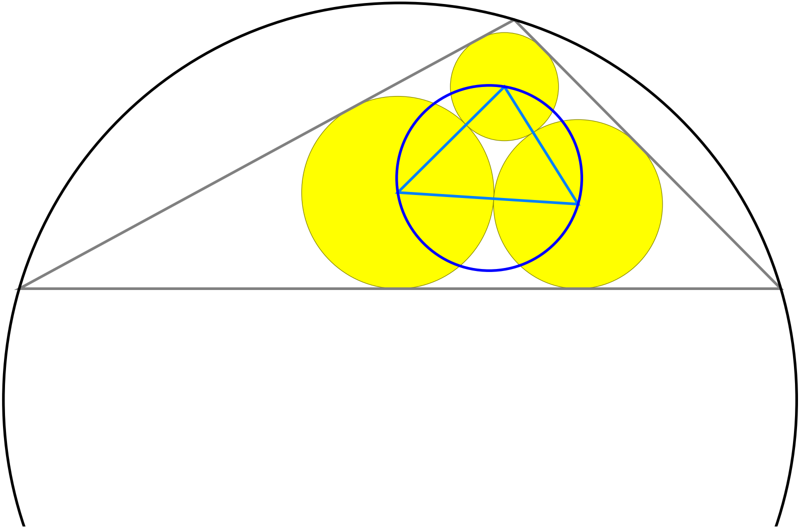
研究紹介
ユークリッド幾何と数式処理

奈良女子大学 生活環境学部
情報衣環境学科 生活情報通信科学コース
鴨 浩靖

マルファッチの三角形の外接円と元の三角形の外接円



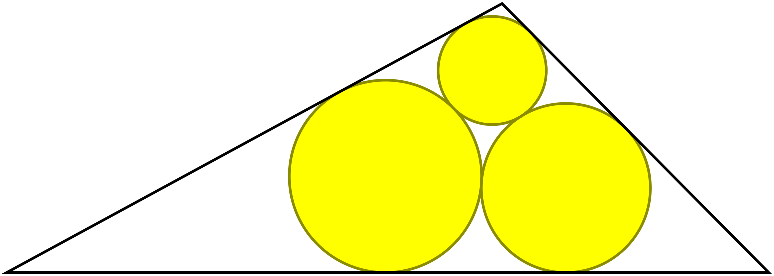
動機と背景

- ユークリッド幾何には、原理的に解けることは簡単にわかるがその方法で実際に解くためには膨大な計算が必要になるため、誰も手をつけていない問題が多数ある。
- 今は、高速な計算機と進んだ計算機代数がある。

⇒ やってみよう

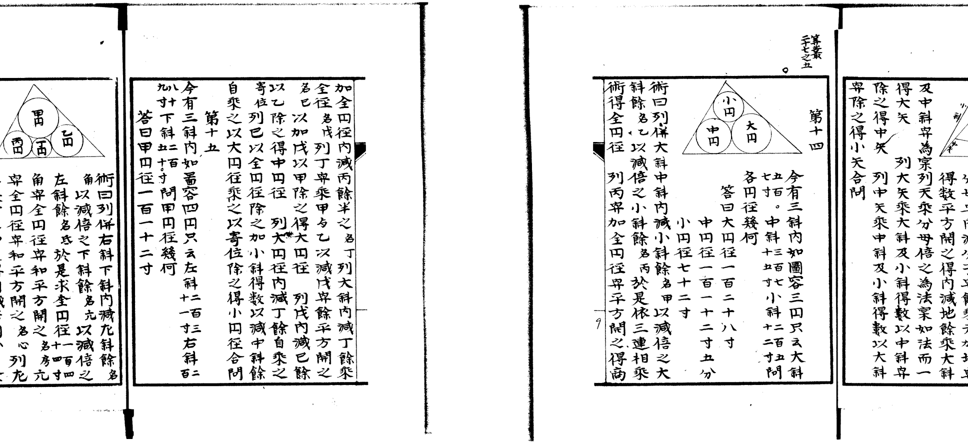
マルファッチの問題（三斜三円術）

計算せよ、または作図せよ。



- 安島直円 著，編者不詳：南山子三円術（刊行年不明）.
- 安島直円 著，日下部誠 編：不朽算法 (1799).
- Gianfrancesco Malfatti: *Memoria sopra un problema sterotomico.* Memorie di Matematica e di Fisica dalla Societa Italiana delle Scienze, **10-1** 235–244, 1803.

『不朽算法』（岡本写）より引用


算叢 二十七之五

第十四

今有三斜内如圖容三円只云大斜五百七寸。中斜三百七十五寸小斜二百五十二寸問各円径幾何

答曰大円径一百二十八寸
中円径一百一十二寸五分
小円径七十二寸

術曰列併大斜中斜内減小斜餘 名甲 以減倍之大斜餘 名乙 以減倍之小斜餘 名丙 於是依三連相乗術得全円径 列丙巾加全円径巾平方開之得商

加全円径内減丙餘半之 名丁 列大斜内減丁餘乗全径 名戊 列丁巾乗甲与乙以減戊巾餘平方開之名巳 以加戊以甲除之得大円径 列戊内減巳餘以乙除之得中円径 列大円径内減丁餘自乗之寄位 列巳以全円径除之加小斜得数以減中斜餘自乗之以大円径乗之以寄位除之得小円径合問

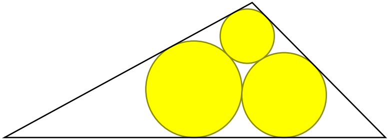
第十五

今有三斜内如圖容四円只云左斜二百三十一寸右斜二百八十九寸下斜二百五十寸問甲円径幾何

答曰甲円径一百一十二寸

和算資料データベース レコード番号:4100001865 ©東北大学図書館

マルファッチの円の半径



$$r_1 = \frac{r(1+\tan(B/4))(1+\tan(C/4))}{2(1+\tan(A/4))}$$
$$r_2 = \frac{r(1+\tan(A/4))(1+\tan(C/4))}{2(1+\tan(B/4))}$$
$$r_3 = \frac{r(1+\tan(A/4))(1+\tan(B/4))}{2(1+\tan(C/4))}$$

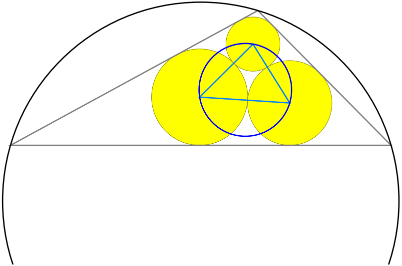
r は内接円半径。

マルファッチの円の半径（つづき）

$$r_1 = \frac{r(1+\tan(B/4))(1+\tan(C/4))}{2(1+\tan(A/4))}, \qquad r_2 = \ldots, \qquad r_3 = \ldots$$

- E. B. Seitz: Solution to problem 186. The Mathematical Visitor, **1** p.190, 1881.
- Adolphe Desboves, *Questions de trigonométrie rectiligne*, Ch. Delagrave, Paris, 1884.
- J. Derousseau, *Historique et résolution analytique complète du problème de Malfatti"*, Mémoires de la Société royale des sciences de Liège", **2-18** pp.1–52, 1895.
- H. Lob and H. W. Richmond, *On the Solution of Malfatti's Problem for a Triangle.* Proc. London Math. Soc. **2** pp.287–304, 1930.

マルファッチの三角形の外接円半径



$$R' = \frac{(r_1 + r_2)(r_1 + r_3)(r_2 + r_3)}{4\sqrt{r_1 r_2 r_3 (r_1 + r_2 + r_3)}}$$

内接円半径と外接円半径の関係

$$
\begin{aligned}
r &= 4R\sin(A/2)\sin(B/2)\sin(C/2) \\
&= \frac{32R\tan(A/4)\tan(B/4)\tan(C/4)}{(1+\tan^2(A/4))(1+\tan^2(B/4))(1+\tan^2(C/4))}
\end{aligned}
$$

マルファッチの三角形の外接円半径の元の三角形の外接円半径に対する比

$$\frac{R'}{R} = \frac{4xyz(x^2+y^2+2x+2y+2)(x^2+z^2+2x+2z+2)(y^2+z^2+2y+2z+2)}{(x+1)(y+1)(z+1)(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)\sqrt{Q}}$$

ただし、

$$x = \tan\frac{A}{4}, \qquad y = \tan\frac{B}{4}, \qquad z = \tan\frac{C}{4},$$
$$Q = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + 2x^2y + 2xy^2 + 2x^2z + 2xz^2 + 2y^2z + 2yz^2 + 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4xy + 4xz + 4yz + 4x + 4y + 4z + 3$$

外接円半径の比の最大最小問題

$$f(\xi,\eta,\zeta) = \frac{4xyz(x^2+y^2+2x+2y+2)(x^2+z^2+2x+2z+2)(y^2+z^2+2y+2z+2)}{(x+1)(y+1)(z+1)(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)\sqrt{Q}}$$

$$g(\xi,\eta,\zeta) = \xi+\eta+\zeta-\frac{\pi}{4}$$

ただし、

$$x=\tan\xi, \qquad y=\tan\eta, \qquad z=\tan\zeta,$$

$$Q = x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2+2x^2y+2xy^2+2x^2z+2xz^2+2y^2z+2yz^2 + 2x^2+2y^2+2z^2+4xy+4xz+4yz+4x+4y+4z+3$$

とおいて、
$f(\xi,\eta,\zeta)$ の最大最小問題を
拘束条件 $g(\xi.\eta,\zeta)=0$ の下、
$0<\xi<\pi/4, \quad 0<\eta<\pi/4, \quad 0<\zeta<\pi/4$ の範囲で解くとよい。

外接円半径の比の最大最小問題（つづき）

ラグランジュの未定乗数法が使える典型的な例。
$\xi, \eta, \zeta, \lambda$ についての連立方程式

$$\begin{cases} f_\xi(\xi,\eta,\zeta) - \lambda g_\xi(\xi,\eta,\zeta) = 0 \\ f_\eta(\xi,\eta,\zeta) - \lambda g_\eta(\xi,\eta,\zeta) = 0 \\ f_\zeta(\xi,\eta,\zeta) - \lambda g_\zeta(\xi,\eta,\zeta) = 0 \\ g(\xi,\eta,\zeta) = 0 \end{cases}$$

の解が、極値を与える点の候補。

ところが、……

ところが、

$$f_\xi(\xi,\eta,\zeta) = \frac{4yz(y^2+z^2+2y+2z+2)U}{(x+1)^2(y+1)(z+1)(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)Q^{3/2}}$$
$$f_\eta(\xi,\eta,\zeta) = \frac{4xz(x^2+z^2+2x+2z+2)V}{(x+1)(y+1)^2(z+1)(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)Q^{3/2}}$$
$$f_\zeta(\xi,\eta,\zeta) = \frac{4xy(x^2+y^2+2x+2y+2)W}{(x+1)(y+1)(z+1)^2(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)Q^{3/2}}$$

ただし、

$$x = \tan\xi, \qquad y = \tan\eta, \qquad z = \tan\zeta,$$
$$\begin{aligned} Q = \; & x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + 2x^2y + 2xy^2 + 2x^2z + 2xz^2 + 2y^2z + 2yz^2 \\ & + 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4xy + 4xz + 4yz + 4x + 4y + 4z + 3, \end{aligned}$$

……

$$
\begin{aligned}
U = {} & x^9y^2 - x^7y^4 + x^9z^2 - 3x^5y^4z^2 - x^7z^4 - 3x^5y^2z^4 - 2x^3y^4z^4 + 2x^9y + 5x^8y^2 - 4x^7y^3 \\
& - 5x^6y^4 + 2x^9z - 6x^5y^4z + 5x^8z^2 - 3x^6y^2z^2 - 12x^5y^3z^2 - 8x^4y^4z^2 - 4x^7z^3 \\
& - 12x^5y^2z^3 - 8x^3y^4z^3 - 5x^6z^4 - 6x^5yz^4 - 8x^4y^2z^4 - 8x^3y^3z^4 - x^2y^4z^4 + 2x^9 \\
& + 10x^8y + 6x^7y^2 - 20x^6y^3 - 12x^5y^4 + 10x^8z - 6x^6y^2z - 24x^5y^3z - 16x^4y^4z + 6x^7z^2 \\
& - 6x^6yz^2 - 42x^5y^2z^2 - 32x^4y^3z^2 - 18x^3y^4z^2 - 20x^6z^3 - 24x^5yz^3 - 32x^4y^2z^3 \\
& - 32x^3y^3z^3 - 4x^2y^4z^3 - 12x^5z^4 - 16x^4yz^4 - 18x^3y^2z^4 - 4x^2y^3z^4 + 10x^8 + 20x^7y \\
& - 9x^6y^2 - 48x^5y^3 - 13x^4y^4 + 20x^7z - 12x^6yz - 60x^5y^2z - 64x^4y^3z - 20x^3y^4z \\
& - 9x^6z^2 - 60x^5yz^2 - 87x^4y^2z^2 - 72x^3y^3z^2 - 4x^2y^4z^2 - 48x^5z^3 - 64x^4yz^3 \\
& - 72x^3y^2z^3 - 16x^2y^3z^3 - 13x^4z^4 - 20x^3yz^4 - 4x^2y^2z^4 + y^4z^4 + 22x^7 + 22x^6y \\
& - 35x^5y^2 - 52x^4y^3 - 3x^3y^4 + 22x^6z - 72x^5yz - 110x^4y^2z - 80x^3y^3z - 35x^5z^2 \\
& - 110x^4yz^2 - 108x^3y^2z^2 - 16x^2y^3z^2 + 5xy^4z^2 - 52x^4z^3 - 80x^3yz^3 - 16x^2y^2z^3 \\
& + 4y^4z^3 - 3x^3z^4 + 5xy^2z^4 + 4y^3z^4 + 35x^6 + 26x^5y - 11x^4y^2 - 12x^3y^3 + 10x^2y^4 \\
& + 26x^5z - 92x^4yz - 72x^3y^2z + 10xy^4z - 11x^4z^2 - 72x^3yz^2 + 27x^2y^2z^2 + 20xy^3z^2 \\
& + 8y^4z^2 - 12x^3z^3 + 20xy^2z^3 + 16y^3z^3 + 10x^2z^4 + 10xyz^4 + 8y^2z^4 + 62x^5 + 82x^4y \\
& + 72x^3y^2 + 40x^2y^3 + 10xy^4 + 82x^4z + 16x^3yz + 86x^2y^2z + 40xy^3z + 8y^4z + 72x^3z^2 \\
& + 86x^2yz^2 + 78xy^2z^2 + 32y^3z^2 + 40x^2z^3 + 40xyz^3 + 32y^2z^3 + 10xz^4 + 8yz^4 \\
& + 115x^4 + 168x^3y + 133x^2y^2 + 40xy^3 + 4y^4 + 168x^3z + 172x^2yz + 116xy^2z \\
& + 32y^3z + 133x^2z^2 + 116xyz^2 + 63y^2z^2 + 40xz^3 + 32yz^3 + 4z^4 + 152x^3 + 186x^2y \\
& + 92xy^2 + 16y^3 + 186x^2z + 152xyz + 62y^2z + 92xz^2 + 62yz^2 + 16z^3 + 124x^2 \\
& + 104xy + 30y^2 + 104xz + 60yz + 30z^2 + 56x + 28y + 28z + 12,
\end{aligned}
$$

……

$$
\begin{aligned}
V = \; & -x^4y^7 + x^2y^9 - 3x^4y^5z^2 + y^9z^2 - 2x^4y^3z^4 - 3x^2y^5z^4 - y^7z^4 - 5x^4y^6 - 4x^3y^7 \\
& + 5x^2y^8 + 2xy^9 - 6x^4y^5z + 2y^9z - 8x^4y^4z^2 - 12x^3y^5z^2 - 3x^2y^6z^2 + 5y^8z^2 - 8x^4y^3z^3 \\
& - 12x^2y^5z^3 - 4y^7z^3 - x^4y^2z^4 - 8x^3y^3z^4 - 8x^2y^4z^4 - 6xy^5z^4 - 5y^6z^4 - 12x^4y^5 \\
& - 20x^3y^6 + 6x^2y^7 + 10xy^8 + 2y^9 - 16x^4y^4z - 24x^3y^5z - 6x^2y^6z + 10y^8z - 18x^4y^3z^2 \\
& - 32x^3y^4z^2 - 42x^2y^5z^2 - 6xy^6z^2 + 6y^7z^2 - 4x^4y^2z^3 - 32x^3y^3z^3 - 32x^2y^4z^3 \\
& - 24xy^5z^3 - 20y^6z^3 - 4x^3y^2z^4 - 18x^2y^3z^4 - 16xy^4z^4 - 12y^5z^4 - 13x^4y^4 - 48x^3y^5 \\
& - 9x^2y^6 + 20xy^7 + 10y^8 - 20x^4y^3z - 64x^3y^4z - 60x^2y^5z - 12xy^6z + 20y^7z \\
& - 4x^4y^2z^2 - 72x^3y^3z^2 - 87x^2y^4z^2 - 60xy^5z^2 - 9y^6z^2 - 16x^3y^2z^3 - 72x^2y^3z^3 \\
& - 64xy^4z^3 - 48y^5z^3 + x^4z^4 - 4x^2y^2z^4 - 20xy^3z^4 - 13y^4z^4 - 3x^4y^3 - 52x^3y^4 \\
& - 35x^2y^5 + 22xy^6 + 22y^7 - 80x^3y^3z - 110x^2y^4z - 72xy^5z + 22y^6z + 5x^4yz^2 \\
& - 16x^3y^2z^2 - 108x^2y^3z^2 - 110xy^4z^2 - 35y^5z^2 + 4x^4z^3 - 16x^2y^2z^3 - 80xy^3z^3 \\
& - 52y^4z^3 + 4x^3z^4 + 5x^2yz^4 - 3y^3z^4 + 10x^4y^2 - 12x^3y^3 - 11x^2y^4 + 26xy^5 + 35y^6 \\
& + 10x^4yz - 72x^2y^3z - 92xy^4z + 26y^5z + 8x^4z^2 + 20x^3yz^2 + 27x^2y^2z^2 - 72xy^3z^2 \\
& - 11y^4z^2 + 16x^3z^3 + 20x^2yz^3 - 12y^3z^3 + 8x^2z^4 + 10xyz^4 + 10y^2z^4 + 10x^4y \\
& + 40x^3y^2 + 72x^2y^3 + 82xy^4 + 62y^5 + 8x^4z + 40x^3yz + 86x^2y^2z + 16xy^3z + 82y^4z \\
& + 32x^3z^2 + 78x^2yz^2 + 86xy^2z^2 + 72y^3z^2 + 32x^2z^3 + 40xyz^3 + 40y^2z^3 + 8xz^4 \\
& + 10yz^4 + 4x^4 + 40x^3y + 133x^2y^2 + 168xy^3 + 115y^4 + 32x^3z + 116x^2yz + 172xy^2z \\
& + 168y^3z + 63x^2z^2 + 116xyz^2 + 133y^2z^2 + 32xz^3 + 40yz^3 + 4z^4 + 16x^3 + 92x^2y \\
& + 186xy^2 + 152y^3 + 62x^2z + 152xyz + 186y^2z + 62xz^2 + 92yz^2 + 16z^3 + 30x^2 \\
& + 104xy + 124y^2 + 60xz + 104yz + 30z^2 + 28x + 56y + 28z + 12,
\end{aligned}
$$

……

$$
\begin{aligned}
W = \; & -2x^4y^4z^3 - 3x^4y^2z^5 - 3x^2y^4z^5 - x^4z^7 - y^4z^7 + x^2z^9 + y^2z^9 - x^4y^4z^2 - 8x^4y^3z^3 \\
& - 8x^3y^4z^3 - 8x^4y^2z^4 - 8x^2y^4z^4 - 6x^4yz^5 - 12x^3y^2z^5 - 12x^2y^3z^5 - 6xy^4z^5 - 5x^4z^6 \\
& - 3x^2y^2z^6 - 5y^4z^6 - 4x^3z^7 - 4y^3z^7 + 5x^2z^8 + 5y^2z^8 + 2xz^9 + 2yz^9 - 4x^4y^3z^2 \\
& - 4x^3y^4z^2 - 18x^4y^2z^3 - 32x^3y^3z^3 - 18x^2y^4z^3 - 16x^4yz^4 - 32x^3y^2z^4 - 32x^2y^3z^4 \\
& - 16xy^4z^4 - 12x^4z^5 - 24x^3yz^5 - 42x^2y^2z^5 - 24xy^3z^5 - 12y^4z^5 - 20x^3z^6 - 6x^2yz^6 \\
& - 6xy^2z^6 - 20y^3z^6 + 6x^2z^7 + 6y^2z^7 + 10xz^8 + 10yz^8 + 2z^9 + x^4y^4 - 4x^4y^2z^2 \\
& - 16x^3y^3z^2 - 4x^2y^4z^2 - 20x^4yz^3 - 72x^3y^2z^3 - 72x^2y^3z^3 - 20xy^4z^3 - 13x^4z^4 \\
& - 64x^3yz^4 - 87x^2y^2z^4 - 64xy^3z^4 - 13y^4z^4 - 48x^3z^5 - 60x^2yz^5 - 60xy^2z^5 - 48y^3z^5 \\
& - 9x^2z^6 - 12xyz^6 - 9y^2z^6 + 20xz^7 + 20yz^7 + 10z^8 + 4x^4y^3 + 4x^3y^4 + 5x^4y^2z \\
& + 5x^2y^4z - 16x^3y^2z^2 - 16x^2y^3z^2 - 3x^4z^3 - 80x^3yz^3 - 108x^2y^2z^3 - 80xy^3z^3 - 3y^4z^3 \\
& - 52x^3z^4 - 110x^2yz^4 - 110xy^2z^4 - 52y^3z^4 - 35x^2z^5 - 72xyz^5 - 35y^2z^5 + 22xz^6 \\
& + 22yz^6 + 22z^7 + 8x^4y^2 + 16x^3y^3 + 8x^2y^4 + 10x^4yz + 20x^3y^2z + 20x^2y^3z + 10xy^4z \\
& + 10x^4z^2 + 27x^2y^2z^2 + 10y^4z^2 - 12x^3z^3 - 72x^2yz^3 - 72xy^2z^3 - 12y^3z^3 - 11x^2z^4 \\
& - 92xyz^4 - 11y^2z^4 + 26xz^5 + 26yz^5 + 35z^6 + 8x^4y + 32x^3y^2 + 32x^2y^3 + 8xy^4 \\
& + 10x^4z + 40x^3yz + 78x^2y^2z + 40xy^3z + 10y^4z + 40x^3z^2 + 86x^2yz^2 + 86xy^2z^2 \\
& + 40y^3z^2 + 72x^2z^3 + 16xyz^3 + 72y^2z^3 + 82xz^4 + 82yz^4 + 62z^5 + 4x^4 + 32x^3y \\
& + 63x^2y^2 + 32xy^3 + 4y^4 + 40x^3z + 116x^2yz + 116xy^2z + 40y^3z + 133x^2z^2 \\
& + 172xyz^2 + 133y^2z^2 + 168xz^3 + 168yz^3 + 115z^4 + 16x^3 + 62x^2y + 62xy^2 + 16y^3 \\
& + 92x^2z + 152xyz + 92y^2z + 186xz^2 + 186yz^2 + 152z^3 + 30x^2 + 60xy + 30y^2 \\
& + 104xz + 104yz + 124z^2 + 28x + 28y + 56z + 12.
\end{aligned}
$$

多項式連立方程式への変形

$x, y, z, \bar{\lambda}, \tau$ についての連立方程式

$$\begin{cases} 4yz(y^2+z^2+2y+2z+2)U - \bar{\lambda}(x+1) = 0 \\ 4xz(x^2+z^2+2x+2z+2)V - \bar{\lambda}(y+1) = 0 \\ 4xy(x^2+y^2+2x+2y+2)W - \bar{\lambda}(z+1) = 0 \\ xyz - xy - xz - yz - x - y - z + 1 = 0 \\ (x+1)(y+1)(z+1)(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)Q\tau - 1 = 0 \end{cases} \qquad (\clubsuit)$$

を解くとよい。

手計算でこの連立方程式を解くのは無理！

近藤・齋藤・竹島の線形写像法

グレブナー基底を応用して多項式連立方程式の実数解を任意の精度で求めることのできるアルゴリズム。
これを数式処理システムに載せれば、解ける。

近藤・齋藤・竹島の線形写像法の実装

- Risa/Asir で実装した。
- 300 行あまり。
- その他、いろいろと工夫をした。

連立方程式を解く—(♣) の解

近藤・齋藤・竹島の線形写像法で (♣) を解く。
実数解は 11 組。
そのうち、$0 < x < 1$ かつ $0 < y < 1$ かつ $0 < z < 1$ をみたすものは 1 組。

$$
\begin{aligned}
x^2 - 4x + 1 = 0, &\quad \frac{294613252731}{1099511627776} < x < \frac{589226505463}{2199023255552},\\
y^2 - 4y + 1 = 0, &\quad \frac{294613252731}{1099511627776} < y < \frac{589226505463}{2199023255552},\\
z^2 - 4z + 1 = 0, &\quad \frac{294613252731}{1099511627776} < z < \frac{589226505463}{2199023255552}.
\end{aligned}
$$

すなわち、$(x, y, z) = (2 - \sqrt{3},\ 2 - \sqrt{3},\ 2 - \sqrt{3})$.

最大最小問題の解

極値を与える点の候補は $(x, y, z) = (2 - \sqrt{3},\ 2 - \sqrt{3},\ 2 - \sqrt{3})$ のみ。
すなわち、$(\xi, \eta, \zeta) = (\pi/12, \pi/12, \pi/12)$.

$(A, B, C) = (60^\circ, 60^\circ, 60^\circ)$ 正三角形。

そのとき、$f(\xi, \eta, \zeta) = (\sqrt{3} - 1)/2$.

$f(0, \eta, \zeta) = f(\xi, 0, \zeta) = f(\xi, \eta, 0) = 0$.

すなわち、境界では常に $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$.

R'/R の動く範囲は $(0, (\sqrt{3} - 1)/2]$ である。

正三角形のときに最大値をとる。

マルファッチの問題

三角形 ABC に対して以下をみたす三つの円 $A'(r_1), B'(r_2), C'(r_3)$ を求めよ。

- 円 $A'(r_1), B'(r_2), C'(r_3)$ は三角形 ABC に内部にある。
-
  - 円 $A'(r_1)$ は $\angle A$ に内接する。
  - 円 $B'(r_2)$ は $\angle B$ に内接する。
  - 円 $C'(r_3)$ は $\angle C$ に内接する。
- 円 $A'(r_1), B'(r_2), C'(r_3)$ は互いに外接する。

解は 1 組。

マルファッチの問題の一般化 1

三角形 ABC に対して以下をみたす三つの円 $A'(r_1)$, $B'(r_2)$, $C'(r_3)$ を求めよ。

- （削除）
-
  - 円 $A'(r_1)$ は $\angle A$ に内接する。
  - 円 $B'(r_2)$ は $\angle B$ に内接する。
  - 円 $C'(r_3)$ は $\angle C$ に内接する。
- 円 $A'(r_1)$, $B'(r_2)$, $C'(r_3)$ は互いに外接する。

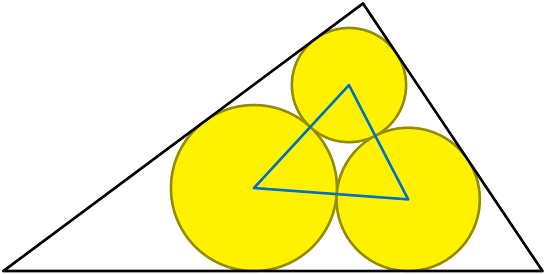
解は 8 組。

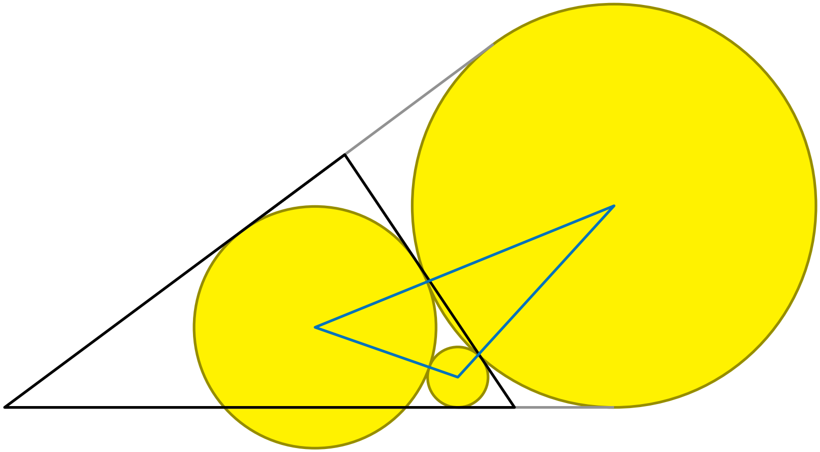
マルファッチの円の一般化２

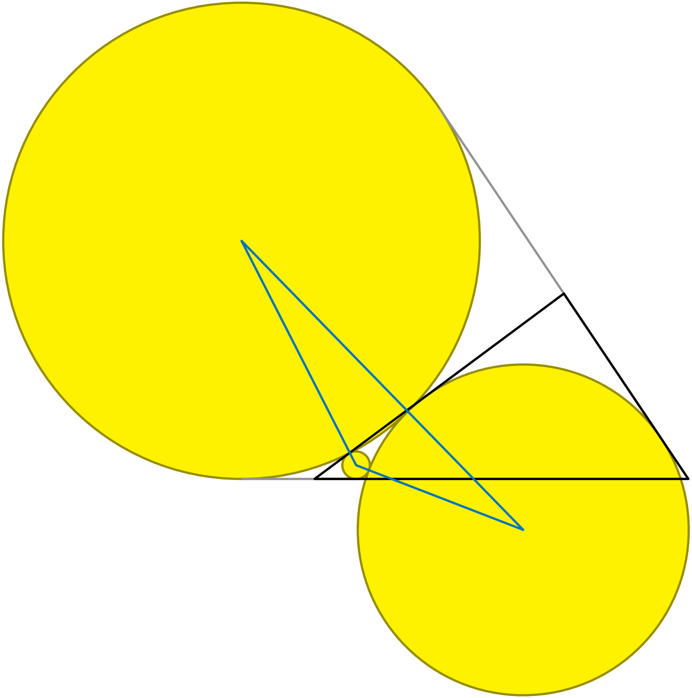
三角形 ABC に対して以下をみたす三つの円 $A'(r_1)$, $B'(r_2)$, $C'(r_3)$ を求めよ。

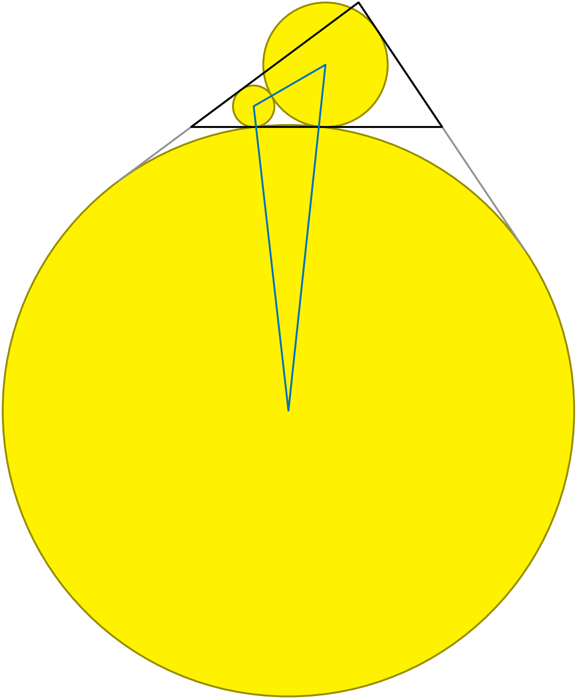
- （削除）
-
  - 円 $A'(r_1)$ は直線 AB と直線 AC に接する。
  - 円 $B'(r_2)$ は直線 BC と直線 BA に接する。
  - 円 $C'(r_3)$ は直線 CA と直線 CB に接する。
- 円 $A'(r_1)$, $B'(r_2)$, $C'(r_3)$ は互いに外接する。

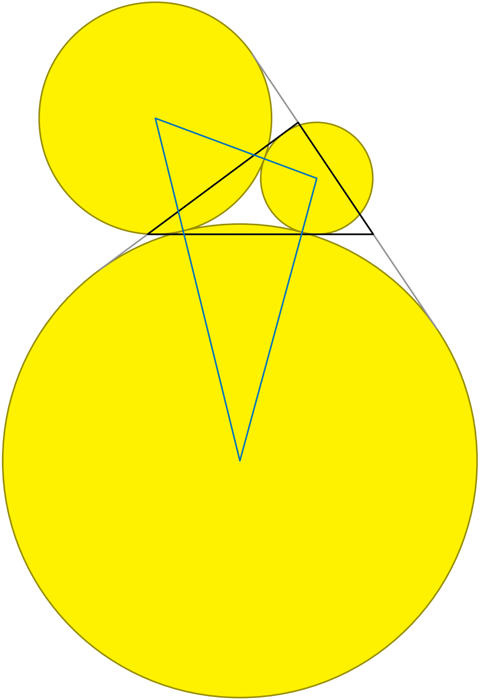
解は 32 組。

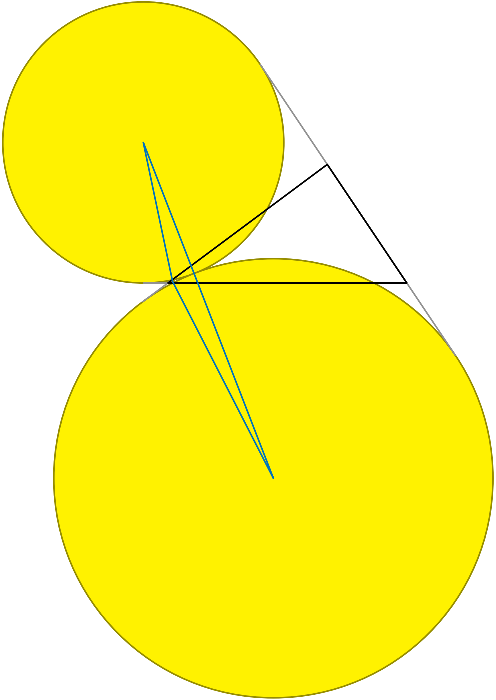


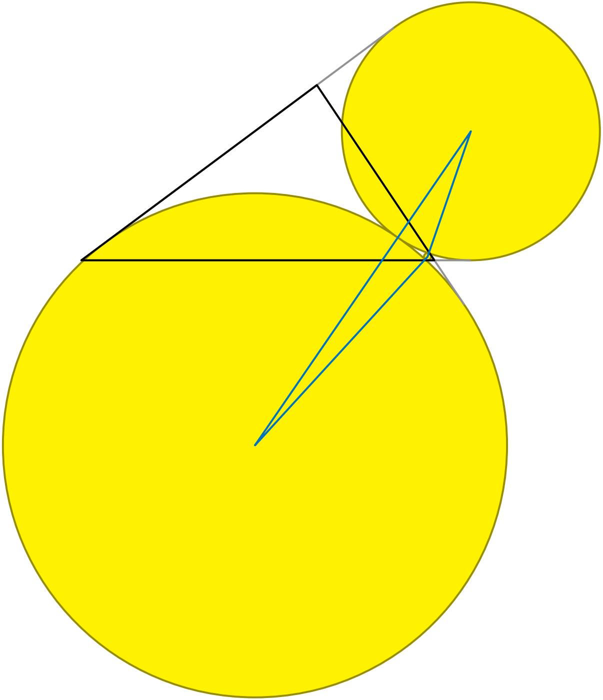


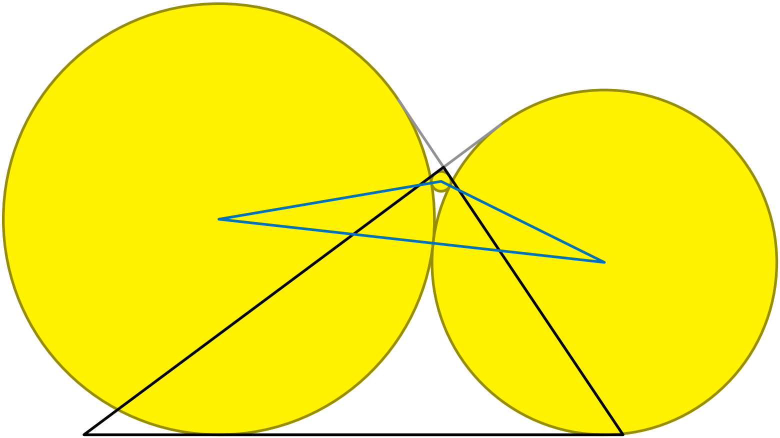


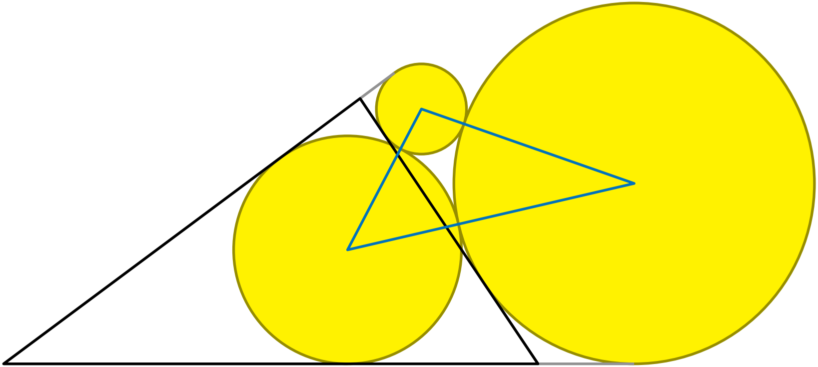


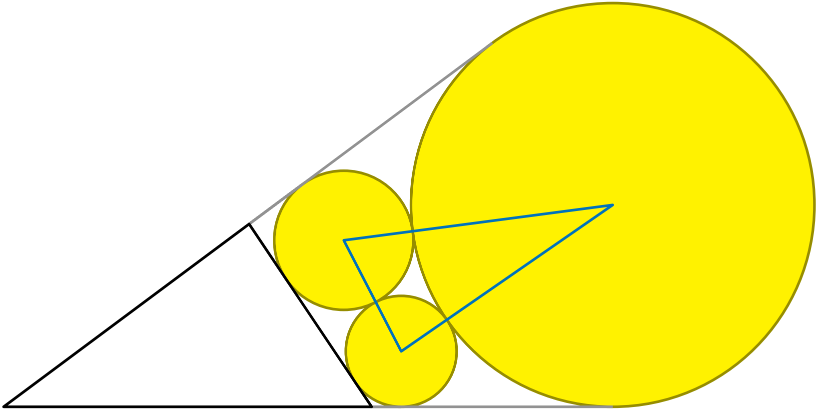


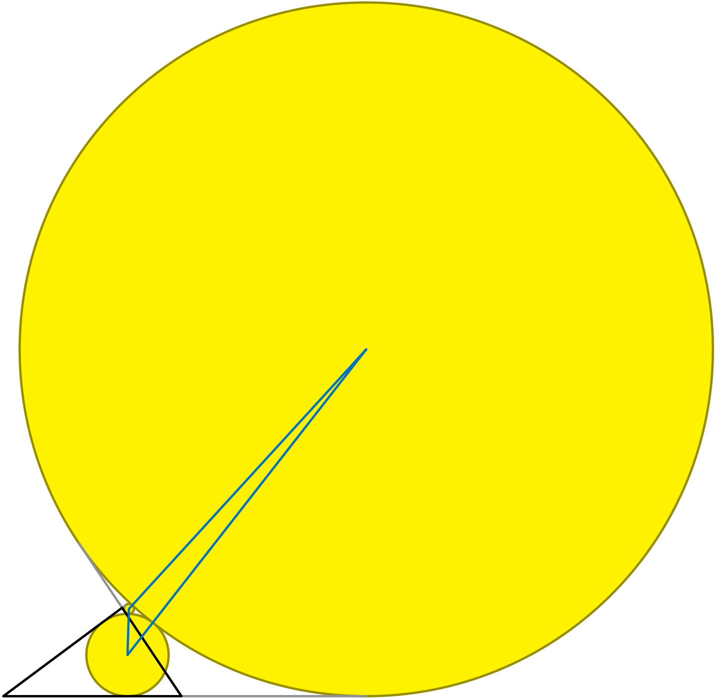


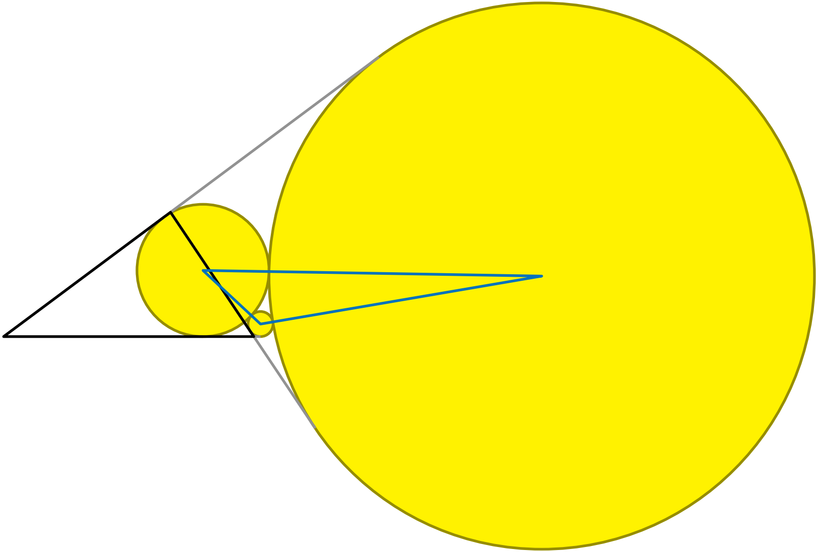


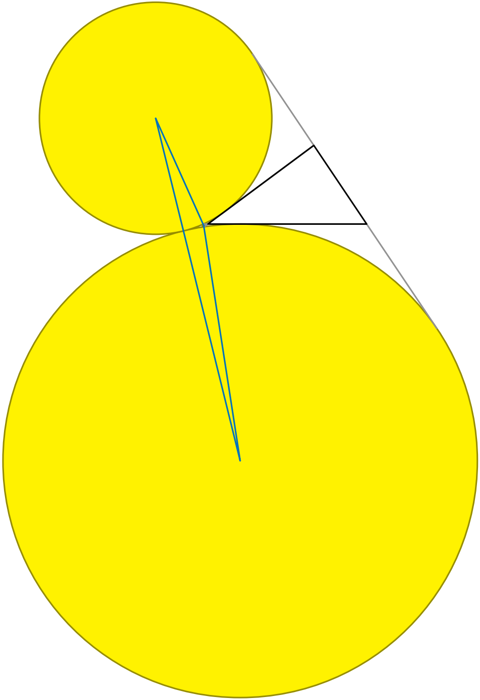


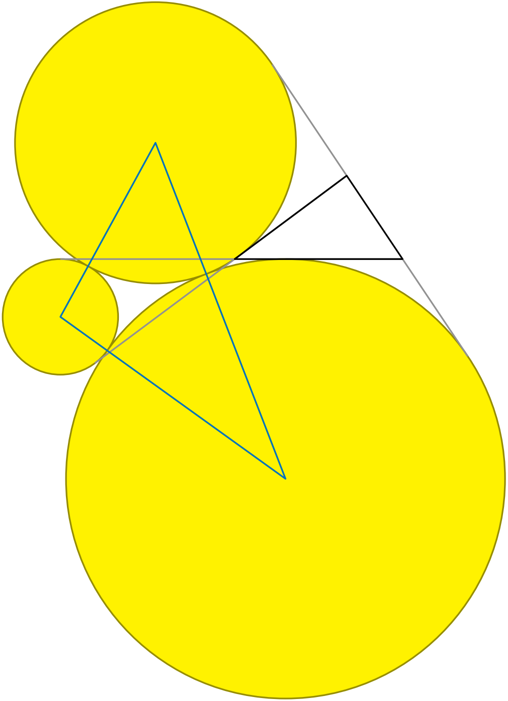


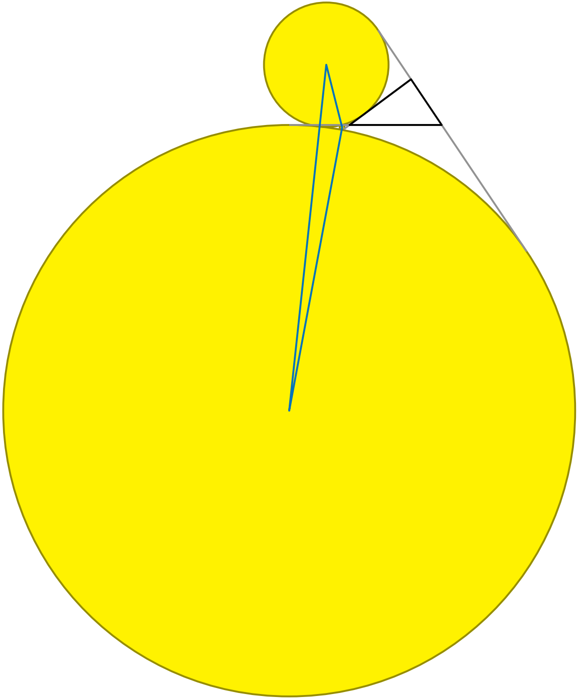


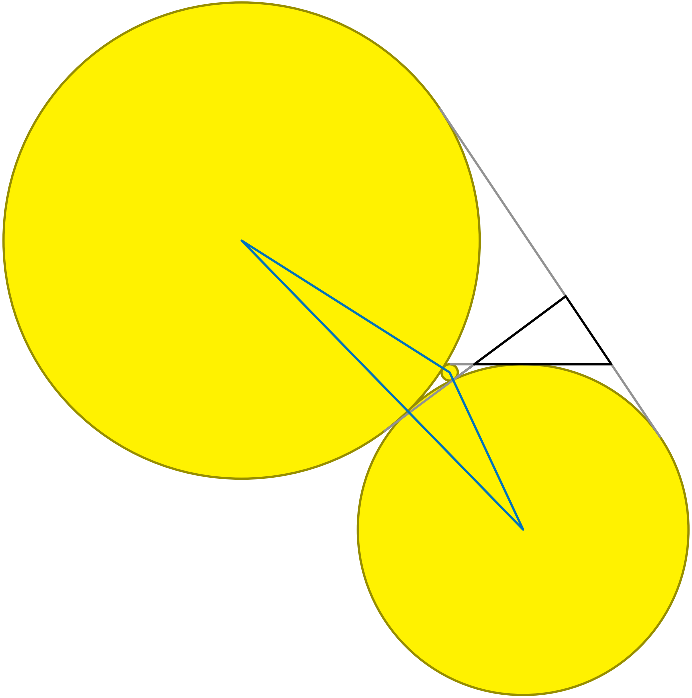


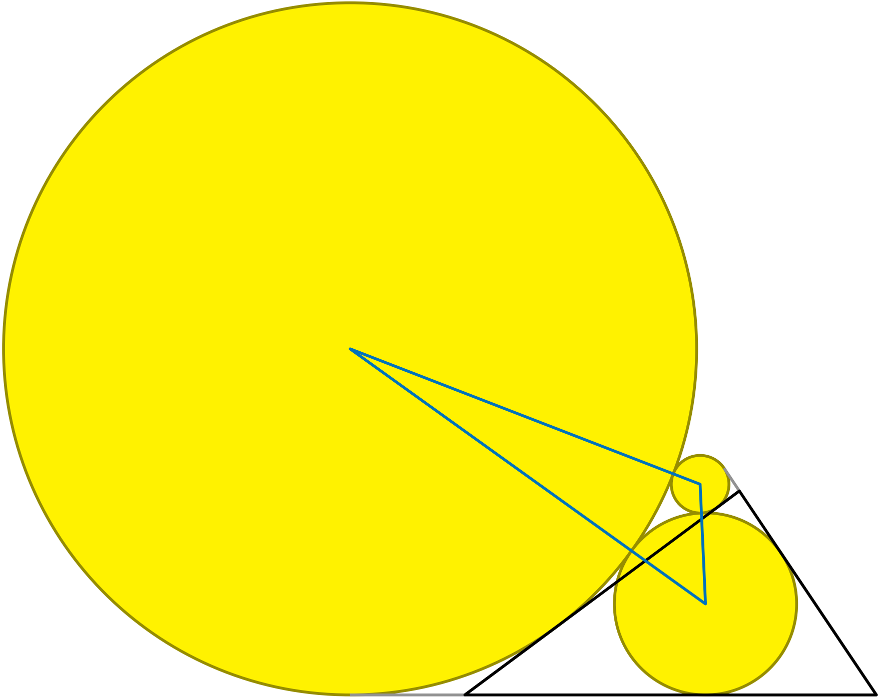


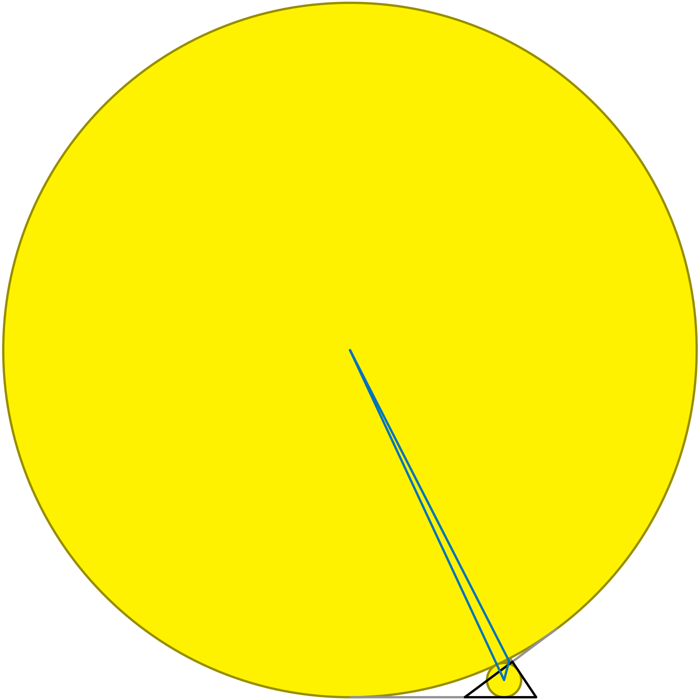


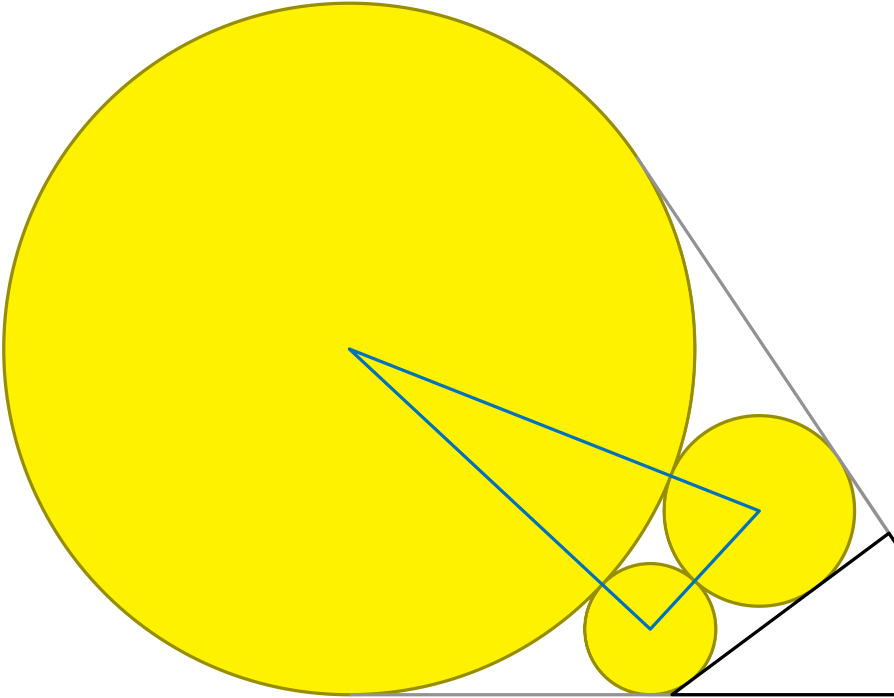


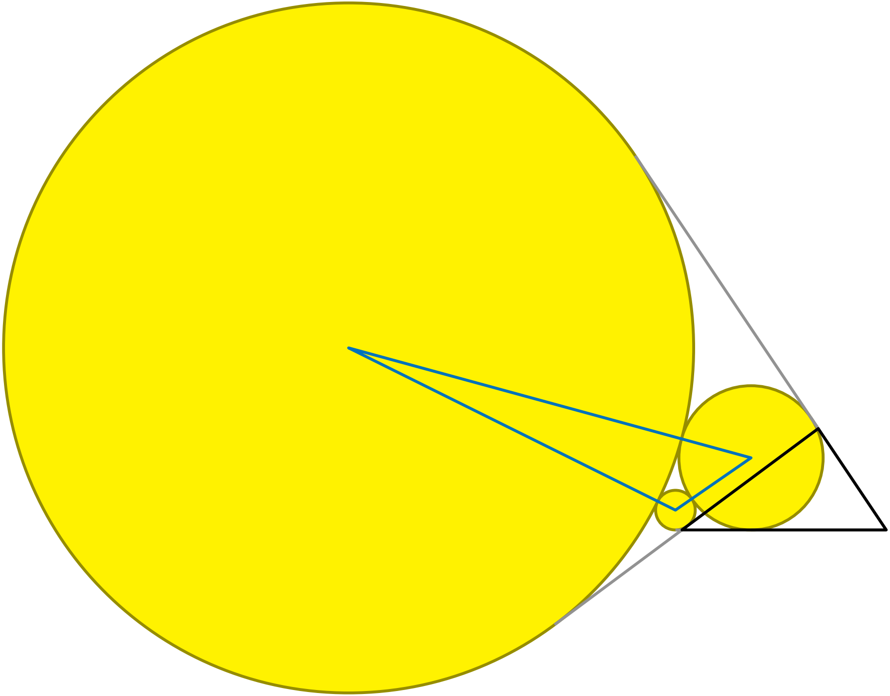


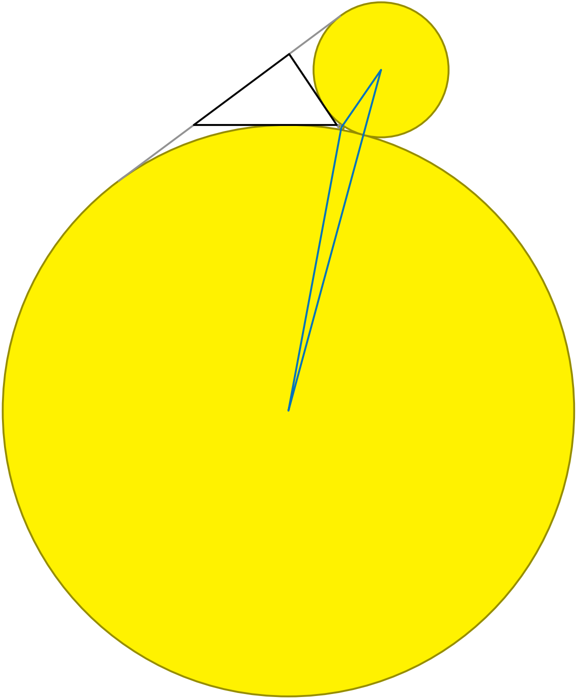


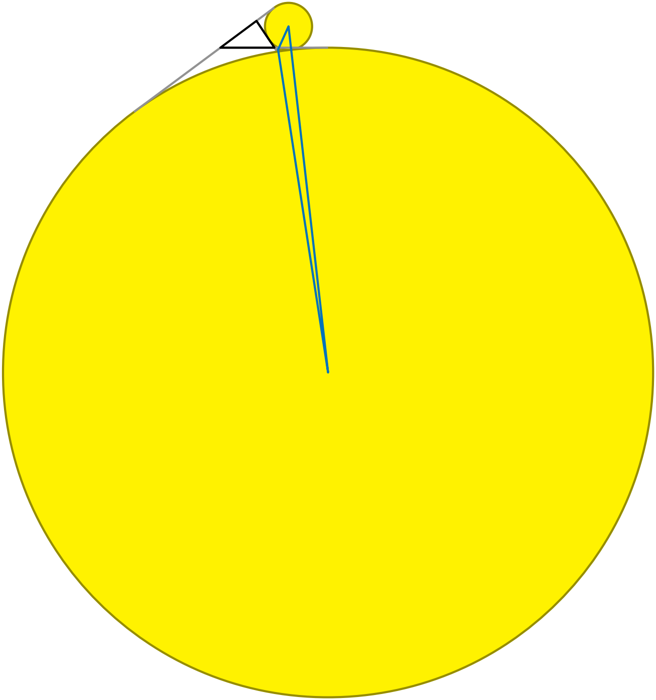


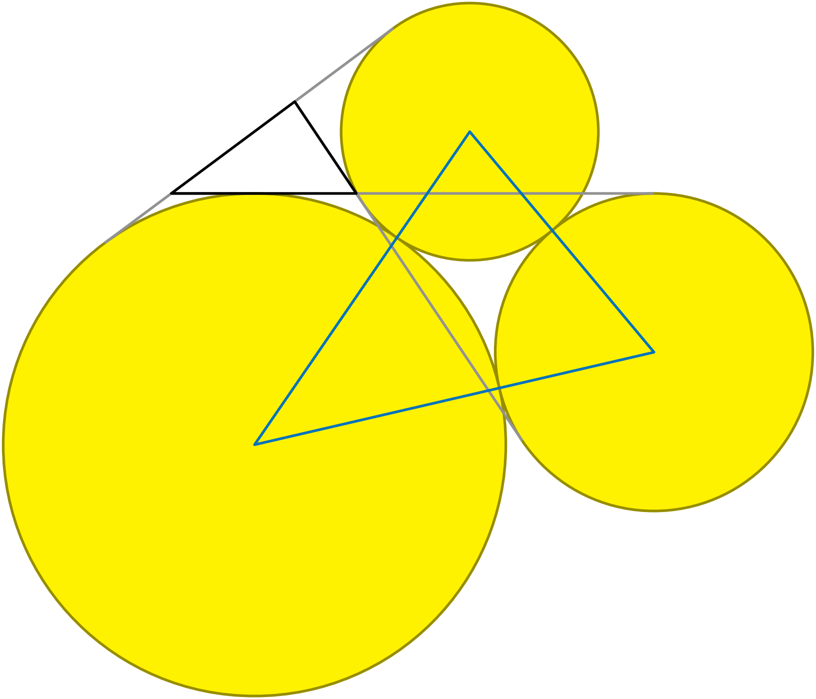


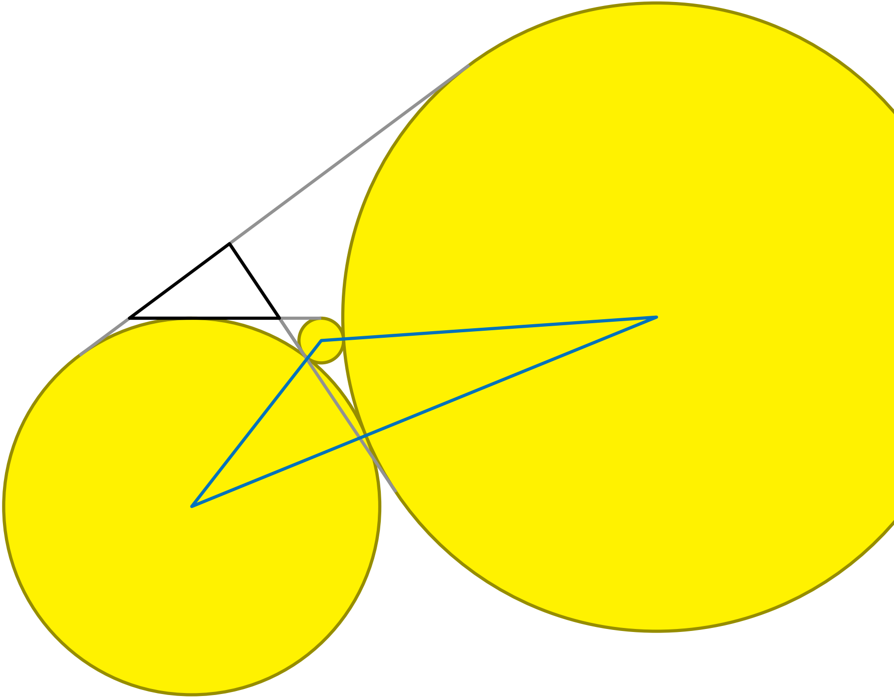


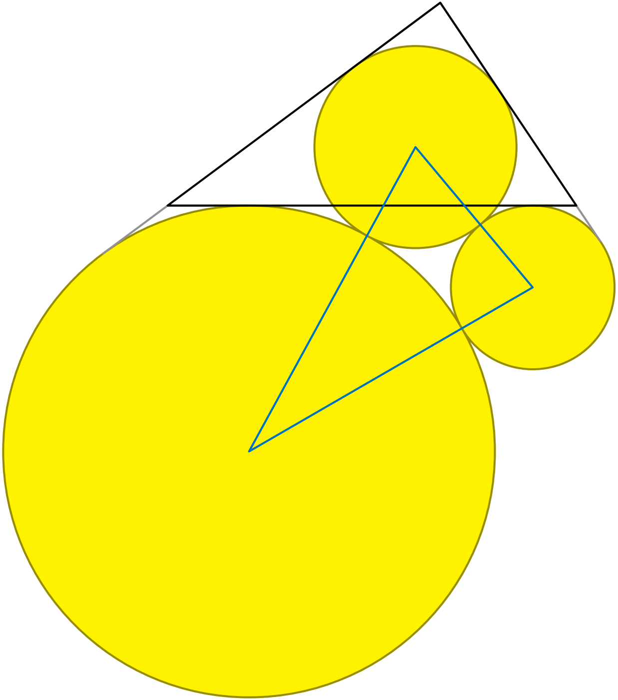


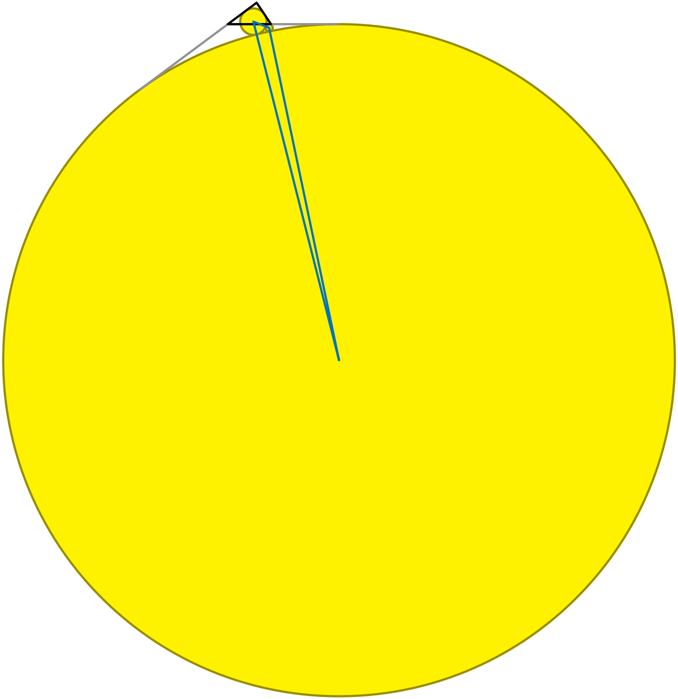


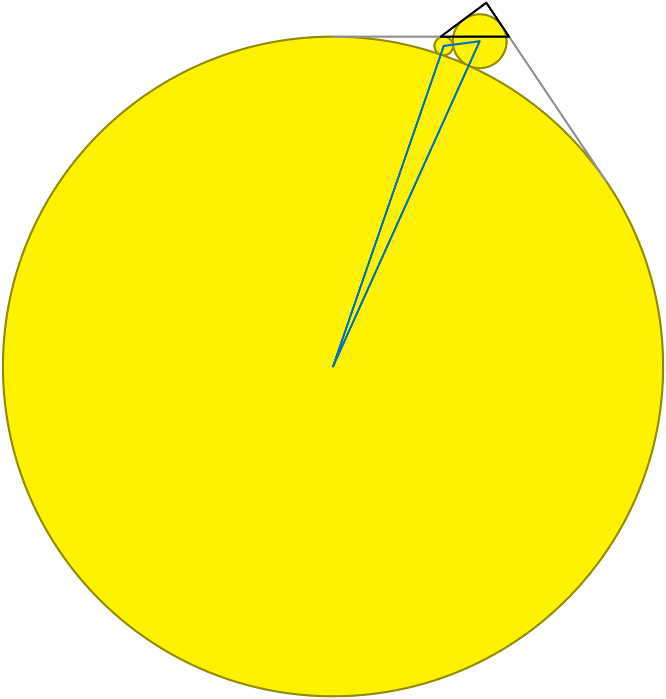


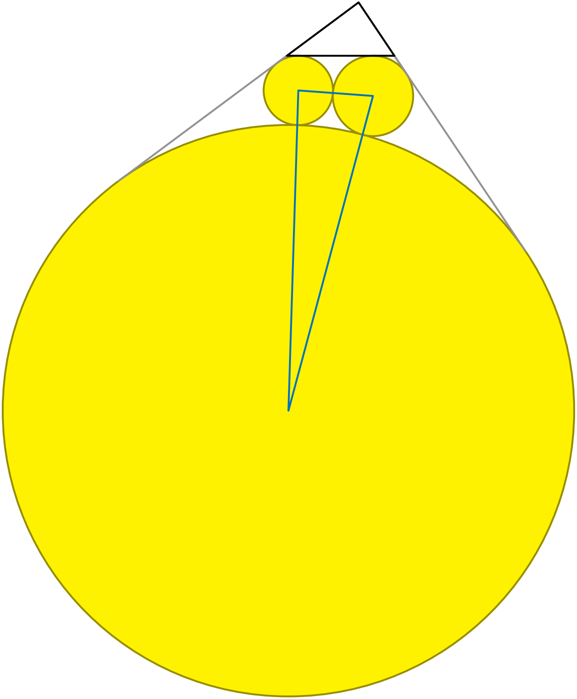


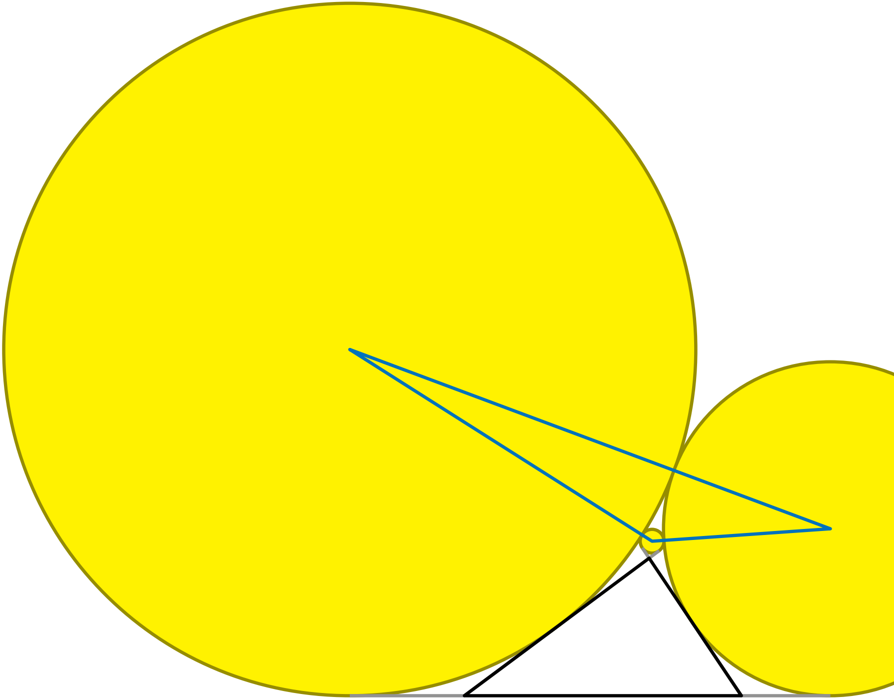


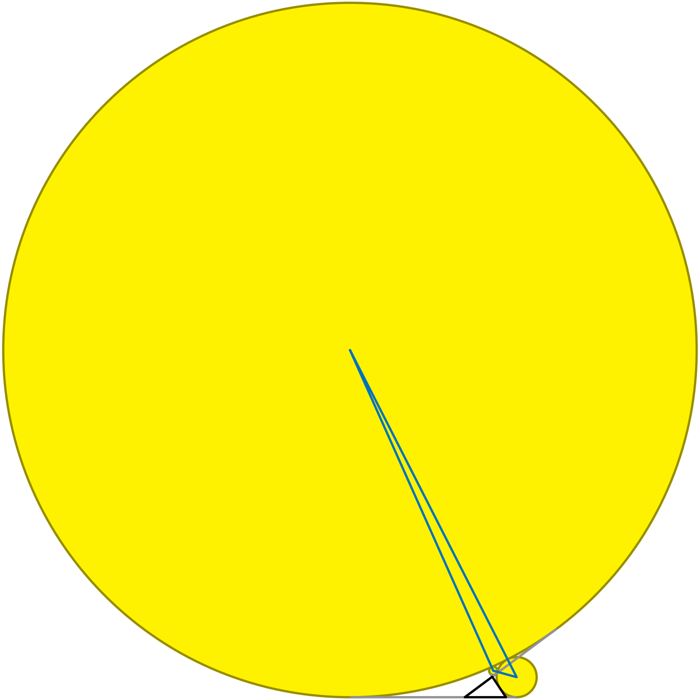


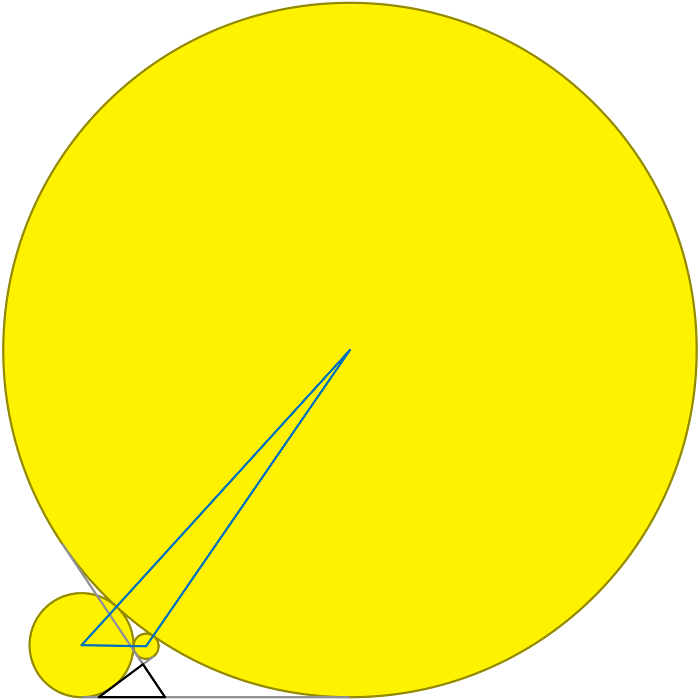


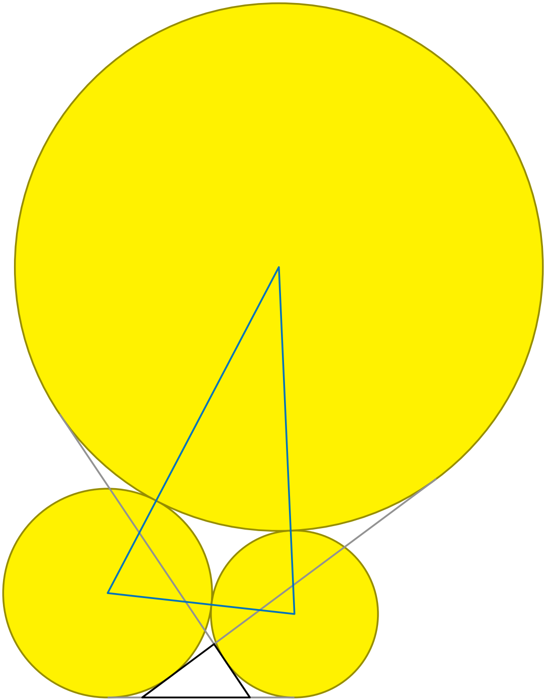












マルファッチの円の一般化２（つづき）

解が 32 個であることの証明いろいろ：

- J. Derousseau, *Historique et résolution analytique complète du problème de Malfatti"*, Mémoires de la Société royale des sciences de Liège", **2-18** pp.1–52, 1895.
- A. Pampuch, *Die 32 Lösungen des Malfattischen Problems*, Archiv der Mathematik und Physik, **8** pp.36–49, 1904.
- H. Lob and H. W. Richmond, *On the Solution of Malfatti's Problem for a Triangle*, Proc. London Math. Soc. **2** pp.287–304, 1930.
- Richard K. Guy, *The lighthouse theorem, Morley & Malfatti: A budget of paradoxes*, The American Mathematical Monthly, **144**(2) pp.97–141, 2007.

一般化されたマルファッチの円の半径

プラス系　　16 組
マイナス系　16 組

- H. Lob and H. W. Richmond, *On the Solution of Malfatti's Problem for a Triangle*, Proc. London Math. Soc. **2** pp.287–304, 1930.

一般化されたマルファッチの円の半径 (プラス系)

$l, m, n \in \mathbb{Z}, \quad l + m + n \equiv 0 \pmod 4$ ごとに、

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \frac{\rho(1 + \tan((m\pi + B)/4))(1 + \tan((n\pi + C)/4))}{2(1 + \tan((l\pi + A)/4))} \\
r_2 &= \frac{\rho(1 + \tan((l\pi + A)/4))(1 + \tan((n\pi + C)/4))}{2(1 + \tan((m\pi + B)/4))} \\
r_3 &= \frac{\rho(1 + \tan((l\pi + A)/4))(1 + \tan((m\pi + B)/4))}{2(1 + \tan((n\pi + C)/4))}
\end{aligned}
$$

ただし、$\rho = 4R \sin((l\pi + A)/2)) \sin((m\pi + B)/2)) \sin((n\pi + C)/2))$
ρ は内接円半径か傍接円半径。

一般化されたマルファッチの円の半径 (マイナス系)

$l, m, n \in \mathbb{Z}, \quad l + m + n \equiv 2 \pmod 4$ ごとに、

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{\rho(1 + \tan((m\pi - B)/4))(1 + \tan((n\pi - C)/4))}{2(1 + \tan((l\pi - A)/4))} \\ r_2 &= \frac{\rho(1 + \tan((l\pi - A)/4))(1 + \tan((n\pi - C)/4))}{2(1 + \tan((m\pi - B)/4))} \\ r_3 &= \frac{\rho(1 + \tan((l\pi - A)/4))(1 + \tan((m\pi - B)/4))}{2(1 + \tan((n\pi - C)/4))} \end{aligned}$$

ただし、$\rho = 4R \sin((l\pi - A)/2)) \sin((m\pi - B)/2)) \sin((n\pi - C)/2))$
ρ は内接円半径か傍接円半径。

外接円半径の比の最大最小問題（一般化）

$$f(\xi,\eta,\zeta)=$$
$$\frac{4xyz(x^2+y^2+2x+2y+2)(x^2+z^2+2x+2z+2)(y^2+z^2+2y+2z+2)}{(x+1)(y+1)(z+1)(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)\sqrt{Q}}$$
$$g(\xi,\eta,\zeta)=\xi+\eta+\zeta-\frac{\pi}{4}$$

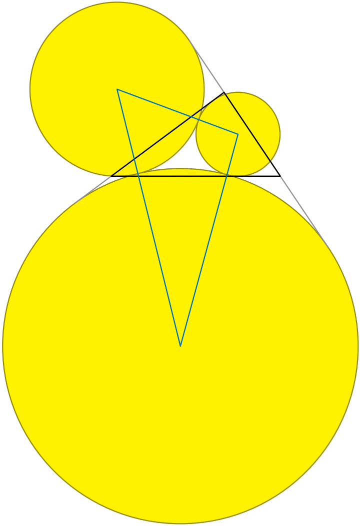
ただし、

$$x=\tan\xi,\qquad y=\tan\eta,\qquad z=\tan\zeta,$$
$$Q=x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2+2x^2y+2xy^2+2x^2z+2xz^2+2y^2z+2yz^2$$
$$+2x^2+2y^2+2z^2+4xy+4xz+4yz+4x+4y+4z+3$$

とおいて、
$f(\xi,\eta,\zeta)$ の最大最小問題を
拘束条件 $g(\xi.\eta,\zeta)=0$ の下、
(ξ,η,ζ) の範囲を 32 通りに変えて解くとよい。

外接円半径の比の最大最小問題（一般化）(つづき)

マイナス系 $(l, m, n) \equiv (2, 2, 2) \pmod 4$ の場合



外接円半径の比の最大最小問題（一般化）（つづき 2）

マイナス系 $(l, m, n) \equiv (2, 2, 2) \pmod 4$ の場合
(♣) の 11 組の解のうち、$1 < x$ かつ $1 < y$ かつ $1 < z$ をみたすものは 1 組。

$$x^2 - 4x + 1 = 0, \quad \frac{8206866516745}{2199023255552} < x < \frac{4103433258373}{1099511627776},$$
$$y^2 - 4y + 1 = 0, \quad \frac{8206866516745}{2199023255552} < y < \frac{4103433258373}{1099511627776},$$
$$z^2 - 4z + 1 = 0, \quad \frac{8206866516745}{2199023255552} < z < \frac{4103433258373}{1099511627776}.$$

すなわち、$(x, y, z) = (2 + \sqrt{3},\ 2 + \sqrt{3},\ 2 + \sqrt{3})$.
（中略）
R'/R の動く範囲は $[(\sqrt{3} + 1)/2,\ +\infty)$ である。
正三角形のときに最小値をとる。

まとめ

- ユークリッド幾何には、原理的に解ける方法はわかっているが実際に解くには大きな計算が必要なために手をつけられていなかった問題が、多数ある。
- そのうちの多くは、計算機の高速化と数式処理を含む記号計算の進歩で、実際に解くことが可能になった。
- その一例として、マルファッチの三角形の外接円半径の元の三角形の外接円半径に対する比の最大最小問題を解いた。
- グレブナー基底はここでも役に立つ。