複素解析を使えば次のように短かい証明が得られる．微積分のどんな教科書にもある $\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-ax^2)dx=\sqrt{\pi/a}$ から出発する．これは書き直して $\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\pi x^2)dx=1$ となる．さて

$$\int_{\mathbf{R}}\exp\bigl(-\pi(x+z)^2\bigr)dx=1 \tag{9.10}$$

がすべての $z\in\mathbf{C}$ について成り立つことを示そう．実変

数 u と t を取り $z=u+it$ とすると

$$\begin{aligned}\exp\bigl(-\pi(x+u+it)^2\bigr)\\ =\exp\bigl(-\pi(x+u)^2\bigr)\exp\bigl(-2\pi(x+u)it\bigr)\exp(\pi t^2)\end{aligned} \tag{9.11}$$

であるから，絶対値を取ってみれば，(9.10) の積分は z がある有界集合に属するときに一様に収束し，従って z の正則関数を定める．しかも $z\in\mathbf{R}$ ならば始めに言った公式により積分の値は 1 である．$\mathbf{C}$ 上の正則関数は $\mathbf{R}$ 上の値できまってしまうから，(9.10) がすべての $z\in\mathbf{C}$ に対して成り立つ．そこで (9.11) で (9.10) の積分を書き直してそれに $\exp(-\pi t^2)$ を掛ければ $x+u$ を x とおいて

$$\int_{\mathbf{R}}\exp(-\pi x^2)\mathbf{e}(-xt)dx=\exp(-\pi t^2)$$

を得る．それが求める結果である．(証終)

この定理と Poisson 和公式の応用をひとつ書く．まず $z\in H, u\in\mathbf{C}, s\in\mathbf{R}$ を取り $f(x)=\mathbf{e}\bigl(2^{-1}x^2z+x(u+s)\bigr)$ とおいて $\hat{f}$ を計算すると

$$\hat{f}(t)=(-iz)^{-1/2}\mathbf{e}\bigl(-(2z)^{-1}(t-u-s)^2\bigr)$$

となる．これは読者の演習問題としておく．(ヒント：$z=y, 0<y\in\mathbf{R}$ の場合をやればよい．) そこでこの f と $\hat{f}$ に Poisson 和公式を $n=1$ で適用すると (7.5) が得られ，$u=0$ とおけば (7.9) となる．すでにのべたように，これは ϑ_ν のあるものについて Jacobi が得ていたが，そ

れを Poisson はいま説明したようなやり方で Jacobi よりはだいぶ早くその式を得ていた.

ここに数学史上の面白い現象がある．Fourier は Jacobi よりは三十歳以上の年長であって，お互にどんな数学をやっているかは承知していたが，共によく理解してはいなかったらしい．F は Jacobi や Abel が楕円関数などに興味を持って，Fourier の立場からはより重要な熱伝導のような物理学に有用な Fourier 級数を研究しないことを残念に思っていた．一方 J は数学の目的は F の言うような実用性にあるのでなく，数学それ自体にあって，いわゆる「人間精神の名誉」のためのものであるとした．

Poisson は Fourier よりは十歳以上若く，彼等の関係は私はよく知らないが，Fourier が Poisson の結果を知っていたことはまず確実であろう．しかしそれが Jacobi のテータの変換公式であることは知らなかったと思われる．一方，その頃 Jacobi はまだ若くてテータ関数の一般論を構成していなかったであろうが，もし彼が Poisson のテクニクを知ったとしたら，それは Jacobi をしてテータ関数の性格に眼を開かしめるものがあったのではないか．そこに歴史の偶然性と皮肉がある．彼等の数学はひとつの興味深い公式によって表わされる点で接していたのであるが，彼等はそのことを知らず，Fourier 級数や Poisson 和公式が Jacobi の考えていたようなものを含めた「純粋数学」ではなはだ重要であることを理解したのは次の世代の人達であった．

10. Fourier 変換からメタプレクティック群へ

定理 9.2 にのべたように Fourier 変換 $f \mapsto \hat{f}$ はユニタリー作用素であった．その一方，第 9 章の終りに説明したように具体的な関数の Fourier 変換を考えて Poisson の和公式を適用すると (7.5) あるいは (7.9) という $(-iz)^{1/2}$ を含む式が得られる．さらに (7.9) は (7.10) の形に拡張され，そこでも $j_\gamma(z)^{1/2}$ というあいまいな因子が現れる．これは (7.3) のテータ関数についてばかりでなく n 次元の (8.3) の場合にも同様な現象がある．そこで本題に入る前に (7.5), (7.9), (7.10) の n 次元の場合を書いておこう．

A を $\mathbf{Z}$ または $\mathbf{R}$ として

$$Sp_n(A) = \{\alpha \in SL_{2n}(A) \mid {}^t\alpha\iota\alpha = \iota\},$$

$$\iota = \iota_n = \begin{bmatrix} 0 & -1_n \\ 1_n & 0 \end{bmatrix}$$

とおき，これを A 上 n 次の**シンプレクティック群** (symplectic group) と呼ぶ．$Sp_n(\mathbf{Z})$ は $Sp_n(\mathbf{R})$ の部分群である．$n=1$ ならば $Sp_1(\mathbf{Z}) = SL_2(\mathbf{Z}), Sp_1(\mathbf{R}) = SL_2(\mathbf{R})$ がわかる．(8.1) で定義した空間 H_n を考えて，$z \in H_n$

ちくま学芸文庫

数学をいかに使うか

志村五郎

筑摩書房

ちくま学芸文庫

数学をいかに教えるか

志村五郎

筑摩書房

附録 2. ふしぎにいのちながらえて

私は病院のベッドで夜を過ごすという経験をしたことが三回ある．すべてプリンストンの病院である．最初の時は1990年の2月で，それまではそこの病院や日本の病院に行ってそこの医者に診てもらうことはあったが，いわゆる入院をしたことはなかった．

大腸に腫瘍ができて悪性のものではなかったが，その部分を30センチばかり切除した方がよいと医者が言うのでその意見に従い，入院してその手術を受けた．この時はあらかじめ日取りがきまっていて，それなりの用意をして行ったからあわてることもなかったが，やはりはじめてのことでいろいろ面白い経験をした．

はじめの何日間かはふたり部屋だったか三人部屋だったか，隣りにいた男はどうも頭がおかしかった．病院の食事は前もって注文表を渡されて，その中の自分の好むものに印をつけるのであるが，この男はつけられる所全部に印をつけ，それが来ると半分ぐらい食べて食べ残しをどこかにかくしておき，夜中に食べるということをやっていた．そのほかにも変な行動があって，私は正直に言って同室にいることがこわかったのである．あとでひとり部屋に移った時はほっとした．

その男の所に親族のような人が見舞に来ることもなかったが，ひとり，親族ではなく，どういう関係かわからなかったが，その男の世話をしていたらしい五十歳前後の女が来ることがあった．そして男が何かの検査でそこにいなかった時，男の食べ残していった物を調べて，それを自分が少し食べてみたりしていた．そして「ここの食事はなかなかよい．私はよその病院で働いていたことがあるからそれがわかる」などと言っていた．私の方は手術の前後で何も食べさせられていなかったからどうでもよかったが，のちに病院の食事は重要な問題であることを知るようになった．しかしそれはずっとあとの話である．

手術そのものは四時間ぐらいだったと思う．もちろん全身麻酔で，麻酔が始まったと思うと瞬間的に意識がなくなり，完全に無の世界に入ってしまった．何か夢でも見るかと思っていたがそれもなかった．麻酔から覚める時も除々にではなく急に覚めて，猛烈な痛みで覚まされた感じであった．頼めば痛み止めの注射を何度でもしてくれる．それがどの程度きいたか，今となってははっきりしない．

手術のあと医者の回診がある．インターンを四人ばかり引き連れてやって来て，私のブリーフの前を引っ張ってみてずい分ゆるいので「やせましたねえ」と言うから私が「いやこの方がいいんです」と答えてやると皆げらげら笑う．実は私はゆるい方が好きでそうしているのであるがそれは向うにはわからない．ひとついやだったのは，私は寒