修士論文

3次元球面内の pre-fiber surface の deplumbing について

奈良女子大学大学院　人間文化研究科　数学専攻

近藤 悠佳子

2008 年 1 月

目 次

1 序文 **2**

2 準備 **4**

2.1 Knots and links 4

2.2 Fiber surfaces 6

2.3 Sutured manifolds 8

2.4 村杉和 11

3 Pre-fiber surfaces **15**

4 定理 1 の証明 **18**

5 定理 2 の証明 **22**

6 Pre-fiber surfaces の様々な deplumbing の例 **40**

6.1 Pre-fiber surface Σ_1^1 の deplumbing 40

6.2 Pre-fiber surfaces Σ_g^1, Σ_g^2 の deplumbing 41

1　序文

この論文では 3 次元球面 S^3 内の pre-fiber surface の deplumbing について調べる．はじめに，pre-fiber surface の概念の動機となった Sharlemann-Thompson の研究結果を紹介する [5]．S^3 内の disk D で link L と 2 点で交わり，かつその交わりの符号が $+$ と $-$ になっているようなものをとる．L を D に沿っていったん切り離してから $\pm 360°$ ひねりを入れてつなぎ直すことによって新しい link L' が得られる．このような操作のことを **unknotting operation** という．いま，L は knot であるとする．このとき，L に有限回の unknotting operation(s) を施すことによって trivial knot が得られることが容易にわかる．このように，L に unkontting operation(s) を施して trivial knot が得られるまでの unknotting operation(s) の最少数を L の **unknotting number** という．このとき Sharlemann-Thompson は次を示した．

定理 1.1 [5] いま，L は unknotting number が 1 の knot とする．このとき L の minimal genus Seifert surface S で次のようなものが存在する．

> S はある surface と Hopf band の plumbing になっており，かつ unknotting operation はこの Hopf band のひねりをほどくことに対応する．

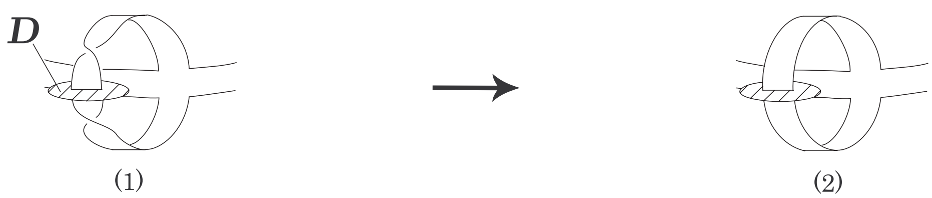


図 1.1: Unknotting operation

例 1.2 図 1.2(1) は Quach によって考察された knot である [8]．図 1.2 からわかるようにこの knot の unknotting number は 1 である．このとき定理 1.1 の S に対応する surface は図 1.2(1) になっている．

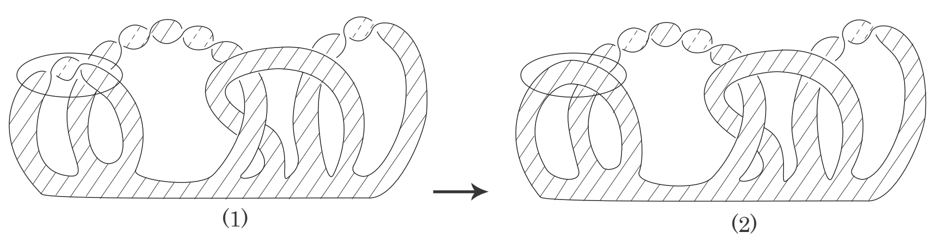


図 1.2: Unknotting number 1 の knot

いま L が fibered link ならばその minimal genus Seifert surface は一意であることが知られている．従って定理 1.1 において特に L が fibered link であるとすると，S は一意的に定まる．(なお，unknotting number が 1 である fibered knot は“ たくさん ”存在することが Quach によって示されている [8].) 従って定理 1.1 よりこのような S はある surface と Hopf band の plumbing になっていることがわかる．S のこの Hopf band の部分のひねりを unknotting operation によってほどくことによって得られる surface を S' と書くことにする．このとき S' は trivial knot の Seifert surface になっているが，このような Seifert surface は pre-fiber surface と呼ばれるものになっていることが [6] で示されている．また同じ論文でその逆，即ち pre-fiber surface が与えられたとき，それにどこで twist を加えれば fiber surface になるか，という問題が取り扱われており，そのような場所の特徴付けも与えられている．従って fibered knot の unknotting number を調べるためには pre-fiber surface を調べることが有効である．特に単純な surface から出発して組織的に pre-fiber surface を構成してゆくことは興味深い．これに関しては fiber surface と pre-fiber surface の連結和 (:2 辺形に沿っての村杉和) は必ず pre-fiber surface になっていることが知られている．この論文ではまず一般の $2n$ 辺形に沿っての村杉和でも同様の結果が成り立つことを示す (定理 3.3)．次に連結和に関してはこの逆が成立することを示す．即ち次が成り立つ．

定理 1　R を pre-fiber surface とする．いま R は 2 つの surfaces R_1, R_2 の連結和になっているとする．このとき R_1 (または R_2) は pre-fiber surface であり，R_2 (または R_1) は fiber surface である．

また定理 2 では同様の問題を plumbing (:4 辺形に沿っての村杉和) に対して考察し，次のような結果が得られた．

定理 2　R を pre-fiber surface とする．いま R は 2 つの surfaces R_1, R_2 の plumbing になっているとする．このとき R_1 または R_2 は pre-fiber surface である．

いま定理 2 において R_1 が pre-fiber surface であるとする．このとき R_2 は fiber surface になることが (上の定理 1 から) 期待されるが，実はこれは正しくない．実際第 6 節で R_2 として non-fiber minimal genus Seifert surface や pre-fiber surface が現れることがあることを示す．

この論文の構成は以下の通りである．第 2 節で knots, links, Seifert surfaces, fiber surfaces, sutured manifolds, 村杉和等の定義及び基本的な性質について紹介する．第 3 節で pre-fiber surfaces の定義及びその基本的な性質を紹介する．特に上記の定理 3.3 の証明を与える．第 4 節で定理 1 を証明する．第 5 節で定理 2 を証明する．第 6 節では trivial knot や 2-component trivial link の Seifert surfaces になっているような pre-fiber surface の deplumbing でどのような surfaces が現れるのかという問題についていくつかの例を与える．

最後になりましたが，御多忙の中いつも温かくご指導下さった小林毅先生をはじめ数学教室の皆様に深く御礼申し上げます．名古屋工業大学の平澤美可三氏には pre-fiber surface に関する有益な情報をいただきました (特に 6.2 節の Facts A,B は同氏に御教示をいただいたものです)．また，奈良教育大学の市原一裕氏には knots や links に関する助言をいただきました．深く御礼申し上げます．

2 準備

2.1 Knots and links

3 次元球面 S^3 の中に, 滑らかに埋め込まれた互いに交わらない有限個の向き付けられた 1 次元球面 S^1 の和集合のことを **link** と呼ぶ. 特に 1 成分からなる link を **knot** と呼ぶ. Knots, links に関する標準的な用語については [9] を参照のこと. Link L に対して, その正則近傍を $N(L)$ と書く. $S^3 \setminus \mathrm{Int}N(L)$ を $E(L)$ と書き, L の**外部空間**と呼ぶ.
写像 $p : S^3 \to S^2$ を S^3 内のある球面 S^2 への正射影とする. L の像 $p(L)$ 上の点 c で $p^{-1}(c) \cap L$ が 2 個以上の点を含むとき, c を射影の多重点といい, $p^{-1}(c) \cap L$ の個数を c の次数という. n 次の多重点を n **重点**という. このとき p が L に関する**正則射影**であるとは, $p(K)$ の多重点は有限個の横断的な 2 重点のみからなることとする.

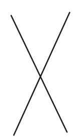


図 2.3: 横断的

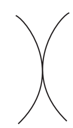


図 2.4: 横断的でない

今後, 簡単のために S^2 を xy 平面と同一視し正則射影の方向を z 軸方向とする. 正則射影像 $p(L)$ の 2 重点を**交点**といい, その逆像のうち z 座標の大きい方を上交点, 他方を下交点という. 正則射影像 $p(L)$ のすべての 2 重点のところで下交点を通る辺の一部を消去することにより, 上交点, 下交点の区別をつけたものを link の**正則表示**という. 像 $p(L)$ には L から指定された向きがついているものとする. いくつかの knot や link の例を図 2.5 に示す.

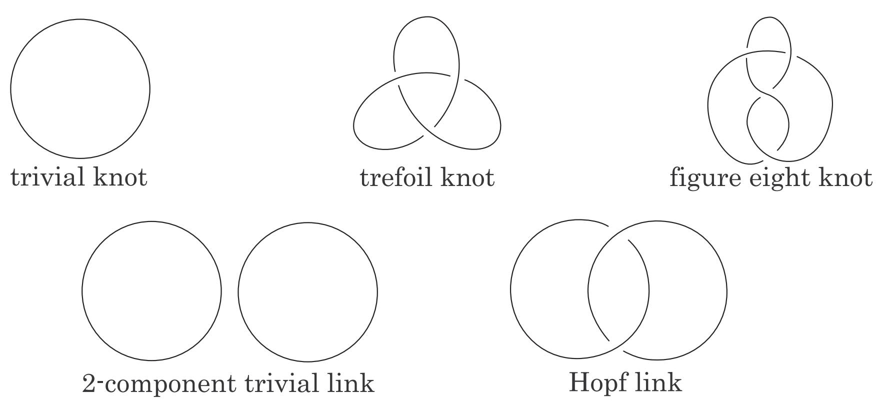


図 2.5: 正則表示

Hopf link には向きの入れ方によって +Hopf link と −Hopf link の 2 種類があることが知られている.

図 2.6: ±Hopf link

Link L に対し, S^3 内のコンパクトで向き付けられた, 閉じた成分を含まない surface S で, 向きまで込めて $\partial S = L$ となるものを L の **Seifert surface** と呼ぶ.

定理 2.1 任意の link L に対して, L の Seifert surface が存在する.

証明　D を L の正則表示とする. 各交点の近くでその正則表示を図のように変形して D の交点をすべてなくしてしまった正則表示を D' とする.

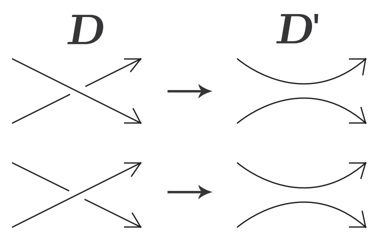


図 2.7: 交点の消去

このとき D' の各成分は射影された平面上の単純閉曲線であるからその平面上の向きづけられた disk の境界になっている. ここで必要ならば disk の内部を少し平面から押し上げることによりこれらの disks は互いに disjoint だとしてよい. このようにして得られた disks に, 各交点の所で, 図のように半分ねじられた band を貼り付けていくことにより L を境界にもつコンパクトな surface S が得られる. いま D' を張る disk には $D' \cap L$ 上で L の向きと一致するように向きを入れておくと, 図からわかるようにこの向きは自然に S の向きに拡張する. また明らかに, ∂S は向きまで込めて L と一致する. S が閉じた成分を含まないことは容易にわかる. したがって S は L の Seifert surface である.

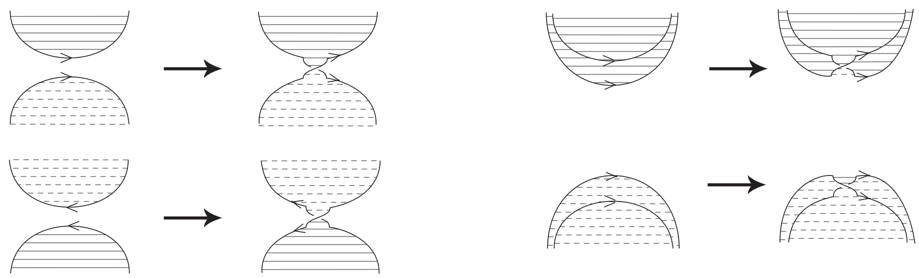


図 2.8: Band の貼り付け

例 2.2 ±Hopf link には annulus に同相な Seifert surface をはることができる．これを ±Hopf band という．

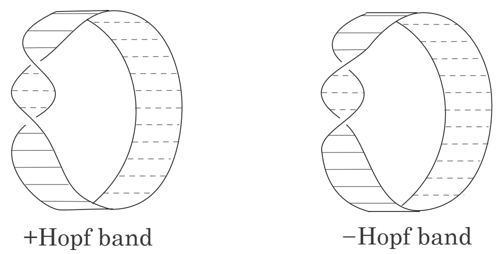


図 2.9: ± Hopf band

Surface S のオイラー標数を $\chi(S)$ と書くことにする．Link L の Seifert surface S が

$$\chi(S) = \max\{\chi(F) | F \text{ は } L \text{ の Seifert surface}\}$$

となっているとき，すなわちオイラー標数の意味で最も単純な surface となっているとき，S は **minimal genus Seifert surface** であるという．

2.2 Fiber surfaces

L を S^3 内の link, S を L の Seifert surface とする．このとき $S \cap N(L)$ は ∂S の S における正則近傍になっているとしてよい．以下では $S \cap E(L)(= S \setminus \mathrm{Int}N(L))$ を S_E と書くことにする．Link L に対して，ある Seifert surface S で“ $(E(L), \partial E(L))$ を S_E で切り開くことにより得られる多様体対 $(E', \partial E')$ が $(S_E \times [0,1], \partial S_E \times [0,1])$ に同相になる ”ようなものが存在するとき，S を **fiber surface** という．また fiber surface をもつような L を **fibered link**（または **fibered knot**）という．Fibered links, fibered knots に対しては次が知られている [9].

定理 2.3 Fibered link の Seifert surface S に対して，次の 3 つの条件は互いに同値である．

1. S は minimal genus.
2. S は incompressible.
3. S は fiber surface.

注意 S が link L に対する fiber surface であるとき, $S_E \times [0,1]$ の $[0,1]$ 成分の方向に S_E をずらしていくことにより, S_E は $E(L)$ の中を"一周"することがわかる. 逆に Seifert surface S' をこのように $E(L)$ の中で"一周"させることができれば S' は fiber surface であることが知られている.

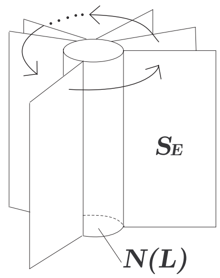


図 2.10: Fibration

例 2.4 (Trivial knot)
K を trivial knot とする. 3 次元球面 S^3 は 2 つの 3-balls B_1, B_2 の境界を同一視することによって得られる. いま, $K \subset \partial B_1 (= \partial B_2)$ とし D_1 を ∂B_1 内の disk で $\partial D_1 = K$ となるものとする. D_1 は ∂B_2 内の disk D_2 と同一視されるとする. 特に B_1 と B_2 から境界上の D_1 と D_2 を自然に同一視して得られる多様体は図 2.11 からわかるように 3-ball になっている.(また, 残りの部分 $\partial B_i \setminus D_i$ を同一視すれば S^3 になる.)

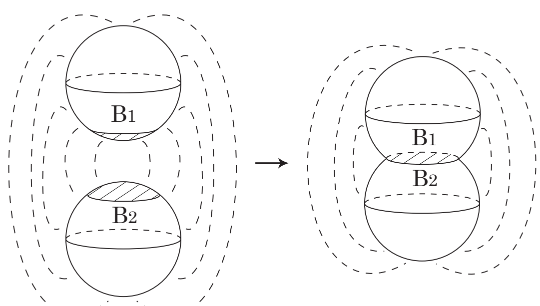


図 2.11: 3-ball

このとき D_i の像を K の Seifert surface (S と書くことにする) とみなしてやると, 図 2.12 からわかるように S は $E(K)$ の中で"一周"することができる. したがって K は S を fiber surface とする fibered knot であることがわかる.

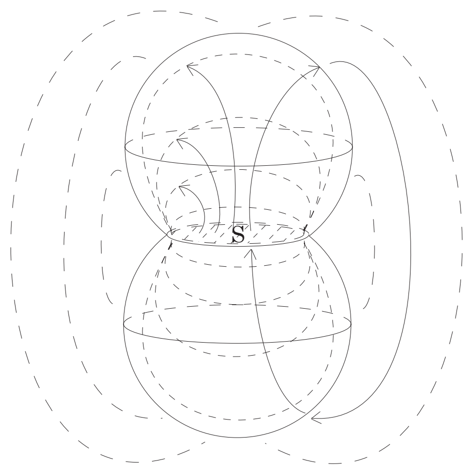


図 2.12: Trivial knot の fibration

例 2.5 図 2.5 の trefoil knot, figure eight knot も fibered knot であることが知られている.

例 2.6 (Non-fiber surface)
図 2.13 のような 2 回以上ひねられた annulus は fiber surface でないこと，また minimal genus Seifert surface であることが知られている.

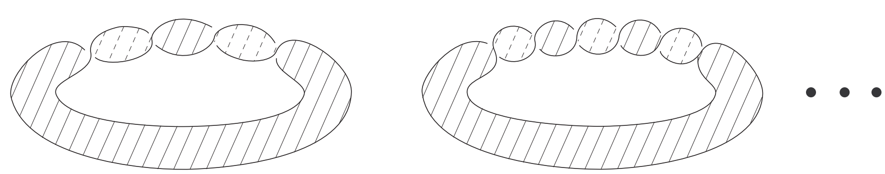


図 2.13: Non-fiber surface

2.3 Sutured manifolds

ここでは [2] で導入された sutured manifold に関して紹介する.
Compact で向き付けられた 3 次元多様体 M と, ∂M 内の surface γ との多様体対 (M, γ) が **sutured manifold** であるとは, 次の 1, 2, 3 を満たすときをいう.

1. γ は annulas の直和 $A(\gamma)$ と torus の直和 $T(\gamma)$ の直和である,
2. $A(\gamma)$ の各 component は **suture** と呼ばれるその中心となる向きのついた単純閉曲線（その和を $s(\gamma)$ と書く）を含んでいる,
3. $R(\gamma) = \partial M \setminus \mathrm{Int}\gamma$ とするとき, $R(\gamma)$ には, $\partial R(\gamma)$ の各成分が $s(\gamma)$ の対応する成分と γ においてホモローグとなるように, 向きが入っている. ($R(\gamma)$ の成分のう

ちで法線ベクトルが外向き, 内向きのもの全体の和をそれぞれ $R_+(\gamma)$, $R_-(\gamma)$ と書く.)

Compact で境界のある surface S に対して, $M = S \times [0,1]$, $\gamma = \partial S \times [0,1]$, $R_+(\gamma) = S \times \{1\}$, $R_-(\gamma) = S \times \{0\}$ とすれば, (M,γ) は sutured manifold となる. このような sutured manifold のことを **product sutured manifold** と呼ぶ.

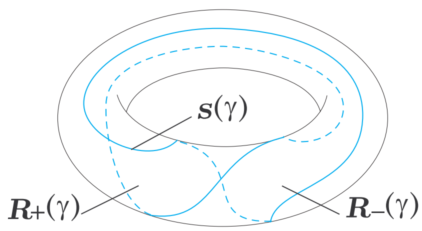


図 2.14: Product sutured manifold

Sutured manifold (M,γ) に対し, M に proper に埋め込まれた disk D が次を満たすとき, D を **product disk** と呼ぶ.

> $D \cap R_+(\gamma)$, $D \cap R_-(\gamma)$ が各々 $R_+(\gamma)$, $R_-(\gamma)$ に proper に埋め込まれた一本の arc からなっている.

また, このとき (M,γ) を product disk D に沿って図のように decompose することができる. そうしてできた (M',γ') には (M,γ) から導入される sutured manifold の構造が自然に入る. この sutured manifold (M',γ') は (M,γ) から D に沿っての **product decomposition** によって得られたという.

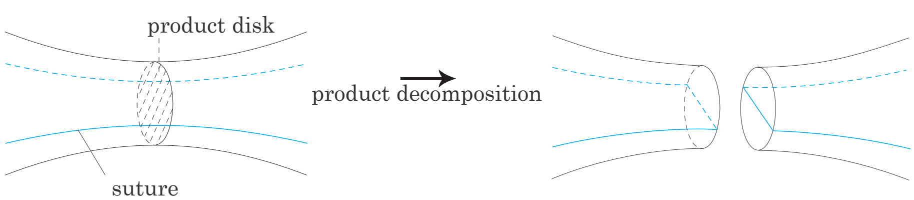


図 2.15: Product decomposition

Sutured manifold (N_0,γ_0) に対して product decomposition の列:$(N_0,\gamma_0) \xrightarrow{D_1} (N_1,\gamma_1) \xrightarrow{D_2} \cdots \xrightarrow{D_p} (N_p,\gamma_p)$ で N_p は 3-balls の和集合 $B_1,\ldots,B_k$ で $s(\gamma_p) \cap B_i$ $(i = 1,\ldots,k)$ は 1 本の suture からなるようなものが存在するとき, この product decomposition の列のことを **complete product decomposition** という. S を link L の Seifert surface とし $S_E (\subset E(L))$ を上の通りとする. 正則近

傍対 $(N,\delta)=(N(S_E,E(L)),N(\partial S_E,\partial E(L)))$ には自然に product sutured manifold の構造が入る．この (N,δ) を S **から得られる sutured manifold** と呼ぶ．$N^c=\mathrm{cl}(E(L)\setminus N)$, $\delta^c=\mathrm{cl}(\partial E(L)\setminus\delta)$ とし，(N^c,δ^c) に $R_+(\delta^c)=R_-(\delta)$ なる構造を入れた sutured manifold (N^c,δ^c) のことを S の **complementary sutured manifold** と呼ぶ．S の complementary sutured manifold (N^c,δ^c) に対して complete decomposition が存在するときこの product decomposition の列を S の **complete C-product decomposition** と呼ぶ．

定理 2.7 $R\subset S^3$ を oriented link L の Seifert surface とする．そのとき L が R を fiber とする fibered link である必要十分条件は，R が complete C-product decomposition をもつことである．

証明　まず L が R を fiber とする fibered link であることの必要十分条件は，“ R の complementary sutured manifold (N^c,δ^c) が $(R\times[0,1],\partial R\times[0,1])$ と同相になることである ”ことに注意する．

$\Rightarrow$ **の証明．** 仮定より $(N^c,\delta^c)\cong(R\times[0,1],\partial R\times[0,1])$ である．いま R に proper に埋め込まれた arcs $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ で $\bigcup\alpha_i$ は R を 1 つの disk に cut するようなものをとってくる．このとき $D_i=\alpha_i\times[0,1](\subset(N^c,\delta^c))(i=1,\ldots,n)$ とすると D_i は (N^c,δ^c) の product disk である．$(N^c,\delta^c)(=(N_0,\delta_0)$ と書くことにする$)$ に $D_1,\ldots,D_n$ で次々と product decomposition を行う:$(N_0,\delta_0)\xrightarrow{D_1}(N_1,\delta_1)\xrightarrow{D_2}\cdots\xrightarrow{D_n}(N_n,\delta_n)$．このとき明らかに (N_n,δ_n) は $(D_2\times[0,1],\partial D^2\times[0,1])$ に同相である．よって R は complete C-product decomposition をもつ．

$\Leftarrow$ **の証明．** 仮定より (N^c,δ^c) の complete C-product decomposition $(N_0,\delta_0)\xrightarrow{D_1}(N_1,\delta_1)\xrightarrow{D_2}\cdots\xrightarrow{D_p}(N_p,\delta_p)$ が存在する．いま $(N_p,\delta_p)\cong(\mathcal{D}\times[0,1],\partial\mathcal{D}\times[0,1])$ である．(但し $\mathcal{D}$ は有限個の disks の和集合である.) この product の構造は product disks $D_p,\ldots,D_2,D_1$ を用いて次々と引き戻されていく．これより $(N_0,\delta_0)(=(N^c,\delta^c))$ が product sutured manifold であることがわかる．したがって R は fiber surface である．

例 2.8 図 2.16 の Seifert surface について考える．

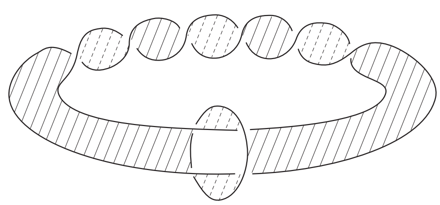


図 2.16: Seifert surface

図 2.17 より，この Seifert surface は complete C-product decomposition をもつことがわかる．従ってこれは fiber surface であることがわかる．

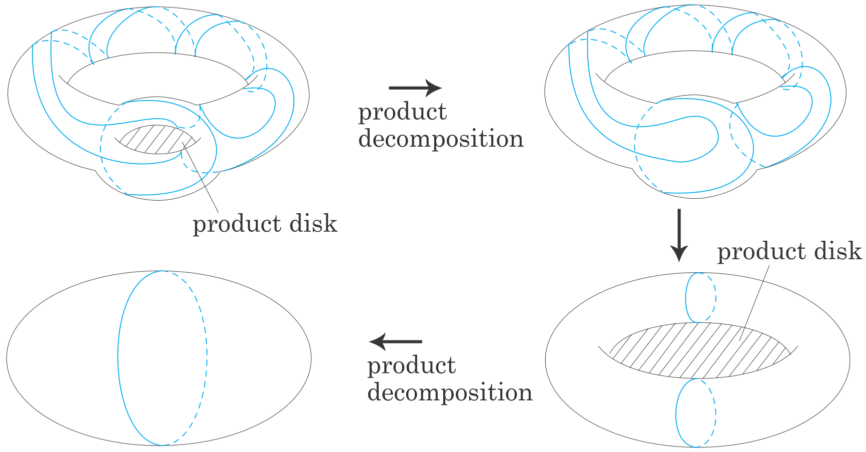


図 2.17: Complete C-product decomposition

2.4 村杉和

向き付けられた曲面 $R(\subset S^3)$ が 2 つの向き付けられた曲面 $R_1,\ R_2$ の（$2n$ 辺形に沿った）**村杉和**（または**一般化された plumbing**）であるとは, 次の 2 つの条件が満たされていることをいう:

1. $R = R_1 \cup R_2$, 但し $R_1 \cap R_2$ は $2n$ 辺形 D で ∂D の辺を $a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2, \dots, a_n,\ b_n$ とすると, a_i (b_i) は ∂R_1 (∂R_2) に含まれ, R_2, (R_1) 内の proper な arc になっている.
2. S^3 内の 3-balls $B_1,\ B_2$ で, 次のようなものがある:

$$\begin{cases} B_1 \cup B_2 = S^3,\ B_1 \cap B_2 = \partial B_1 = \partial B_2 = S^2 \\ B_i \supset R_i\ (i = 1, 2) \\ \partial B_1 \cap R_1 = \partial B_2 \cap R_2 = D \end{cases} \tag{2.1}$$

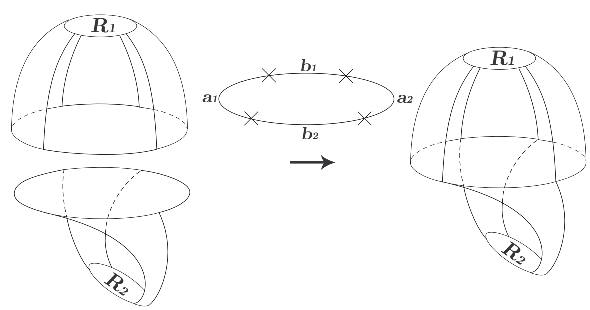


図 2.18: $R_1,\ R_2$ の村杉和

2 辺形に沿っての村杉和を**連結和**と呼ぶ．4 辺形に沿っての村杉和を **plumbing** と呼ぶ．また，このとき R_1(または R_2) は R から R_2(または R_1) を **deplumbing** して得られるという．

Observation 2.9 Seifert surface S の一部に図 2.19(1) のような部分があるとする．このとき S から Hopf band を deplumbing することができる．

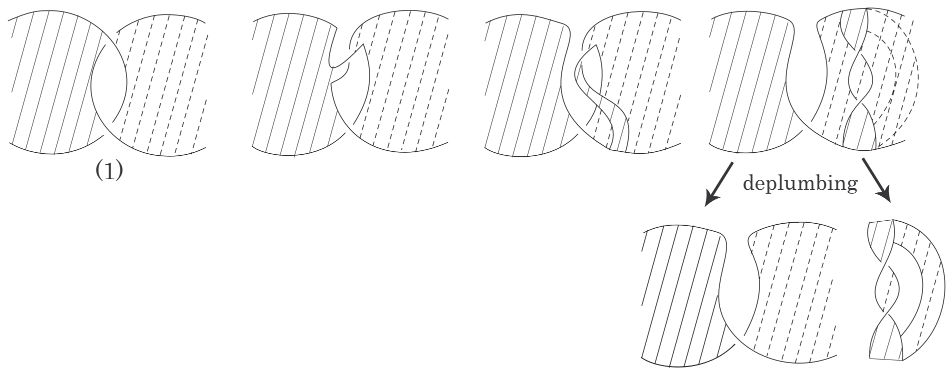


図 2.19: Deplumbing Hopf band

村杉和の dual disk と complementary sutured manifold

R, R_1, R_2, D, B_1, B_2 を上の通りとする．このとき，$\mathrm{cl}(S^2 - D)$ を D^* とかき，D の **dual disk** と呼ぶ．いま R の complementary sutured manifold を (N^c, δ^c)，R_i の complementary sutured manifold を $({N_i}^c, {\delta_i}^c)$ と書くことにする．図 2.20 からわかるように $\overline{D^*} = D^* \cap N^c$ は N^c に proper に埋め込まれた disk で $s(\delta^c)$ と $2n$ 個の点で交わるとしてよい．

(1) (2)

図 2.20: Dual disk $\overline{D^*}$

図 2.20(2) の内側と外側を入れ換えて描いたものが図 2.21(1) である．

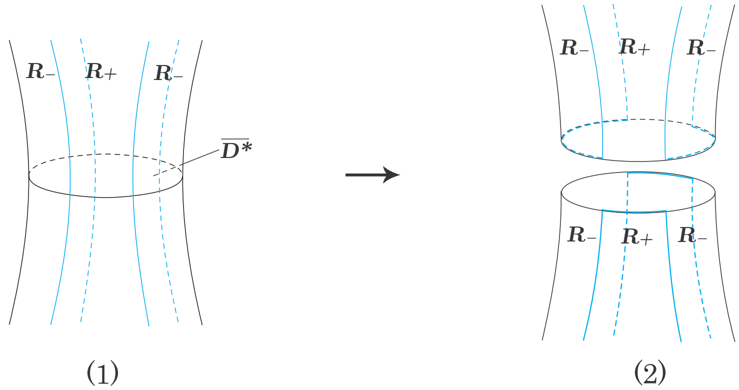


図 2.21: Dual disk $\overline{D^*}$

このとき図 2.21(2) からわかるように N^c を $\overline{D^*}$ で cut して得られる多様体は 2 つの components からなり，しかもそれぞれの compoment には (N^c, δ^c), $\overline{D^*}$ から induce される sutured manifold structure が自然に入るがそれは $({N_1}^c, {\delta_1}^c)$, $({N_2}^c, {\delta_2}^c)$ に他ならない．以上のことを逆に考えれば次がわかる．

Proposition 2.10 (N^c, δ^c) は $({N_1}^c, {\delta_1}^c)$, $({N_2}^c, {\delta_2}^c)$ から次のようにして得られる．${D_1}^+$ を $R_+({\delta_1}^c)$ に埋め込まれた D に対応する disk, ${D_2}^-$ を $R_-({\delta_2}^c)$ に埋め込まれた D に対応する disk とする．このとき N^c は ${N_1}^c$ と ${N_2}^c$ から ${D_1}^+$ と ${D_2}^-$ を同一視して得られる多様体に homeomorphic で更に $s({\delta_1}^c) \cup s({\delta_2}^c)$ から $\partial {D_1}^+ \setminus s(\delta)(= \partial {D_2}^- \setminus s(\delta))$ に対応する $2n$ 本の arcs を取り除いて得られる 1 次元多様体に対応している．

定理 2.11 $R \subset S^3$ は S^3 内の oriented surfaces R_1, R_2 の村杉和であるとする．そのとき $L = \partial R$ が R を fiber とする fibered link になる必要十分条件は，$i = 1, 2$ に対して $L_i = \partial R_i$ が R_i を fiber とする fibered link となることである．

$\Leftarrow$ の証明. ${R_1}^c = \mathrm{cl}(R_1 \setminus D)$, ${R_2}^c = \mathrm{cl}(R_2 \setminus D)$, $D^* = \mathrm{cl}(S^2 \setminus D)$ とすると，$R = {R_1}^c \cup D \cup {R_2}^c$ である．また $R^* = {R_1}^c \cup D^* \cup {R_2}^c$ も L の Seifert surface となる．${R_1}^* = {R_1}^c \cup D^*$ とする．R_1 は fiber surface だから定理 2.3 とその注意より ${R_1}^*$ は R_1 まで動かせる．この isotopy を図 2.22 の上半分のところに適用すると R^* は R に isotopic になることがわかる．同様に R_2 を使って R は R^* まで図 2.22 の下半分の部分を通って動かせることがわかる．以上より R は“一周”動かせることがわかった．従って 2.2 節の注意より，R は fiber surface である．

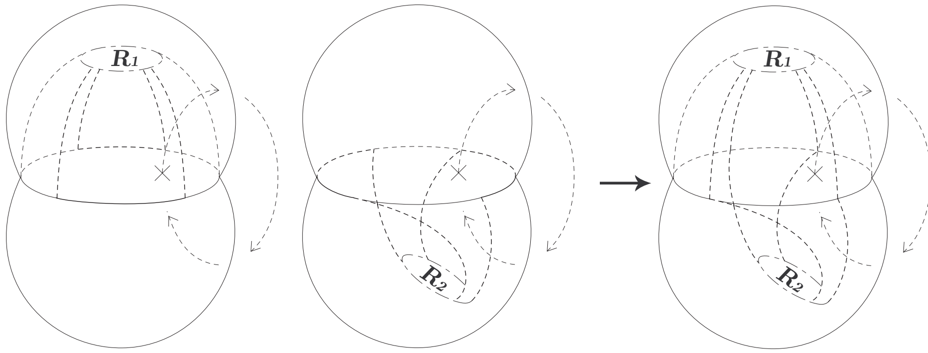


図 2.22: R_1, R_2 の村杉和

⇒ の証明. R と R^* を上の通りとする．Isotopy で少し動かすことにより R と R^* は $S^3 - \mathrm{Int}N(L)$ で disjoint にできる．また R は fiber surface であるから R と R^* は isotopic である．したがって $S^3 - \mathrm{Int}N(L)$ は $R \cup R^*$ によって 2 つの product sutured manifolds $(H_1, \delta_1), (H_2, \delta_2)$ に分けることができる．図 2.23 のような product disks $D_1, D_2, \ldots, D_n$ に沿って product decomposition を行うと，$({R_1}^c \times [0,1], \partial {R_1}^c \times [0,1])$ と R_2 の complementary sutured manifold の和集合に同相な sutured manifold が得られる，但し ${R_1}^c$ は上の通りとする．よって R_2 の complementary sutured manifold は product sutured manifold である．よって L_2 は R_2 を fiber とする fibered link である．同様にして L_1 は R_1 を fiber とする fibered link である．

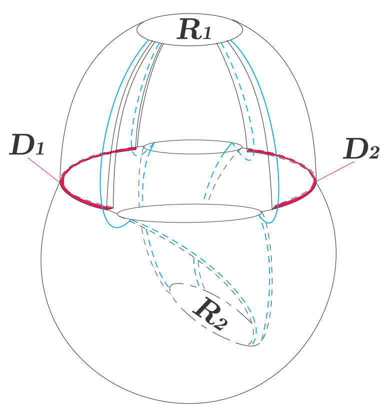


図 2.23: (H_2, δ_2)

例 2.12 例 1.2 の (1) の surface について考える．容易にわかるようにこの surface から 2 つの Hopf bands を deplumbing すると例 2.8 の surface が得られる．従って定理 2.11 よりこれは fiber surface であることがわかる．

3 Pre-fiber surfaces

S を S^3 内の connected Seifert surface とし，(N^c, δ^c) を S に対する complementary sutured manifold とする．いま，$R_+(\delta^c)$, $R_-(\delta^c)$ の互いに disjoint な compressing disks D^+, D^- で次のようなものが存在するとき，S は **pre-fiber surface** であるという．

> N^c を $D^+ \cup D^-$ で cut して得られる多様体を $N^{c\prime}$ とかくとき，$(N^{c\prime}, \delta^c)$ は product sutured manifold になっている．

そのとき，S の compressing disks $\overline{D}^+, \overline{D}^-$ で次のようなものが存在する: $\mathrm{Int}\overline{D}^+ \cap \mathrm{Int}\overline{D}^- = \emptyset$, $\overline{D}^+ \cap N^c = D^+$, $\overline{D}^- \cap N^c = D^-$. このような $\overline{D}^+, \overline{D}^-$ を pre-fiber surface S の **canonical compressing disks** という．逆に N^c は $N^{c\prime}$ に 2 つの 1-handle を attach して得られると考えることができるが，このとき $N^{c\prime}$ の $R_+(\delta)$ 側に attach される 1-handle を D^+handle, $R_-(\delta)$ 側に attach される 1-handle を D^-handle と呼ぶ．
また，$N^{c\prime}$ が connected(または disconnected) であるとき，pre-fiber surface S は type 1(または type 2) であるという．

例 3.1 次の図 3.24, 図 3.25 の surfaces は pre-fiber surfaces であることが知られている．

定理 3.2 [6] S^3 内の genus g の pre-fiber surface で境界が trivial knot になっているものは図 3.24 の Σ_g^1 と isotopic である．

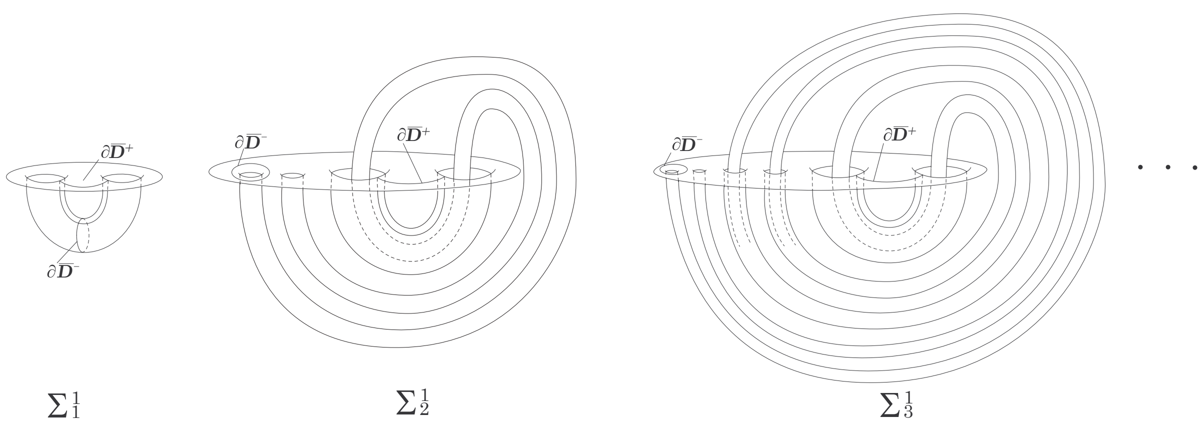


図 3.24: Pre-fiber surface Σ_g^1

定理 3.3 [7] S^3 内の genus g の pre-fiber surface で境界が 2-component trivial link になっているものは図 3.25 の Σ_g^2 と isotopic である．

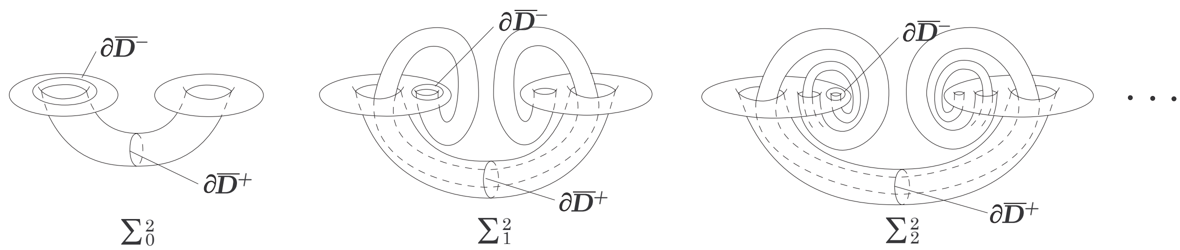


図 3.25: Pre-fiber surface Σ_g^2

注意 Σ_g^1 は全て type1 である．Σ_g^2 は $g=0$ のとき type2 であり，それ以外は全て type1 である．

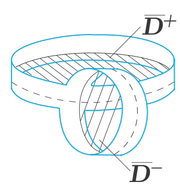
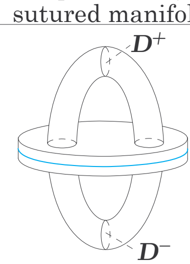
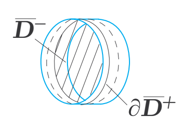
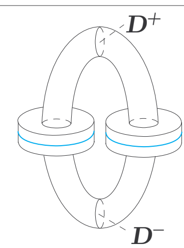
	pre-fiber surface	complementary sutured manifold
Σ_1^1		
Σ_0^2		

図 3.26: Pre-fiber surface の complementary sutured manifold

Pre-fiber surface S に対して，次が成り立つ．

定理 3.4 Fiber surface と pre-fiber surface の村杉和は pre-fiber surface である．

<u>証明</u>　R_1 を fiber surface, R_2 を pre-fiber surface, R_1, R_2 の村杉和を R とする．定理 2.11 の証明と同様に考える．R_1 は fiber surface だから，complete C-product decomposition をもつ．特にこの decompositions は村杉和を行う disk D と disjoint としてよい．この complete C-product decomposition を行うことにより，R_2 の complementary sutured manifold が得られる．R_2 は pre-fiber surface だから，R_2 の complementary sutured manifold は (surface $\times$ $[0,1] \cup (D^{+}$handle$) \cup$

$(D^-\text{handle}), \partial(\text{surface}) \times [0,1])$ に同様である．上の decomposition を逆にたどることによりこの surface$\times[0,1]$ の構造は R の complementary sutured manifold まで引き戻され, 特に R の complementary sutured manifold も $(\text{surface} \times [0,1] \cup (D^+\text{handle}) \cup (D^-\text{handle}), \partial(\text{surface}) \times [0,1])$ の構造をもつことがわかる．従って R は pre-fiber surface である．

注意 第 6 節でこの定理の逆は成り立たない, 即ち pre-fiber surface と fiber surface でない surface の plumbing で pre-fiber surface が生じることがある, ことを見る．

S^3 内の surface S と S に proper に埋め込まれた arc α に対して, S' が S に, α に沿って twist を加えて得られる surface であるとは, 次を満たすときをいう．

> $D \cap S = \alpha$ となるような disk D があり, S に対し D で cut して $\pm 360°$ ひねりを入れてつなぎ直すことによって S が得られる．

Pre-fiber surface に twist を加えることにより“ たくさん ”の fiber surfaces が得られることが知られている．具体的には次が成り立つ．

定理 3.5 [6] S を canonical compressing disks $\overline{D}^+, \overline{D}^-$ をもつような pre-fiber surface とする．a を S に proper に埋め込まれた arc で $\partial D^+, \partial D^-$ とそれぞれ一点で交わるようなものとする．このとき, a に沿って S に $\pm$twist を加えて得られる surface S' は fiber surface である．

例 3.6 例 3.1 の Σ_1^1 について考える．Arc $a(\subset \Sigma_1^1)$ を図 3.27(1) のようにとるとこれは定理 3.5 より a に沿って twist を加えて得られる surface は fiber surface になることがわかるが, 実際 twist の結果, trefoil knot, figure eight knot が得られる．(図 3.27(2))

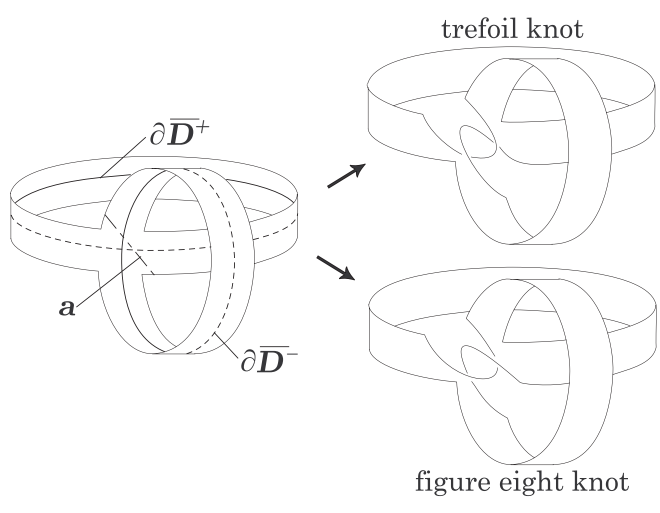


図 3.27:

4　定理 1 の証明

定理 1　R を pre-fiber surface とする．いま R は 2 つの surfaces R_1, R_2 の連結和になっているとする．このとき R_1 (または R_2) は pre-fiber surface であり, R_2 (または R_1) は fiber surface である．

<u>証明</u>　いま D, B_1, B_2, (N^c, δ^c), $(N_i{}^c, \delta_i{}^c)$, D^*, $\overline{D^*}$ を 2.4 節の通りとする．また D^+, D^- を (N^c, δ^c) の canonical compressing disks の pair とする．(したがって (N^c, δ^c) を $D^+ \cup D^-$ で cut して得られる多様体を $N^{c\prime}$ とすると, $(N^{c\prime}, \delta^c)$ は $(F \times [0,1], \partial F \times [0,1])$ に homeomorphic である.) いま R は pre-fiber surface だから connected である．したがって R_1, R_2 も connected である．Innermost disk argument, outermost arc argument により $\overline{D^*}$ は D^+handle, D^-handle と disjoint である, 従って $(N^{c\prime}, \delta^c)$ 内の product disk である, としてよい．

Case I**.** R は type 1.

いま $\overline{D^*}$ は N^c を 2 つの component に分けるから, $N^{c\prime}$ を 2 つの components M_1, M_2 に分ける．

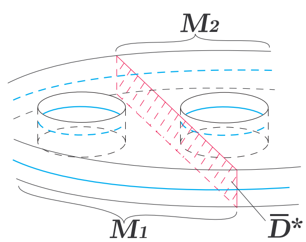


図 4.28: M_1, M_2

Case 1. D^+ handle, D^- handle ともに M_1, またはともに M_2 に attach される．

ここではともに M_2 に attach されるとする．(図 4.29)

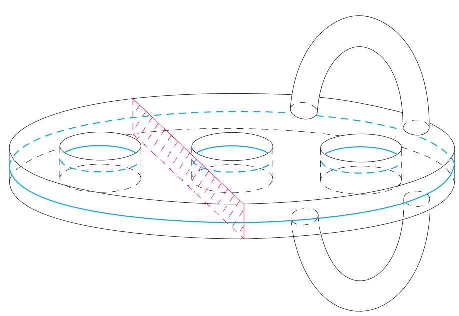


図 4.29: Case 1.

Proposition 2.10 より ${N_1}^c$, ${N_2}^c$ は N^c を $\overline{D^*}$ で cut して suture を図 4.30 のようにつなげて得られる.

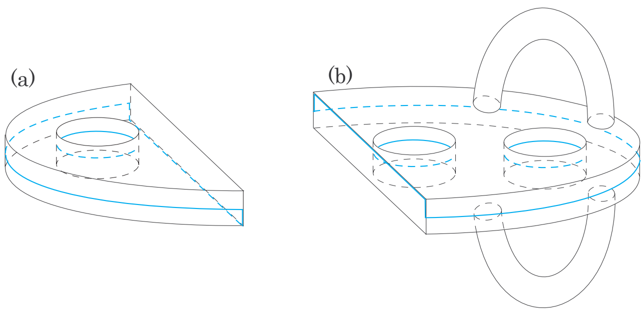


図 4.30: Case 1.

これは R_1 が fiber surface, R_2 が pre-fiber surface であることを意味している.

Case 2. D^+ handle が M_1 または M_2 に attach され, D^- handle が M_2 または M_1 に attach される.

ここでは D^+ handle が M_1 に attach され, D^- handle が M_2 に attach されるとする. (図 4.31)

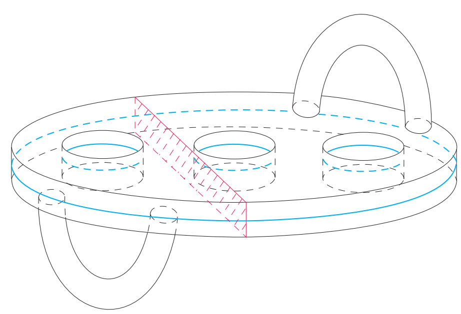


図 4.31: Case 2.

Proposition 2.10 より ${N_1}^c$, ${N_2}^c$ は N^c を $\overline{D^*}$ で cut して suture を図 4.32 のようにつなげて得られる.

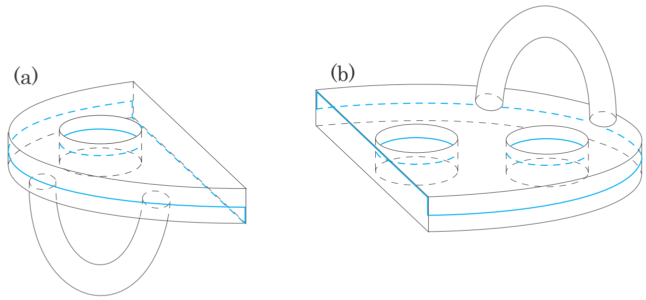


図 4.32: Case 2.

しかしこの場合 $R_+(\delta_i{}^c)$ と $R_-(\delta_i{}^c)$ は homeomorphic にならないので矛盾する．よって Case 2 は起こり得ない.

Case *II***.**　R は type 2.

このとき $(N^{c\prime}, \delta^c)$ は 2 つの product sutured manifolds の和集合になっている．これらの product sutured manifolds を $(N_a{}^{c\prime}, \delta_a{}^c)$，$(N_b{}^{c\prime}, \delta_b{}^c)$ と書く．

$\overline{D^*} \subset N_a{}^{c\prime}$ とする．$R_+(\delta^c)$，$R_-(\delta^c)$ は connected だから，D^+handle, D^-handle は $N_a{}^{c\prime}$ と $N_b{}^{c\prime}$ をつなぐ．$\overline{D^*}$ は N^c を 2 つの component に分けるから，$N_a{}^{c\prime}$ を 2 つの components $N_{a1}{}^{c\prime}$，$N_{a2}{}^{c\prime}$ に分ける．$R_+(\delta_i{}^c)$，$R_-(\delta_i{}^c)$ は connected だから，D^+handle, D^-handle はともに $N_{a1}{}^{c\prime} \cup N_b{}^{c\prime}$(または $N_{a2}{}^{c\prime} \cup N_b{}^{c\prime}$) に attach される．

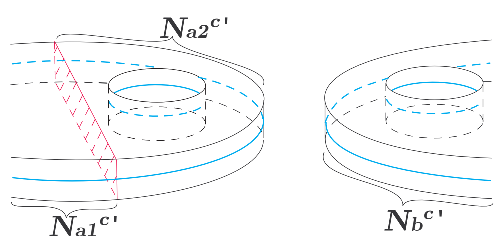


図 4.33: $N_{a1}{}^{c\prime}$，$N_{a2}{}^{c\prime}$，$N_b{}^{c\prime}$

ここでは D^+handle, D^-handle がともに $N_{a2}{}^{c\prime} \cup N_b{}^{c\prime}$ に attach されるとする.(図 4.34)

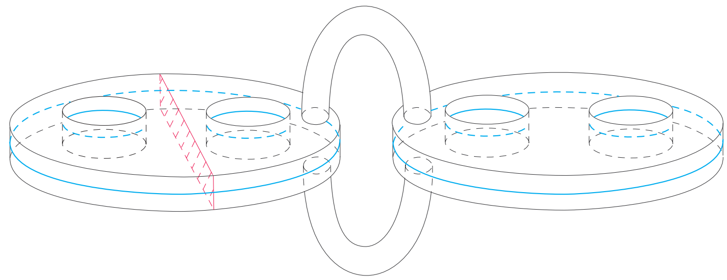


図 4.34: Case II

Proposition 2.10 より ${N_1}^c$, ${N_2}^c$ は N^c を $\overline{D^*}$ で cut して suture を図 4.35 のようにつなげて得られる.

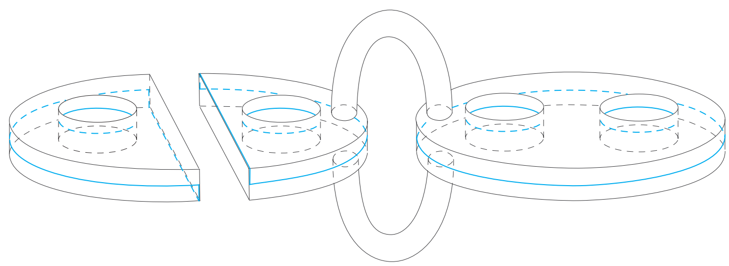


図 4.35: Case II

これは R_1 が fiber surface, R_2 が pre-fiber surface であることを意味している.

以上で定理 1 が証明できた.

5 定理 2 の証明

定理 2 R を pre-fiber surface とする．いま R は 2 つの surfaces R_1, R_2 の plumbing になっているとする．このとき R_1 または R_2 は pre-fiber surface である．

<u>証明</u> いま D, B_1, B_2, (N^c, δ^c), $(N_i{}^c, \delta_i{}^c)$, D^*, $\overline{D^*}$ を 2.4 節の通りとする．また D^+, D^- を (N^c, δ^c) の canonical compressing disks の pair とする．(したがって (N^c, δ^c) を $D^+ \cup D^-$ で cut して得られる多様体を $N^{c\prime}$ とすると，$(N^{c\prime}, \delta^c)$ は $(F \times [0,1], \partial F \times [0,1])$ に homeomorphic である.) いま innnermost disk argument により，$\overline{D^*} \cap (D^+ \cup D^-)$ の各 component は arc α であるとしてよい．いま $\partial\alpha$ が $\partial D^* \cap (R_\pm(\delta^c))$ の 1 つの component に含まれるときは type A，そうでないときは type B と呼ぶことにする．

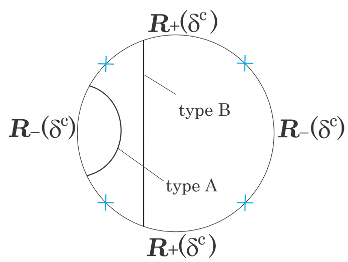


図 5.36: $\overline{D^*} \cap (D^+ \cap D^-)$

Type A arc に対しては outermost arc argument を適用することによりそれらを消してしまうことができるので予め D^+, D^- を取り直すことにより $\overline{D^*} \cap (D^+ \cup D^-)$ の各 compoment は type B arc であるとしてよい．またこれらの arcs は全て $R_+(\delta^c)$ 内の 2 点を結んでいるとしてよい．(図 5.37)

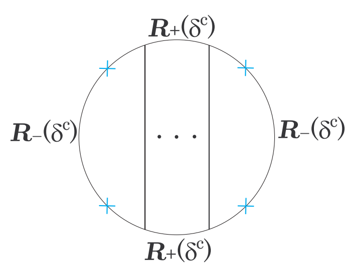


図 5.37: Type B arc

Claim. (N^c, δ^c) 内の product disks $\overline{D_1}$, $\overline{D_2}$ で次のようなものが存在する．

1. $(\overline{D_1} \cup \overline{D_2}) \cap (D^+ \cup D^-) = \emptyset$
2. $R_+(\delta^c)$ 内の arc β で次のようなものが存在する．
   (a) $\beta \cap \overline{D_1} = \partial\beta \cap \overline{D_1}$:1 点
   $\beta \cap \overline{D_2} = \partial\beta \cap \overline{D_2}$:1 点
   (b) $\overline{D^*}$ は $\overline{D_1} \cup \overline{D_2}$ に β に沿って band を attach して得られる disk に (N^c, δ^c) で properly isotopic である．

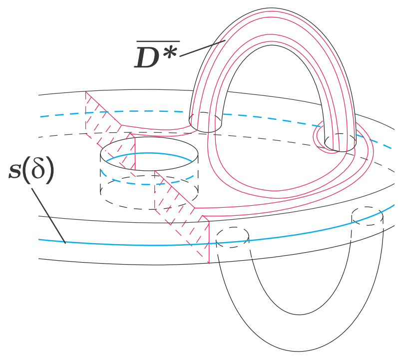


図 5.38: Dual disk $\overline{D^*}$

Claim の証明. いま $\overline{D^*} \cap (D^+ \cup D^-) = \emptyset$ とする．このとき $\overline{D^*}$ を $F \times [0,1]$ 内の disk と考えると，付録 1 の定理の 3 より Claim は直ちにわかる．よって以下では $\overline{D^*} \cap (D^+ \cup D^-) = \emptyset$ とする．このとき $\overline{D^*} \cap (D^+ \cup D^-)$ の各 component は type B だから，$\overline{D^*}$ を $\overline{D^*} \cap (D^+ \cup D^-)$ で cut することにより，2 つの 2 角形 Δ_1，Δ_2 と $n-1$ 個の 4 角形 $R_i (i = 1, \ldots, n-1)$ が得られる．

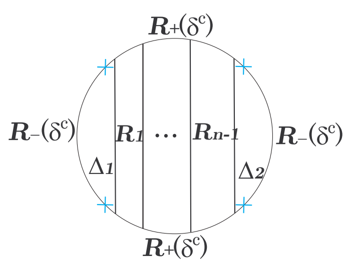


図 5.39: Δ_1，Δ_2

ここで $\Delta_j (j = 1, 2)$，R_i は $F \times [0,1]$ に proper に embed された disks とみなす．このとき付録 1 の定理の 2 より各 Δ_j は $F \times [0,1]$ 内の product disk，付録 1 の定理 1 より各 R_i は $F \times \{1\}$ に

parallel な disk になっていることがわかる．$\overline{D^*}$ はこれらの disks を次々とつなげて得られるが，Δ_i を $\overline{D_i}$ とみなすことにより Claim が従う．

いま R は pre-fiber surface だから connected である．したがって R_1，R_2 も connected である．いま $\overline{D^*}$ は N^c を分けるから $\overline{D_1} \cup \overline{D_2}$ も N^c を分ける．

Case I**.** R は type 1.

Case 1. $\overline{D_1} \cup \overline{D_2}$ は $(N^{c\prime}, \delta^c)$ を 2 つの components M_1，M_2 に分ける．

いま β は M_2 側に含まれるとする．

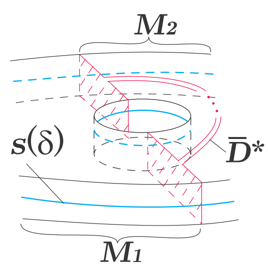


図 5.40: M_1，M_2

Case 1.1. D^+ handle, D^- handle ともに M_2 に attach される．

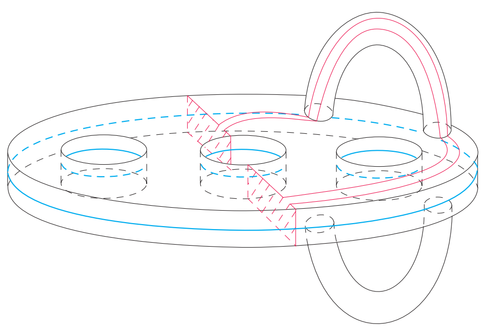


図 5.41: Case 1.1.

このとき ${N_2}^c$ は M_2 に D^+ handle, D^- handle を attach して得られる．また Proposition 2.10 により ${\delta_2}^c$ に対応する suture は次のいずれかである．(図 5.42(a), (b))

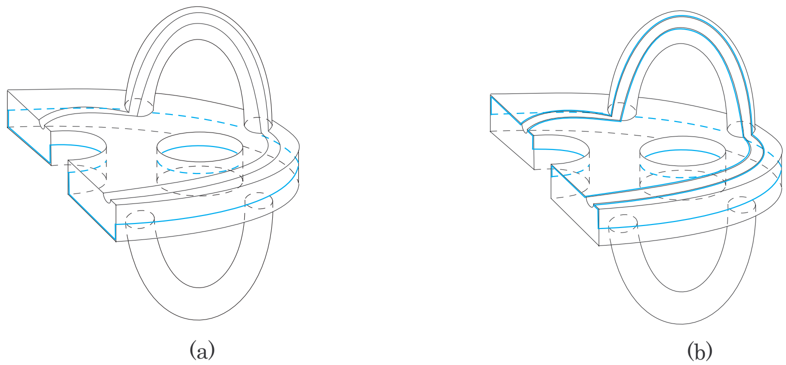


図 5.42: Case 1.1.

しかしいま $R_+(\delta_2{}^c)$ と $R_-(\delta_2{}^c)$ は homeomorphic であるから (b) は起こり得ない．よって (a) が成り立っており，これは R_2 が pre-fiber surface であることを意味している．またこのとき，suture のつき方を見ると R_1 は fiber surface になることがわかる．

Case 1.2. D^+ handle が M_2 に attach され，D^- handle が M_1 に attach される．

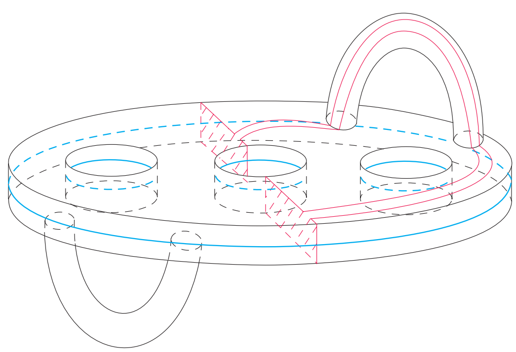


図 5.43: Case 1.2.

このとき $N_1{}^c$ は M_1 に，D^- handle と β に対応する 1-handle を attach して得られる． また Proposition 2.10 により $\delta_1{}^c$ に対応する suture は次のいずれかである．(図 5.44(a), (b))

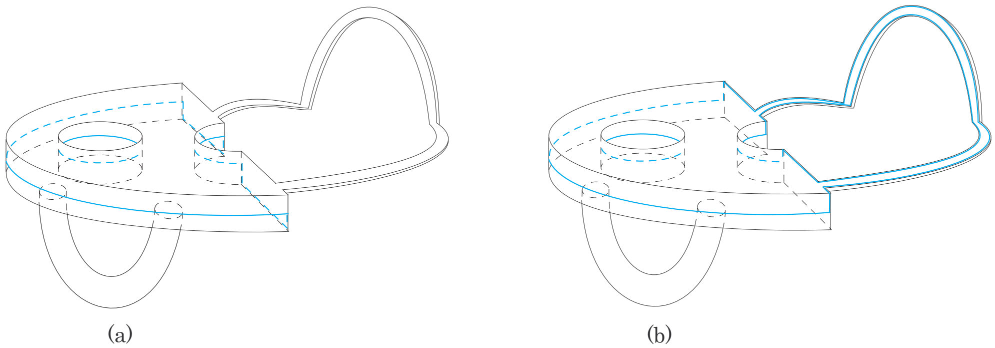


図 5.44: Case 1.2.

しかしいま $R_+(\delta_1{}^c)$ と $R_-(\delta_1{}^c)$ は homeomorphic であるから (b) は起こり得ない. よって (a) が成り立っており, これは R_1 が pre-fiber surface であることを意味している.

注意 図 5.45 のように $\overline{D^*}$ をとると, R_2 が fiber surface にならないことがわかる.

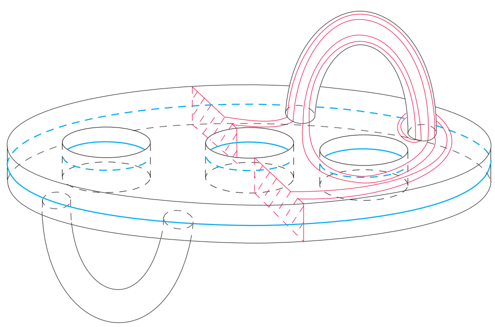


図 5.45: R_2 が fiber surface にならない例

Case 1.3. D^+ handle, D^- handle ともに M_1 に attach される.

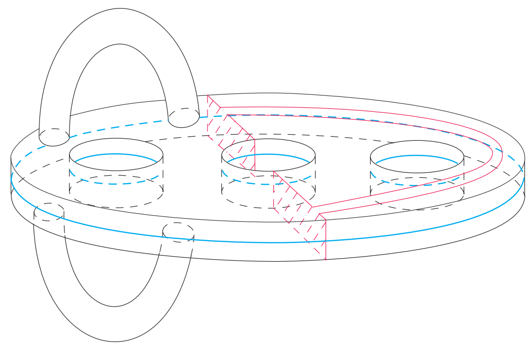


図 5.46: Case 1.3.

このとき $N_1{}^c$ は M_1 に, D^+ handle, D^- handle と β に対応する 1-handle を attach して得られる．また Proposition 2.10 により $\delta_1{}^c$ に対応する suture は次のいずれかである．(図 5.47(a), (b))

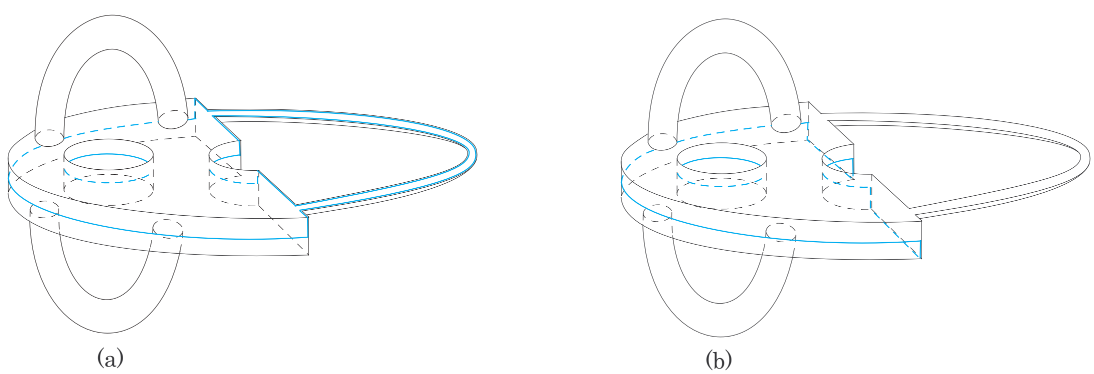


図 5.47: Case 1.3.

しかしいま $R_+(\delta_1{}^c)$ と $R_-(\delta_1{}^c)$ は homeomorphic であるから (b) は起こり得ない．よって (a) が成り立っており，これは R_1 が pre-fiber surface であることを意味している．またこのとき，R_2 は fiber surface になることがわかる．

Case 1.4. D^+ handle が M_1 に attach され，D^- handle が M_2 に attach される．

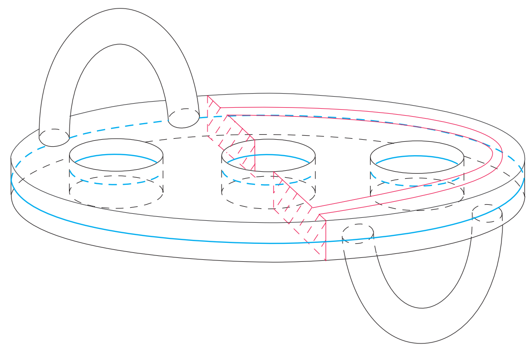


図 5.48: Case 1.4.

このとき $N_2{}^c$ は M_2 に D^- handle を attach して得られる．また Proposition 2.10 により $\delta_2{}^c$ に対応する suture は次のいずれかである．(図 5.49(a), (b))

図 5.49: Case 1.4.

しかしいま $R_+(\delta_2{}^c)$ と $R_-(\delta_2{}^c)$ は homeomorphic であるから (a) も (b) も起こり得ない．よって Case 1.4 は起こり得ない．

Case 2. $\overline{D_1} \cup \overline{D_2}$ は $(N^{c\prime}, \delta^c)$ を 3 つの components M_1, $M_1{}'$, M_2 に分ける．

ここで M_1, $M_1{}'$ は $N_1{}^c$ に対応し，M_2 は $N_2{}^c$ に対応しているとする．いま N_1^c は connected だから，β は必ず M_2 に含まれ，M_1 と $M_1{}'$ をつなぐ．

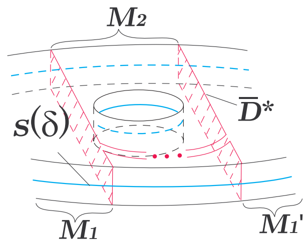


図 5.50: M_1, ${M_1}'$, M_2

Case 2.1. D^+ handle, D^- handle がともに $M_1 \cup {M_1}'$ に attach される.

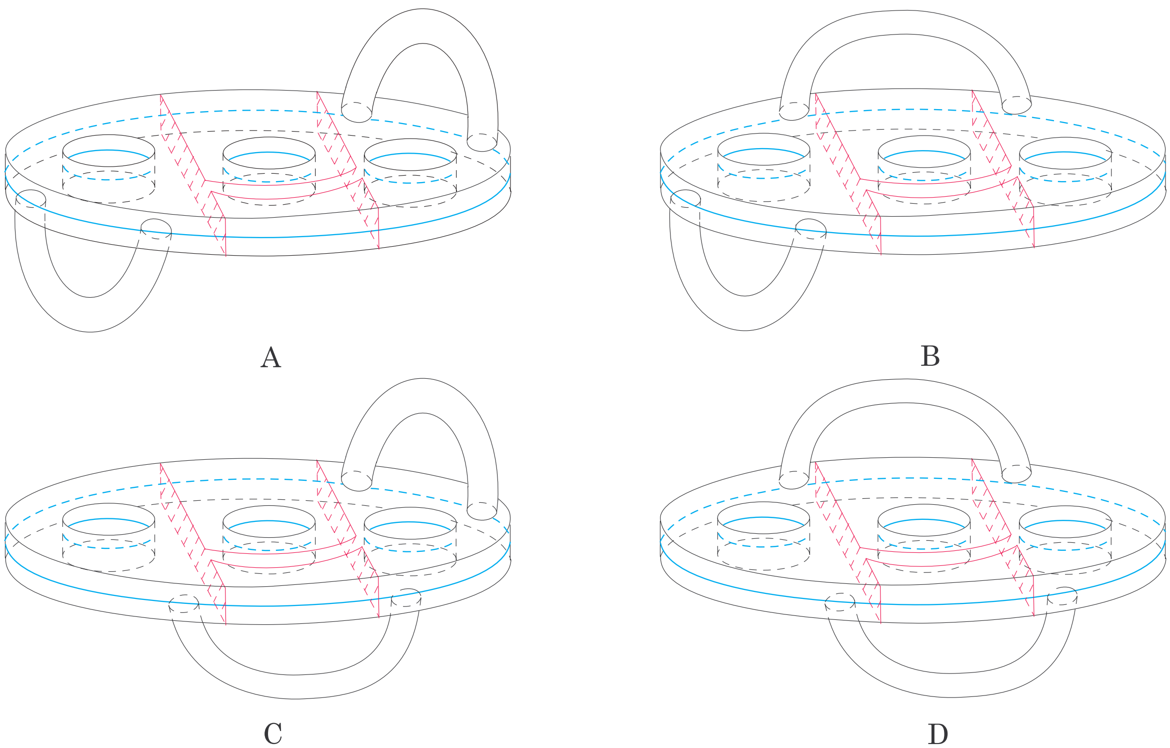


図 5.51: Case 2.1.

D^+ handle, D^- handle の $M_1 \cup {M_1}'$ への attach のされ方は図 5.51 のいずれかである．このとき ${N_1}^c$ は $M_1 \cup {M_1}'$ に，D^+ handle, D^- handle と β に対応する 1-handle を attach して得られる．また Proposition 2.10 により ${\delta_1}^c$ に対応する suture は次のいずれかである．(図 5.52A(a), B(a), C(a), D(a), A(b), B(b), C(b), D(b))

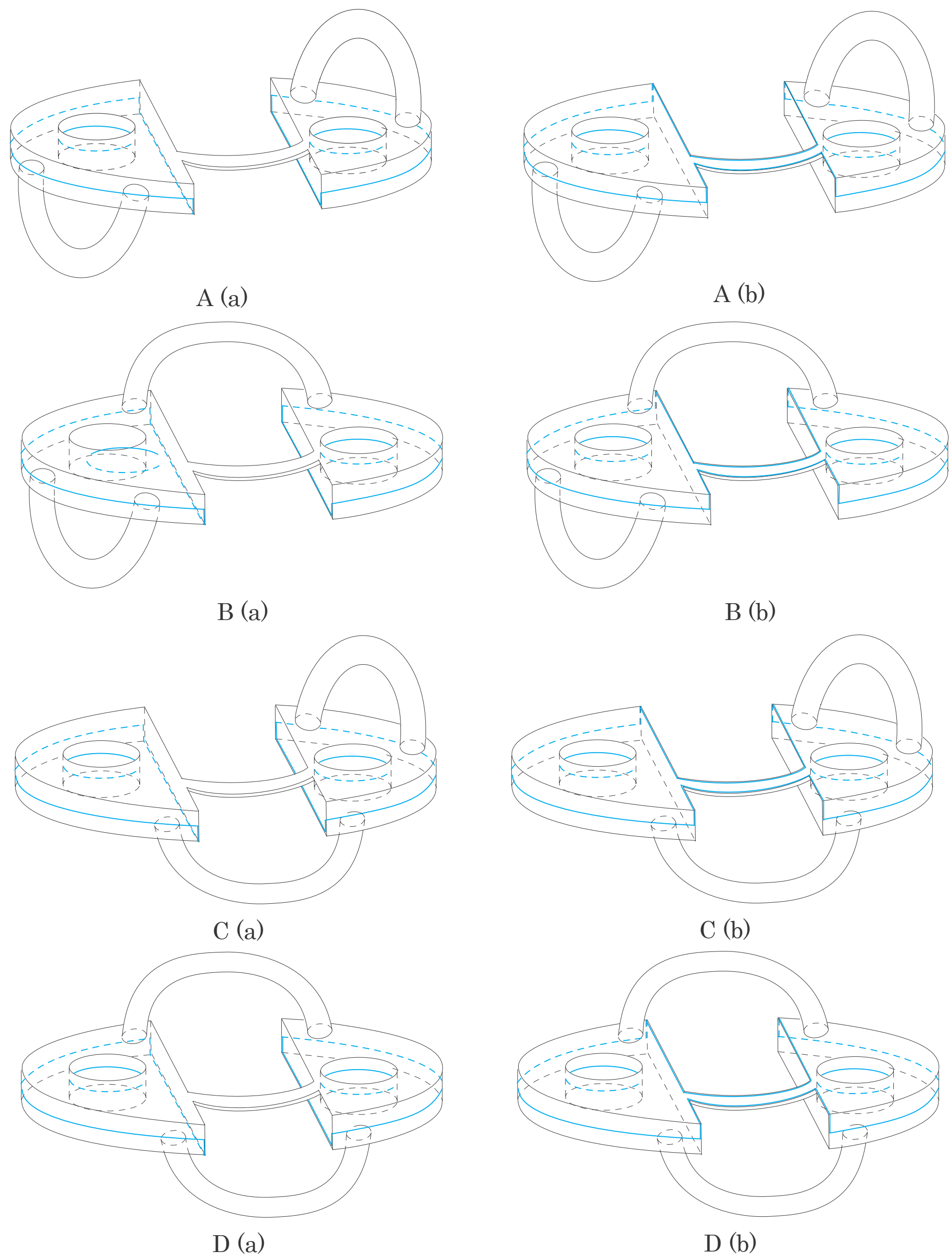


図 5.52: Case 2.1.

しかしいま $R_+(\delta_1{}^c)$ と $R_-(\delta_1{}^c)$ は homeomorphic であるから A(a), B(a), C(a), D(a) は起こり

得ない．よって A(b), B(b), C(b), D(b) が成り立っており，これは R_1 が pre-fiber surface であることを意味している．またこのとき，R_2 は fiber surface になっている．

Case 2.2. D^+ handle が M_2 に attach され，D^- handle が $M_1 \cup M_1{}'$ に attach される．

$R_-(\delta_1^c)$ は connected だから D^-handle は M_1 と $M_1{}'$ をつなぐ．

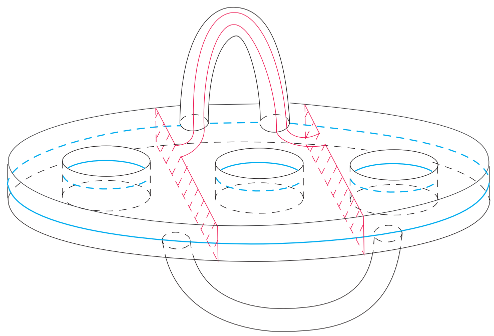


図 5.53: Case 2.2.

このとき $N_1{}^c$ は $M_1 \cup M_1{}'$ に，D^-handle と β に対応する 1-handle を attach して得られる．また Proposition 2.10 により $\delta_1{}^c$ に対応する suture は次のいずれかである．(図 5.54(a), (b))

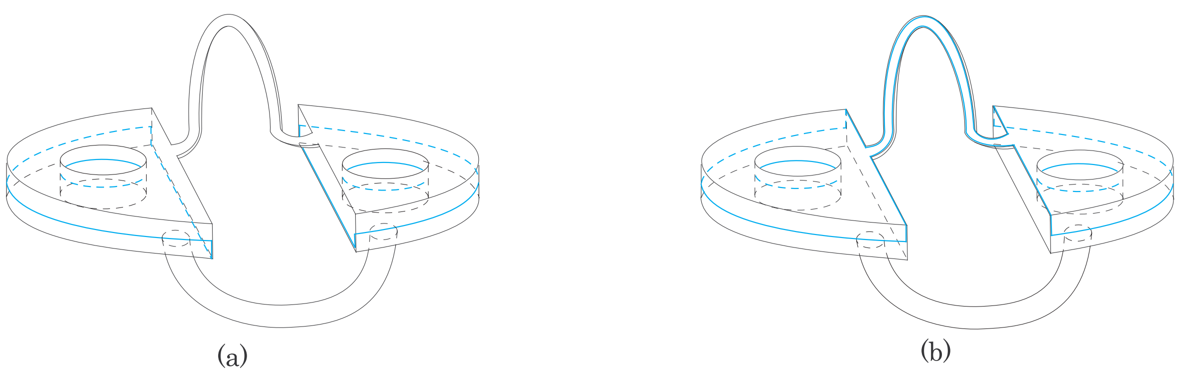


図 5.54: Case 2.2.

しかしこの場合，(b) は $R_+(\delta_1{}^c)$ と $R_-(\delta_1{}^c)$ が homeomorphic にならないので矛盾する．よって (a) が成り立っており，これは R_2 が pre-fiber surface であることを意味している．またこのとき，R_1 は fiber surface になっている．

Case 2.3. D^+ handle が $M_1 \cup M_1{}'$ に attach され，D^- handle が M_2 に attach される．

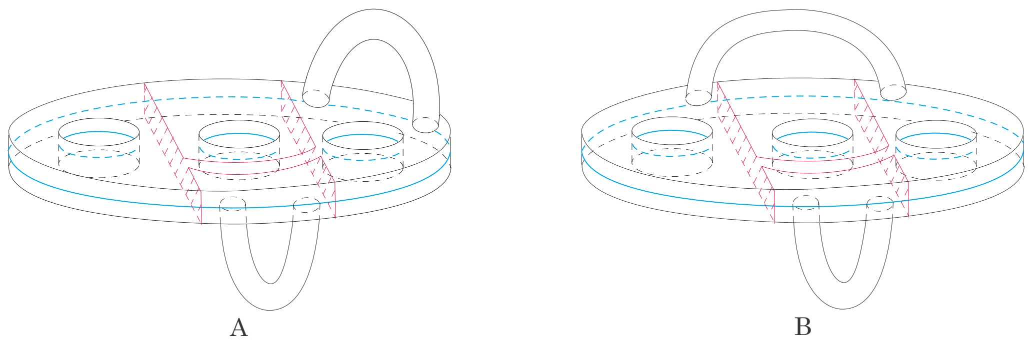


図 5.55: Case 2.3.

D^+ handle の $M_1 \cup M_1{}'$ への attach のされ方は図 5.55 のいずれかである．このとき $N_1{}^c$ は $M_1 \cup M_1{}'$ に, D^+handle と β に対応する 1-handle を attach して得られる．また Proposition 2.10 により $\delta_1{}^c$ に対応する suture は次のいずれかである．(図 5.56A(a), B(a), A(b), B(b))

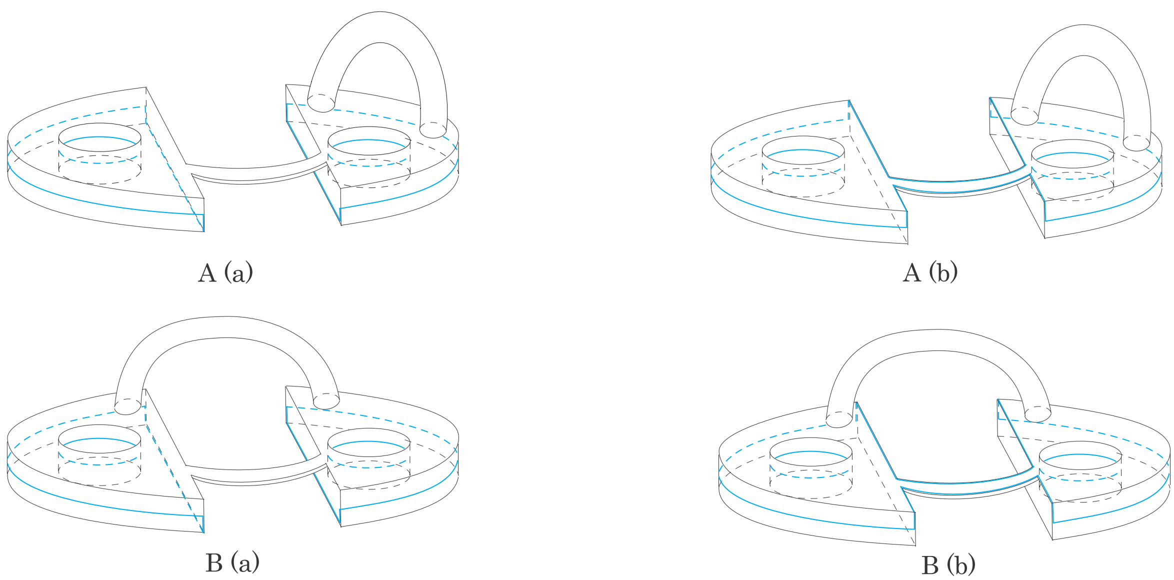


図 5.56: Case 2.3.

しかし, いずれの場合も $R_+(\delta_1{}^c)$ と $R_-(\delta_1{}^c)$ が homeomorphic にならないので矛盾する．よって Case 2.3 は起こり得ない．

Case 2.4. D^+ handle, D^- handle ともに M_2 に attach される.

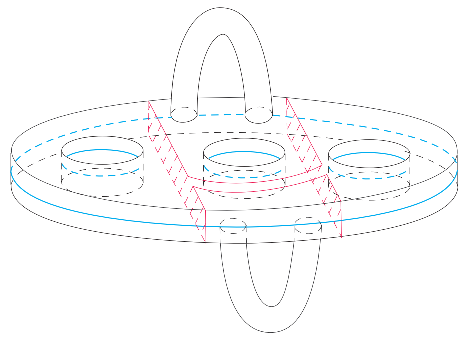


図 5.57: Case 2.4.

このとき ${N_2}^c$ は M_2 に D^+handle, D^-handle を attach して得られる. また Proposition 2.10 により ${\delta_2}^c$ に対応する suture は次のいずれかである. (図 5.58(a), (b))

(a) (b)

図 5.58: Case 2.4.

しかしいま, $R_+({\delta_2}^c)$ と $R_-({\delta_2}^c)$ は homeomorphic であるから (b) は起こり得ない. よって (a) が成り立っており, これは R_2 が pre-fiber surface であることを意味している. またこのとき, R_1 は fiber surface になっている.

Case *II*. R は type 2.

このとき $(N^{c\prime}, \delta^c)$ は 2 つの product sutured manifolds の和集合になっている. これらの product sutured manifolds を $({N_a}^{c\prime}, {\delta_a}^c)$, $({N_b}^{c\prime}, {\delta_b}^c)$ と書く.

Case 1. $\overline{D_1}$ は ${N_a}^{c\prime}$ に含まれ, $\overline{D_2}$ は ${N_b}^{c\prime}$ に含まれる.

$\overline{D_1}$, $\overline{D_2}$ は $(N^{c\prime}, \delta^c)$ を 4 つの components ${N_{a1}}^{c\prime}$, ${N_{a2}}^{c\prime}$, ${N_{b1}}^{c\prime}$, ${N_{b2}}^{c\prime}$ に分ける. ただし ${N_{ai}}^{c\prime}$, ${N_{bi}}^{c\prime}$ は ${N_i}^c (i = 1, 2)$ に含まれているとする.
D^+handle は ${N_{a2}}^{c\prime}$ と ${N_{b2}}^{c\prime}$ をつなぐとしてよい. このとき $R_+(\delta^c)$ は connected だから β は ${N_{a1}}^{c\prime}$ と ${N_{b1}}^{c\prime}$ をつなぐ.

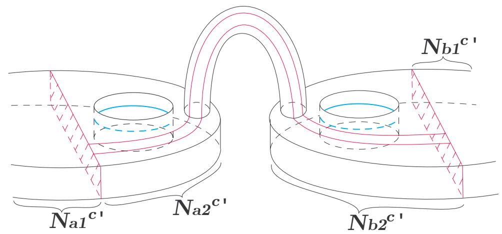


図 5.59: ${N_{a1}}^{c\prime}$, ${N_{a2}}^{c\prime}$, ${N_{b1}}^{c\prime}$, ${N_{b2}}^{c\prime}$

Case 1.1. D^- handle が ${N_{a2}}^{c\prime} \cup {N_{b2}}^{c\prime}$ に attach される.

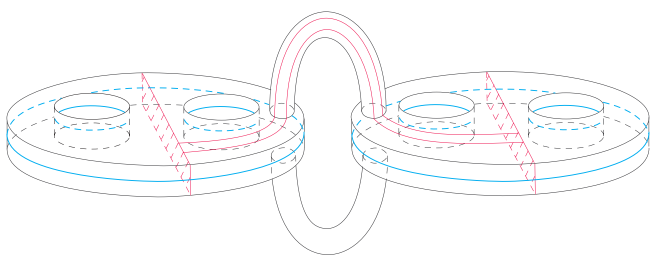


図 5.60: Case 1.1.

このとき ${N_2}^c$ は ${N_{a2}}^{c\prime} \cup {N_{b2}}^{c\prime}$ に D^+handle, D^-handle を attach して得られる. また Proposition 2.10 により ${\delta_2}^c$ に対応する suture は次のいずれかである. (図 5.61(a), (b))

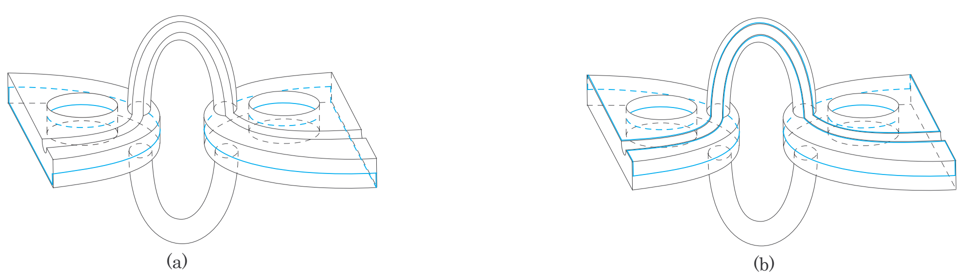


図 5.61: Case 1.1.

しかしいま $R_+(\delta_2{}^c)$ と $R_-(\delta_2{}^c)$ は homeomorphic であるから (b) は起こり得ない．よって (a) が成り立っており，これは R_2 が pre-fiber surface であることを意味している．またこのとき，R_1 は fiber surface になっている．

Case 1.2. D^- handle が $N_{a1}{}^{c\prime} \cup N_{b1}{}^{c\prime}$ に attach される．

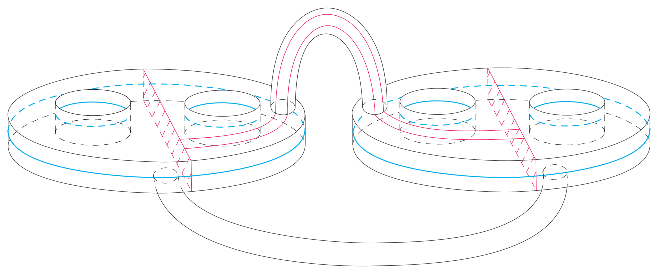
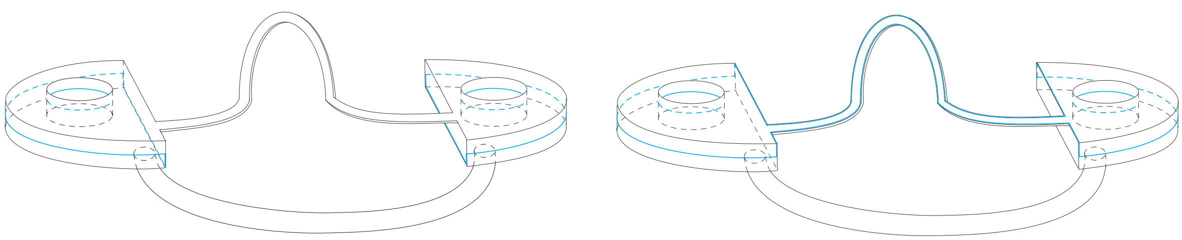


図 5.62: Case1.2

このとき $N_1{}^c$ は $N_{a1}{}^{c\prime} \cup N_{b1}{}^{c\prime}$ に D^- handle と β に対応する 1-handle を attach して得られる．また Proposition 2.10 により $\delta_1{}^c$ に対応する suture は次のいずれかである．(図 5.63(a), (b))



(a) (b)

図 5.63: Case1.2

しかしいま $R_+(\delta_1{}^c)$ と $R_-(\delta_1{}^c)$ は homeomorphic であるから (b) は起こり得ない．よって (a) が成り立っており，これは R_1 が pre-fiber surface であることを意味している．またこのとき，R_2 は fiber surface になっている．

Case 2. $\overline{D_1}$, $\overline{D_2}$ はともに $N_a{}^{c\prime}$ に含まれ，かつ $\overline{D_1} \cup \overline{D_2}$ は $N_a{}^{c\prime}$ を 2 つの components $N_{a1}{}^{c\prime}$, $N_{a2}{}^{c\prime}$ に分ける．

ここでは β が $N_{a1}{}^{c\prime}$ 側に含まれるとしてよい．

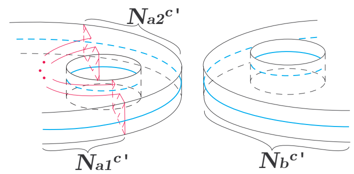


図 5.64: $N_{a1}{}^{c\prime}$, $N_{a2}{}^{c\prime}$, $N_b{}^{c\prime}$

Case 2.1. D^+ handle, D^- handle ともに $N_{a2}{}^{c\prime} \cup N_b{}^{c\prime}$ に attach される.

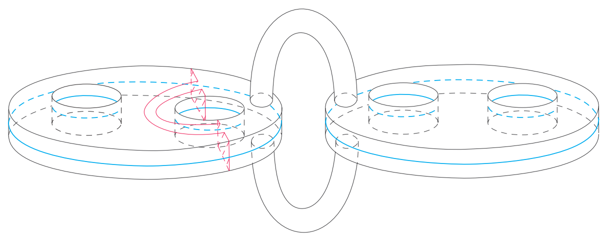


図 5.65: Case 2.1.

このとき $N_2{}^c$ は $N_{a2}{}^{c\prime} \cup N_b{}^{c\prime}$ に D^+ handle, D^-handle と β に対応する 1-handle を attach して得られる．また Proposition 2.10 により $\delta_2{}^c$ に対応する suture は次のいずれかである．(図 5.66(a), (b))

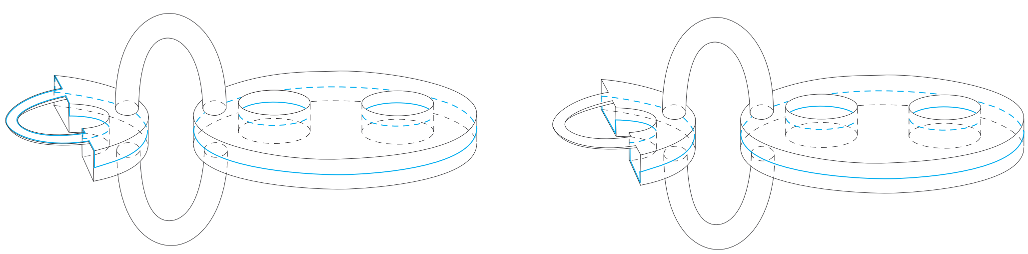


図 5.66: Case 2.1.

しかしいま $R_+(\delta_2{}^c)$ と $R_-(\delta_2{}^c)$ は homeomorphic であるから (b) は起こり得ない．よって (a) が成り立っており，これは R_2 が pre-fiber surface であることを意味している．またこのとき，R_1 は fiber surface になっている．

Case 2.2. D^+ handle, D^- handle ともに $N_{a1}{}^{c\prime} \cup N_b{}^{c\prime}$ に attach される.

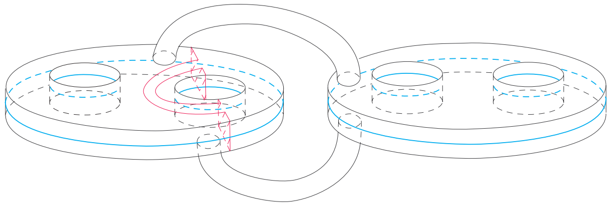


図 5.67: Case 2.2.

このとき $N_1{}^c$ は $N_{a1}{}^{c\prime} \cup N_b{}^{c\prime}$ に D^+ handle, D^-handle を attach して得られる．また Proposition 2.10 により $\delta_1{}^c$ に対応する suture は次のいずれかである．(図 5.68(a), (b))

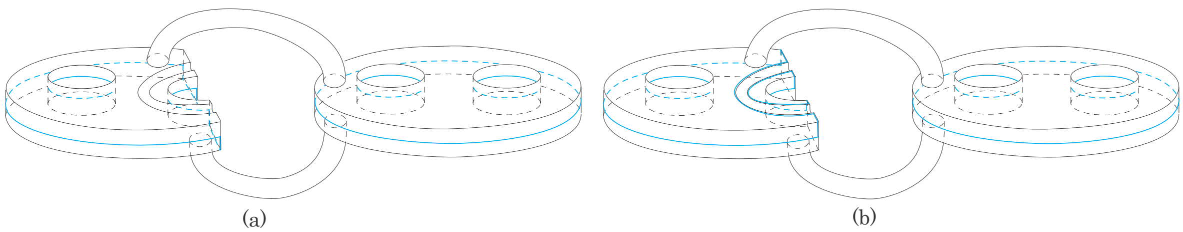


図 5.68: Case 2.2.

しかしいま $R_+(\delta_1{}^c)$ と $R_-(\delta_1{}^c)$ は homeomorphic であるから (b) は起こり得ない．よって (a) が成り立っており，これは R_1 が pre-fiber surface であることを意味している．またこのとき，R_2 は fiber surface になっている．

Case 3. $\overline{D_1}$, $\overline{D_2}$ はともに $N_a{}^{c\prime}$ に含まれ，かつ $\overline{D_1} \cup \overline{D_2}$ は $N_a{}^{c\prime}$ を 3 つの components $N_{a1}{}^{c\prime}$, $N_{a2(1)}{}^{c\prime}$, $N_{a2(2)}{}^{c\prime}$ に分ける．

$N_{a2(1)}{}^{c\prime}$, $N_{a2(2)}{}^{c\prime}$ は $N_2{}^c$ に含まれるとしてよい．
いま $N_2{}^c$ は connected だから，β は必ず $N_{a1}{}^{c\prime}$ に含まれ，$N_{a2(1)}{}^{c\prime}$ と $N_{a2(2)}{}^{c\prime}$ をつなぐ．

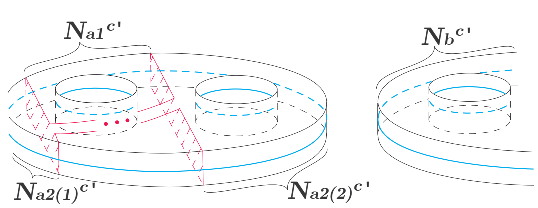


図 5.69: $N_{a1}{}^{c\prime}$, $N_{a2(1)}{}^{c\prime}$, $N_{a2(2)}{}^{c\prime}$, $N_b{}^{c\prime}$

Case 3.1. D^+ handle, D^- handle ともに ${N_{a2(1)}}^{c\prime} \cup {N_{a2(2)}}^{c\prime} \cup {N_b}^{c\prime}$ に attach される.

D^+ handle, D^-handle は ${N_a}^{c\prime}$ と ${N_b}^{c\prime}$ をつなぐから, ${N_{a2(1)}}^{c\prime} \cup {N_{a2(2)}}^{c\prime}$ と ${N_b}^{c\prime}$ をつなぐ.
このとき D^+ handle, D^-handle の attach のされ方は図 5.70 のいずれかである.

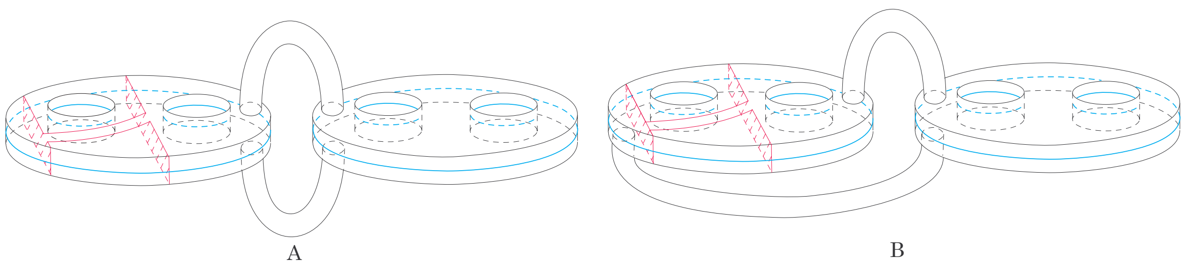


図 5.70: Case3.1

このとき ${N_2}^c$ は ${N_{a2(1)}}^{c\prime} \cup {N_{a2(2)}}^{c\prime} \cup {N_b}^{c\prime}$ に D^+ handle, D^-handle と β に対応する 1-handle を attach して得られる. また Proposition 2.10 により ${\delta_2}^c$ に対応する suture は次のいずれかである. (図 5.71A(a), B(a), A(b), B(b))

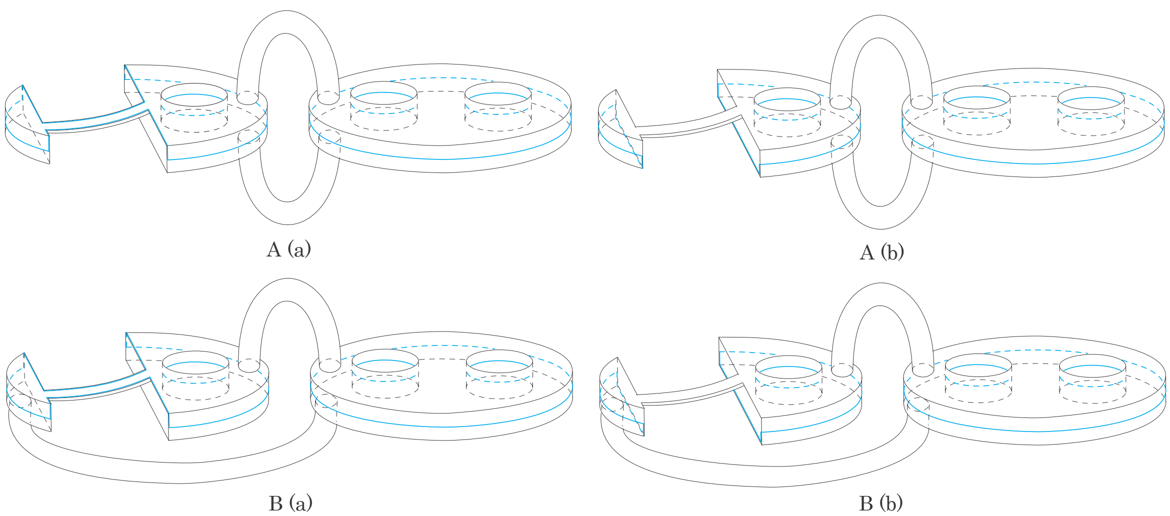


図 5.71: Case3.1

しかしいま $R_+({\delta_2}^c)$ と $R_-({\delta_2}^c)$ は homeomorphic であるから A(b), B(b) は起こり得ない. よって A(a), B(a) が成り立っており, これは R_2 が pre-fiber surface であることを意味している. またこのとき, R_1 は fiber surface になっている.

Case 3.2. D^+ handle, D^- handle ともに ${N_{a1}}^{c\prime}$ に attach される.

$R_+(\delta^c)$, $R_-(\delta^c)$ は connected だから, D^+handle, D^-handle は ${N_{a1}}^{c\prime}$ と ${N_b}^{c\prime}$ をつなぐ.

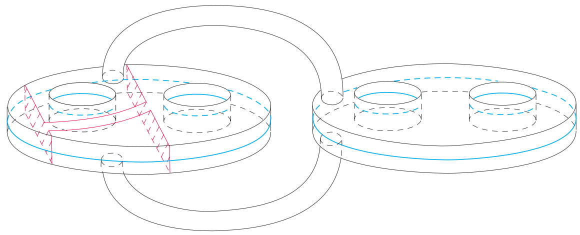


図 5.72: Case 3.2.

このとき ${N_1}^c$ は ${N_{a1}}^{c\prime} \cup {N_b}^{c\prime}$ に D^+ handle, D^-handle を attach して得られる. また Proposition 2.10 により ${\delta_1}^c$ に対応する suture は次のいずれかである. (図 5.73(a), (b))

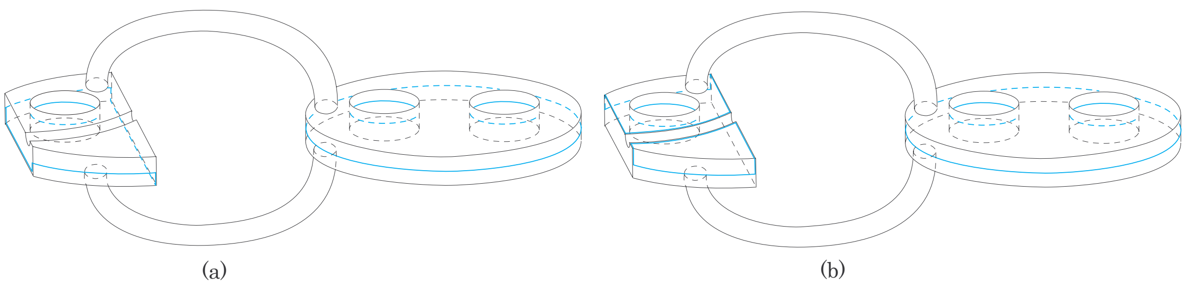


図 5.73: Case 3.2.

しかしいま $R_+({\delta_1}^c)$ と $R_-({\delta_1}^c)$ は homeomorphic であるから (b) は起こり得ない. よって (a) が成り立っており, これは R_1 が pre-fiber surface であることを意味している. またこのとき, R_2 は fiber surface になっている.

以上で定理 2 が証明できた.

6 Pre-fiber surfaces の様々な deplumbing の例

6.1 Pre-fiber surface Σ_1^1 の deplumbing

ここでは pre-fiber surface Σ_1^1 の deplumbing についていくつかの事実を紹介する.

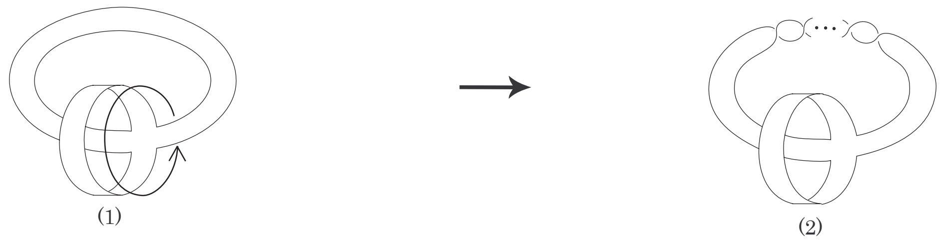


図 6.74:

図 6.74 のように Σ_1^1 を isotopy で変形することにより, Σ_1^1 は (2) のように一部にひねりがはいった形に変形できる. 図 6.75 は 1 回ひねりを入れたもの, 図 6.76 は 2 回ひねりを入れたものである. 図 6.75 より次がわかる.

Fact 6.1 Σ_1^1 は pre-fiber surface と fiber surface(Hopf band) に deplumbing できる.

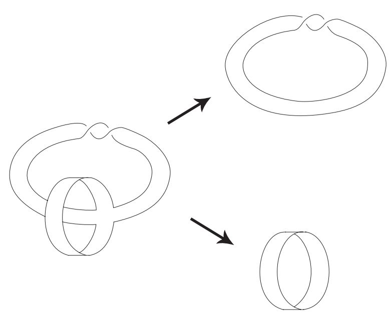


図 6.75: Pre-fiber surface と fiber surface

図 6.76 より次がわかる.

Fact 6.2 Σ_1^1 は pre-fiber surface と non-fiber minimal genus surface(例 2.6) に deplumbing できる.

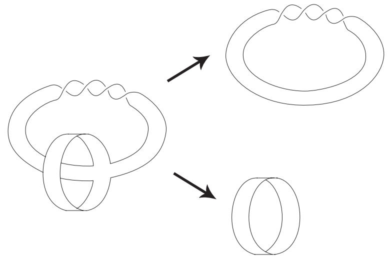


図 6.76: Pre-fiber surface と non-fiber minimal genus surface

図 6.77 より次がわかる.

Fact 6.3 Σ_1^1 は pre-fiber surface と pre-fiber surface に deplumbing できる.

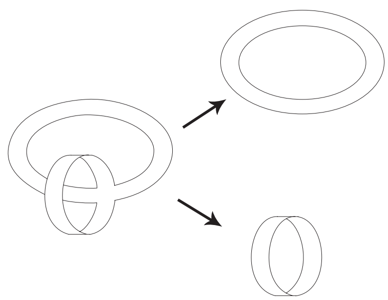


図 6.77: Pre-fiber surface と pre-fiber surface

6.2 Pre-fiber surfaces Σ_g^1, Σ_g^2 の deplumbing

Fact 6.4 Σ_g^1 は Σ_{g-1}^2 と Σ_0^2 の plumbing になっている．また Σ_g^2 は Σ_g^1 と Σ_0^2 の plumbing になっている．特に Σ_g^1 から $2g-1$ 個の Σ_0^2 を次々と deplumbing して Σ_0^2 を得ることができる．また Σ_g^2 から $2g$ 個の Σ_0^2 を次々と deplumbing して Σ_0^2 を得ることができる.

<u>証明</u>　図 6.78 より Σ_g^1 は $2g$ 個の Σ_0^2 を次々と plumbing して得られることがわかる．また同様に Σ_g^2 は $2g+1$ 個の Σ_0^2 を次々と plumbing して得られることがわかる．これより Fact 6.4 が従う.

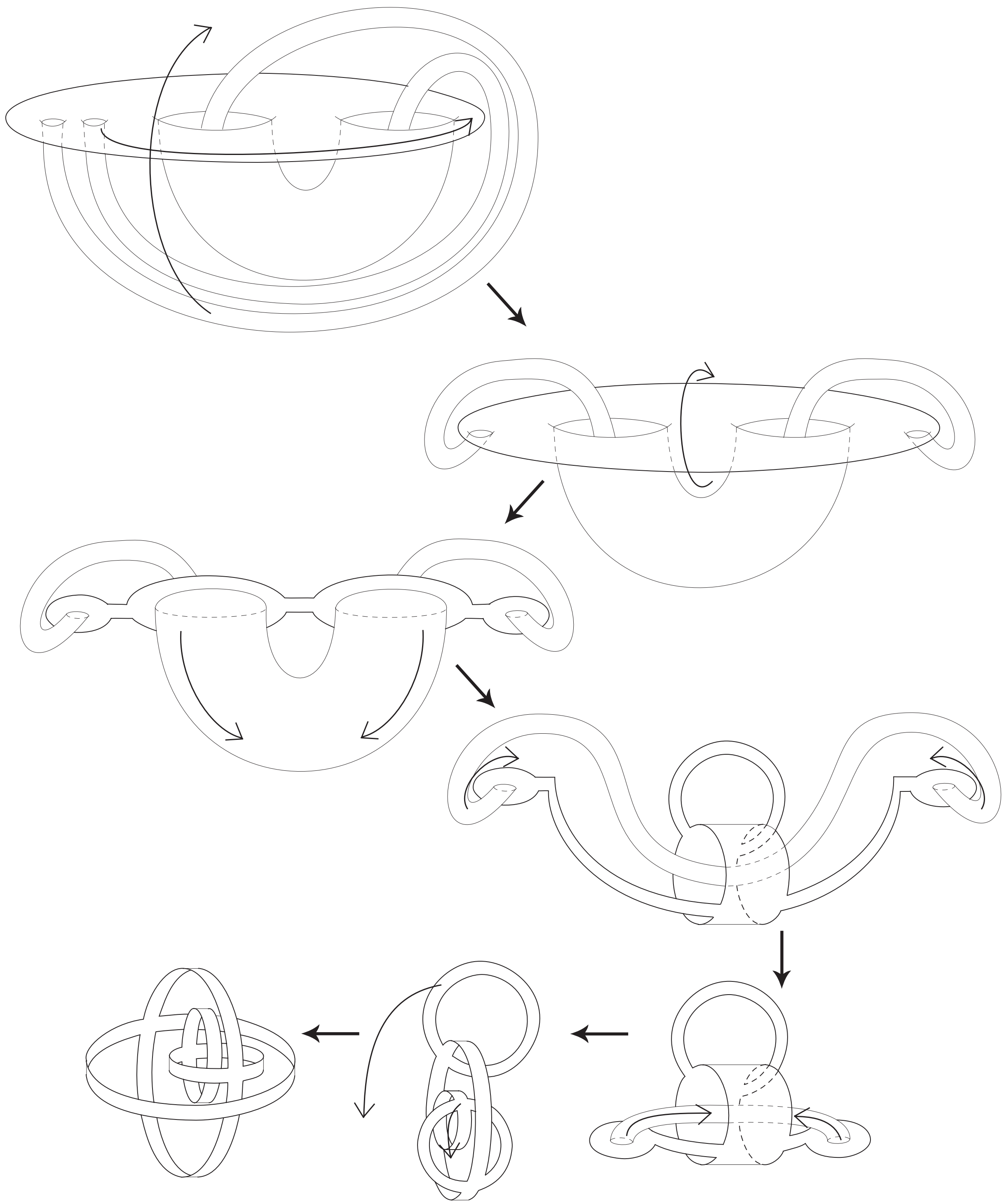


図 6.78: Pre-fiber surface Σ_2^1

次の事実は名古屋工業大学の平澤美可三氏から御教示をいただいた．

Fact A D_g^2 を図 6.79 のような 2-component trivial link の正則表示とする．D_g^2 に定理 2.1 の証明のやり方を適用して得られる Seifert surface は Σ_g^2 である．

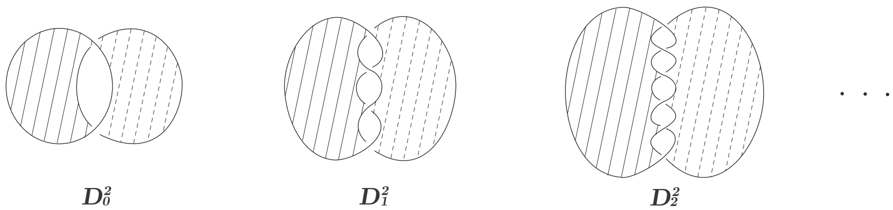


図 6.79: Pre-fiber surface D_g^2

Fact A の証明． 図 6.81 より Σ_1^2 は正則表示 D_1^2 に定理 2.1 の証明のやり方を適用して得られる Seifert surface に isotopic であることがわかる．一般の場合も同様に確かめられる．

Fact B D_g^1 を図 6.80 のような trivial knot の正則表示とする．D_g^1 に定理 2.1 の証明のやり方を適用して得られる Seifert surface は Σ_g^1 である．

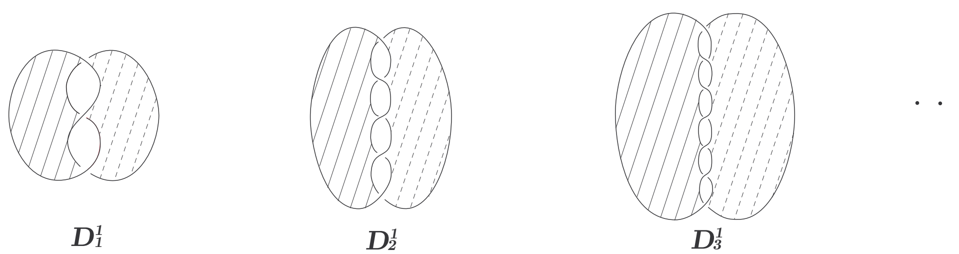


図 6.80: Pre-fiber surface D_g^1

Fact B の証明． 図 6.82 より Σ_1^1 は正則表示 D_1^1 に定理 2.1 の証明のやり方を適用して得られる Seifert surface に isotopic であることがわかる．一般の場合も同様に確かめられる．

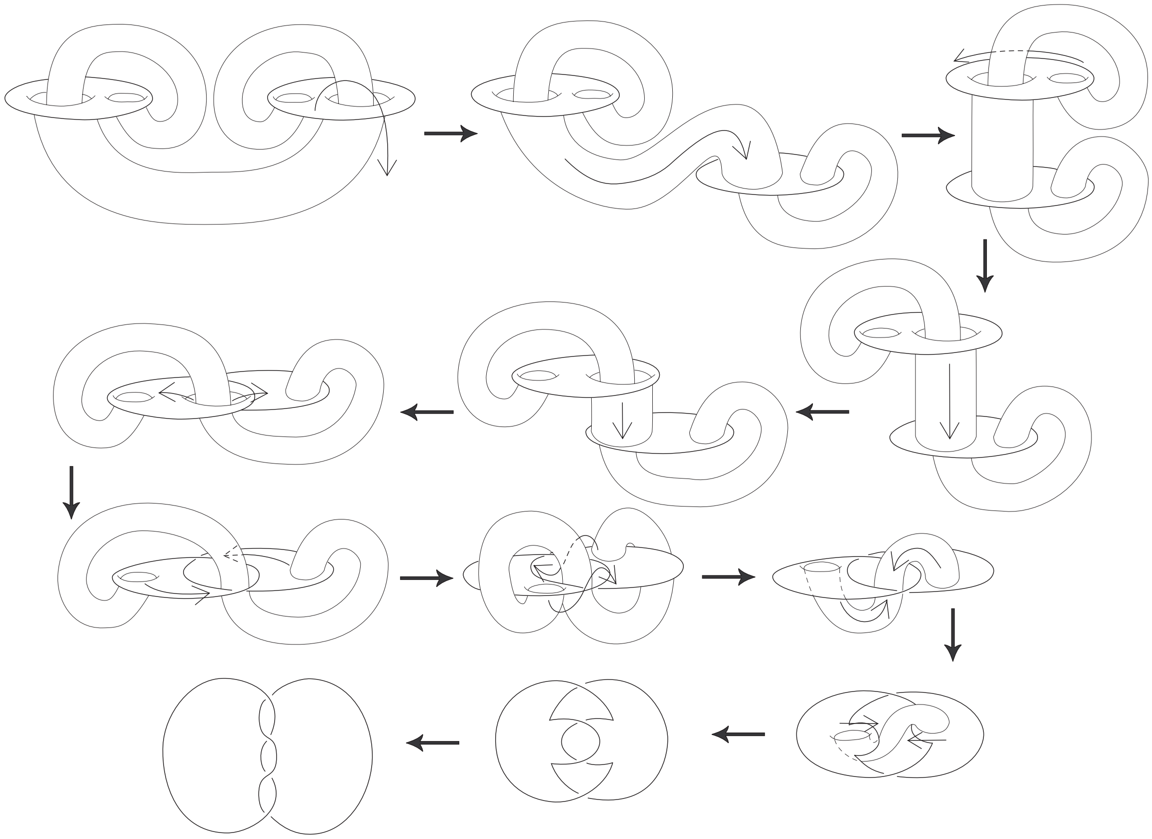


図 6.81:

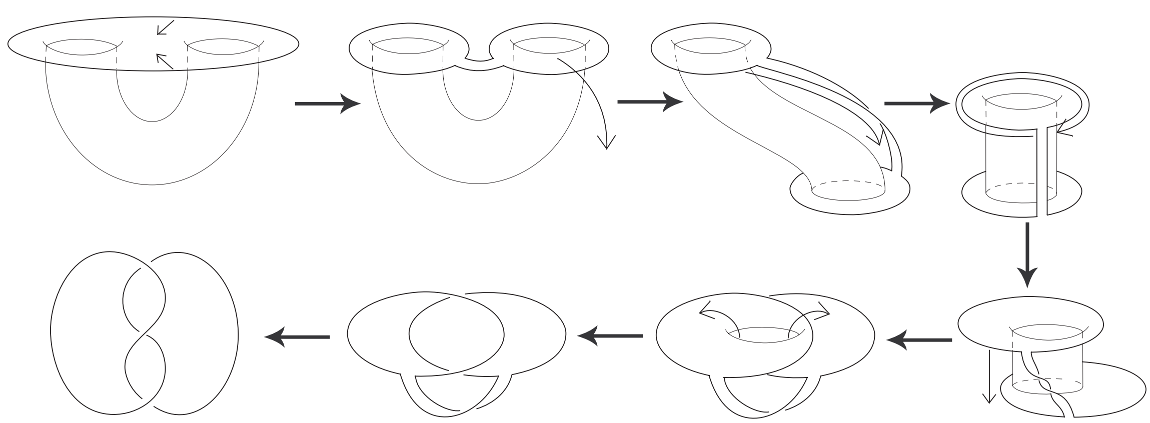


図 6.82:

Facts A,B と Observation 2.9 より次がわかる.

Fact 6.5 Σ_g^1 から g 個の +Hopf band(s) と $g-1$ 個の −Hopf band(s) を deplumbing して Σ_0^2 を得ることができる．また，Σ_g^2 から g 個の +Hopf band(s) と g 個の −Hopf band(s) を deplumbing して Σ_0^2 を得ることができる.

注意 上の deplumbing の process で途中で出てくる Hopf band 以外の surface はすべて pre-fiber surface である.

参考文献

[1] G. K. Francis, *A Topological Picturebook*, Springer-Verlag, 1987

[2] D. Gabai, *Detecting fibered links in* S^3, Comm. Math. Helb. **61** (1986), 519-555

[3] H. Goda, *Heegaard splitting for sutured manifolds and Murasugi sum*, Osaka J. Math. **29** (1992), no. 1, 21–40.

[4] W. Haken, *Some results on surfaces in* 3*-manifolds*, Studies in Morden Topology pp.39-98 Math. Assoc. Amer. distributed by Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1968

[5] M. Sharlemann, A. Thomnpson, *Link genus and Conway moves*, Comment. Math. Helv. 64(1989), no.4, 527-535

[6] T. Kobayashi, *Fiberd links and unknotting operations*, Osaka J. Math. **26** (1989), 699-742

[7] T. Kobayashi, *Fibered links which are band connected sum of two links*, Knots90(Osaka,1990),de Gruyter,Berlin,1992

[8] C. V. Quach, *Invariants des noeuds classiques fibres*, thesis, Universite de Geneve 1981.

[9] 河内明夫 編著「結び目理論」シュプリンガーフェアラーク（東京）社 (1990)

付録 1

定理 F を surface, D を $F \times [0,1]$ に embed された disk とするとき, 次のような disk が存在する.

1. $\partial D \subset F \times [0,1]$ とする. このとき D は $F \times \{0\}$ 内の disk に parallel である.
2. $\partial D \cap (\partial F \times \{\frac{1}{2}\})$:2 点とする. このとき D は $\alpha \times [0,1]$(但し, α は F に proper に embed された arc に isotopic である.)

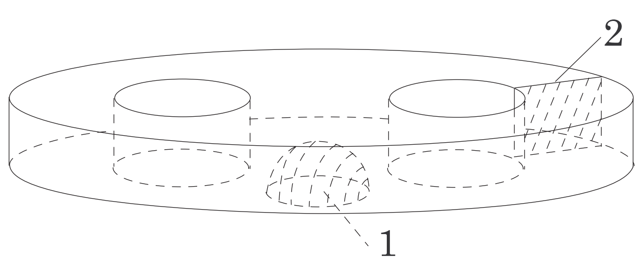


図 6.83:

3. $\partial D \cap (\partial F \times \{\frac{1}{2}\})$:4 点とする．このとき D は $\alpha_1 \times [0,1]$ と $\alpha_2 \times [0,1]$ である．(但し，α_1, α_2 は F に proper に embed された disjoint な arcs に R_+(または R_-) で band をつけて得られる disk に isotopic である.)

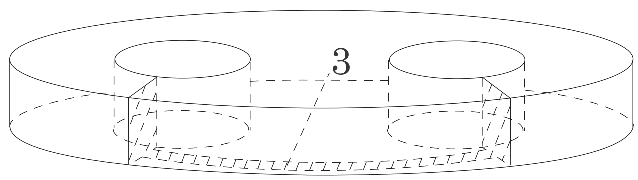


図 6.84:

1 は [4] の Appendix の Lemma, 2, 3 は [3] の Lemma 3.2 より従う.

付録 2

例 ここでは Quach の例 [8] に対して unknotting operation に対応して Hopf band のひねりをほどいて得られる surface が実際に Σ_g^1 に isotopic になることを見る.

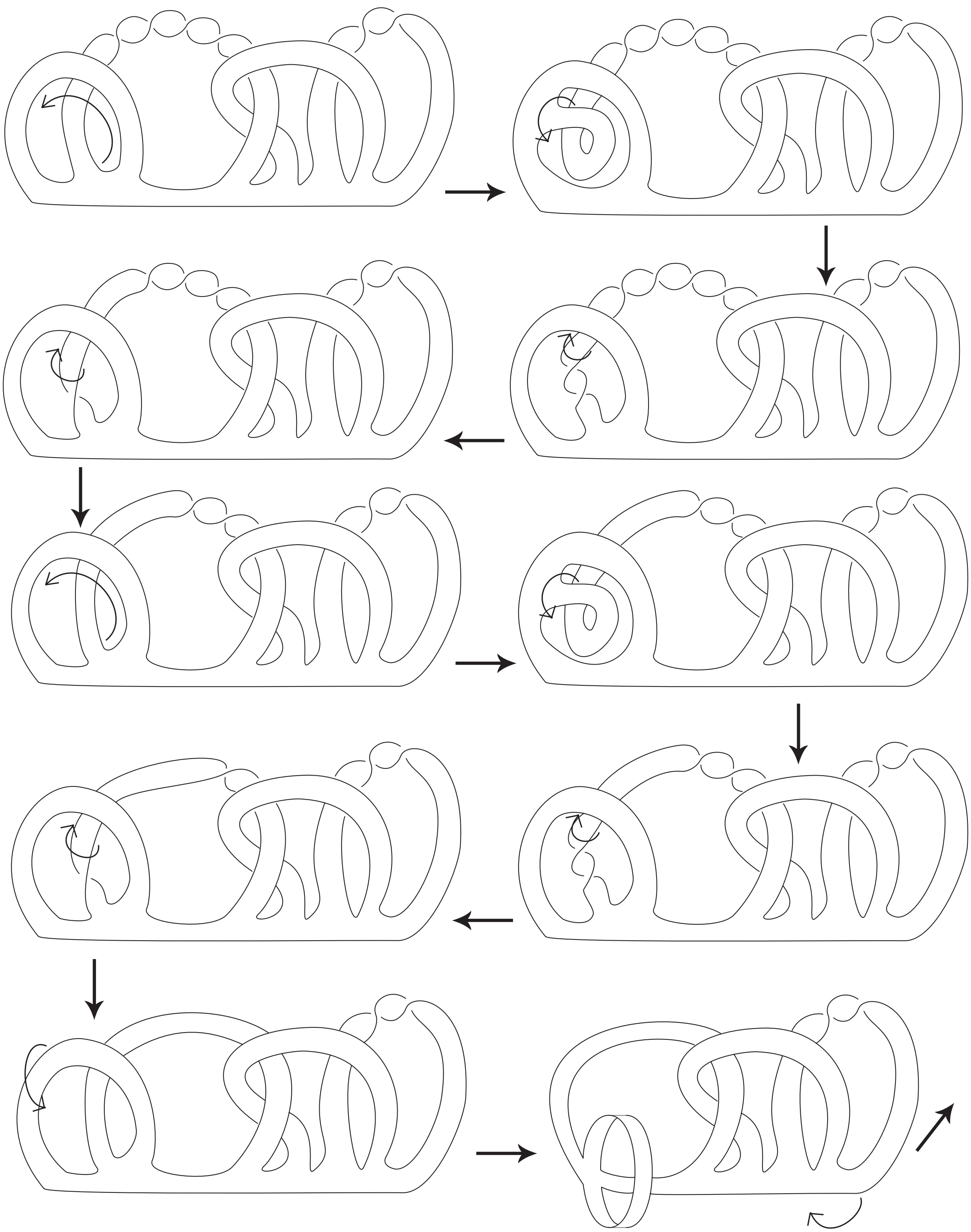


図 6.85:

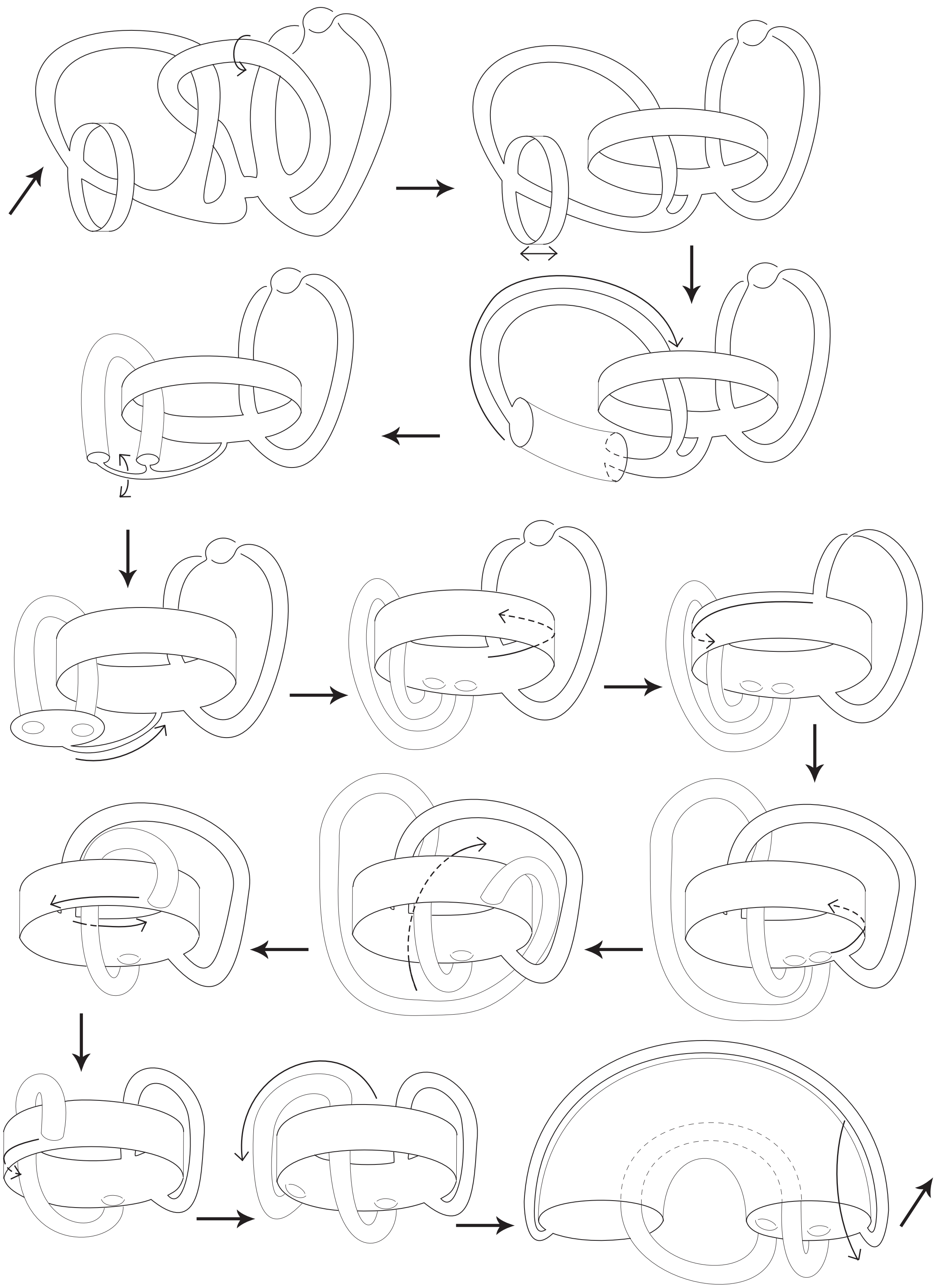


図 6.86:

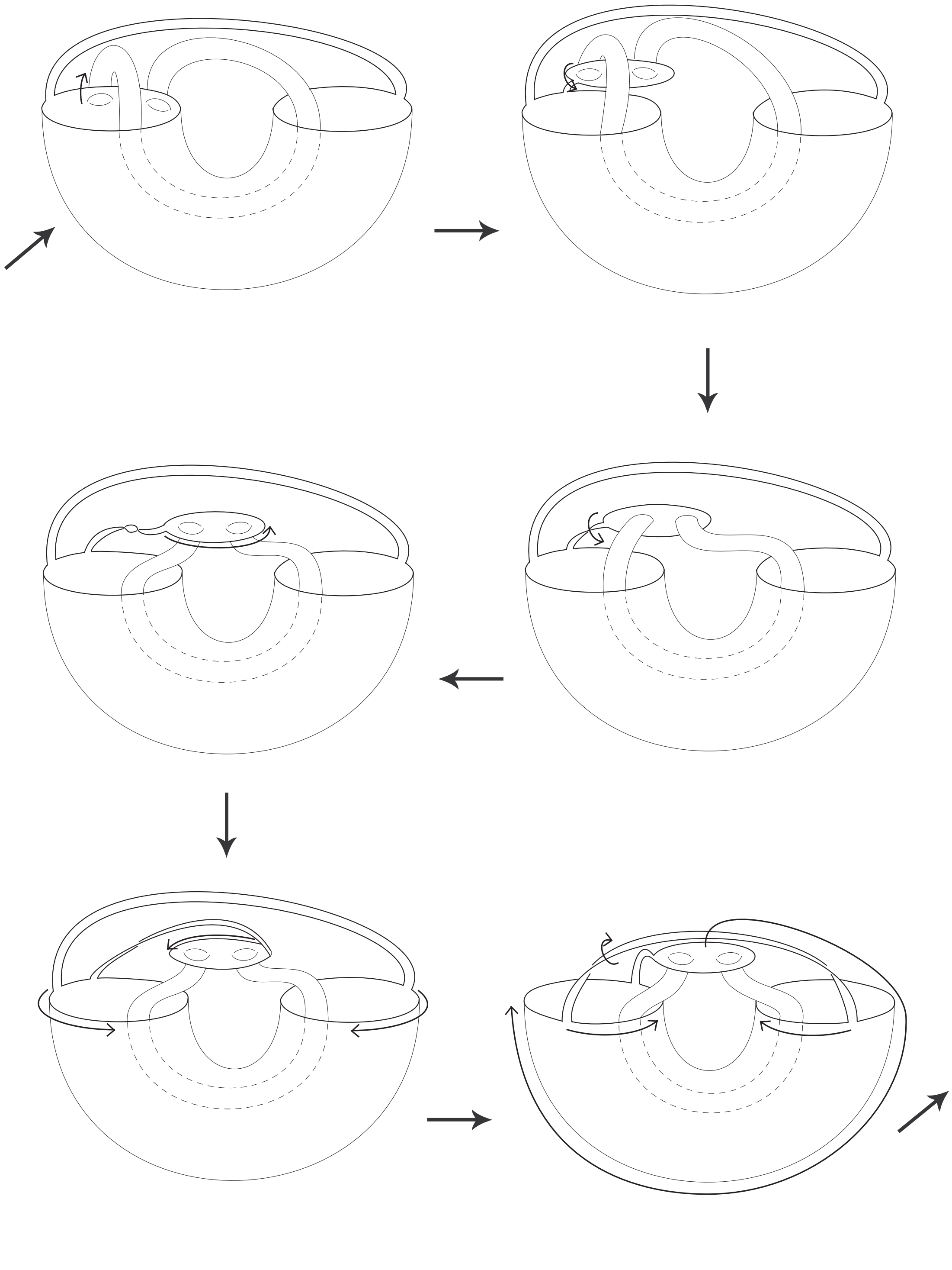


図 6.87:

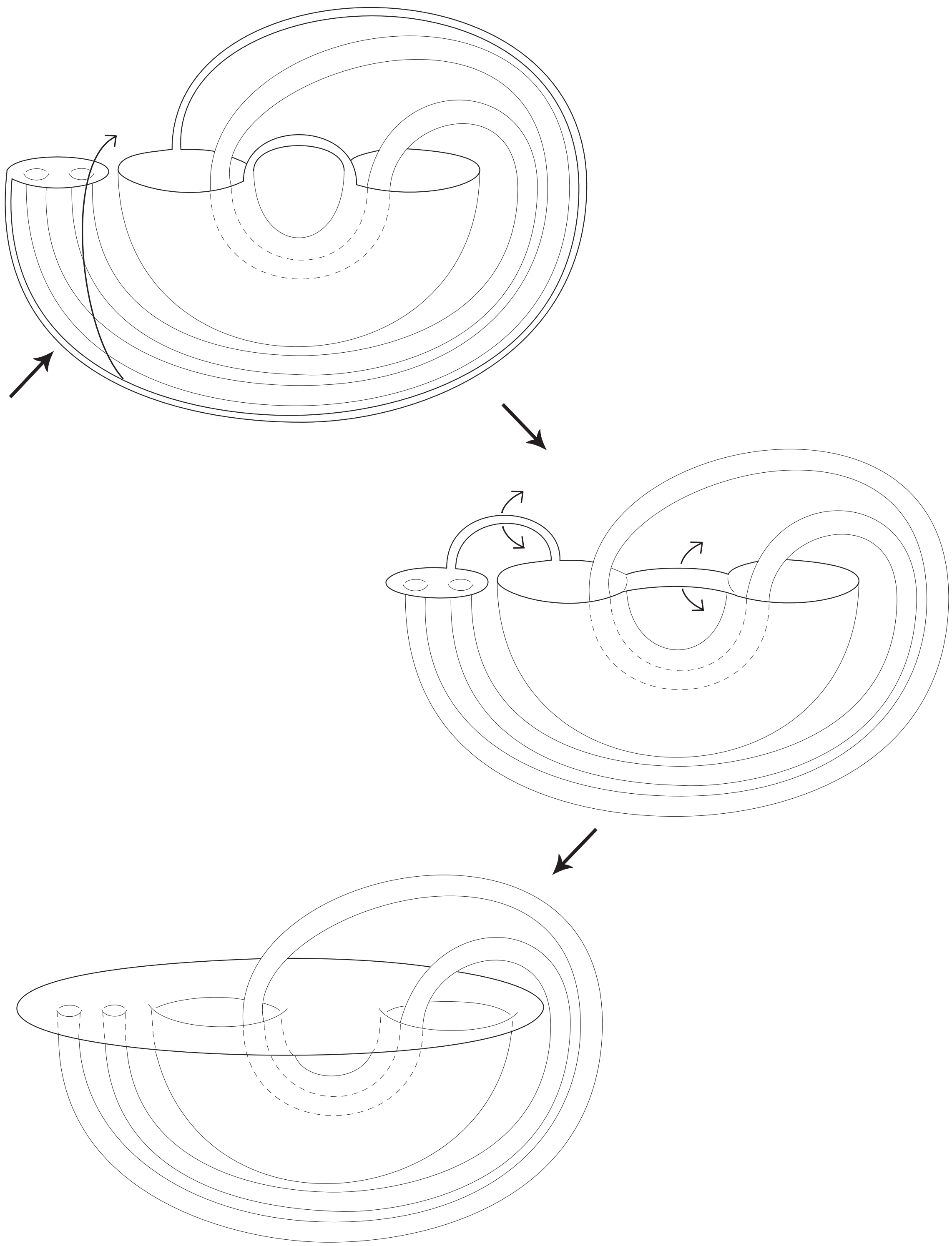


図 6.88:

付録 3　境界が fibred knot ではない pre-fiber surface

ここでは次の Fact を示す.

Fact　境界が fibred link ではない pre-fiber surface が存在する.

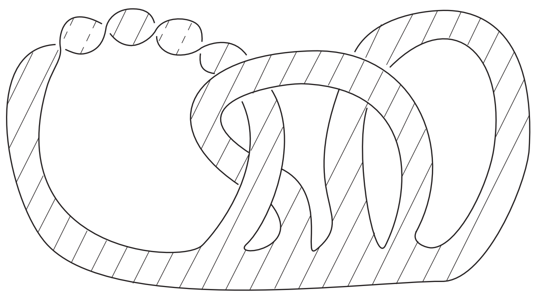


図 6.89:

Fact の証明.　図 6.89 の境界は 2 回ひねりの入った annulus の境界になっているので, 例 2.6 と定理 2.3 より fibered link でないことがわかる. また, 容易にわかるようにこれは Σ_0^2 と例 2.8 の fiber surface の plumbing になっている. よって定理 3.4 より pre-fiber surface であることがわかる.

以下では図 6.89 の surface の complementary sutured manifold が pre-fiber surface の定義の条件をみたすことを直接見る.
図 6.90(1) は図 6.89 の complementary sutured manifold である. 図 6.90(2) は図 6.90(1) の compressing disk で compress して得られる sutured manifold である. これを isotopy で変形することにより, 図 6.91(6) が得られる. 次に図 6.91(6) の product disk で compress することにより, 図 6.91(7) が得られる. それを isotopy で変形することにより, 図 6.91(13) が得られる. 図 6.91(13) の compressing disk で compress することにより図 6.91(14) の product sutured manifold が得られる. 図 6.89 の complementary sutured manifold が 2 つの compressing disk を持ち, その disk で compress することにより, product sutured manifold が得られることがわかった. 従って図 6.89 の Seifert surface は pre-fiber surface であることが直接確かめられた.

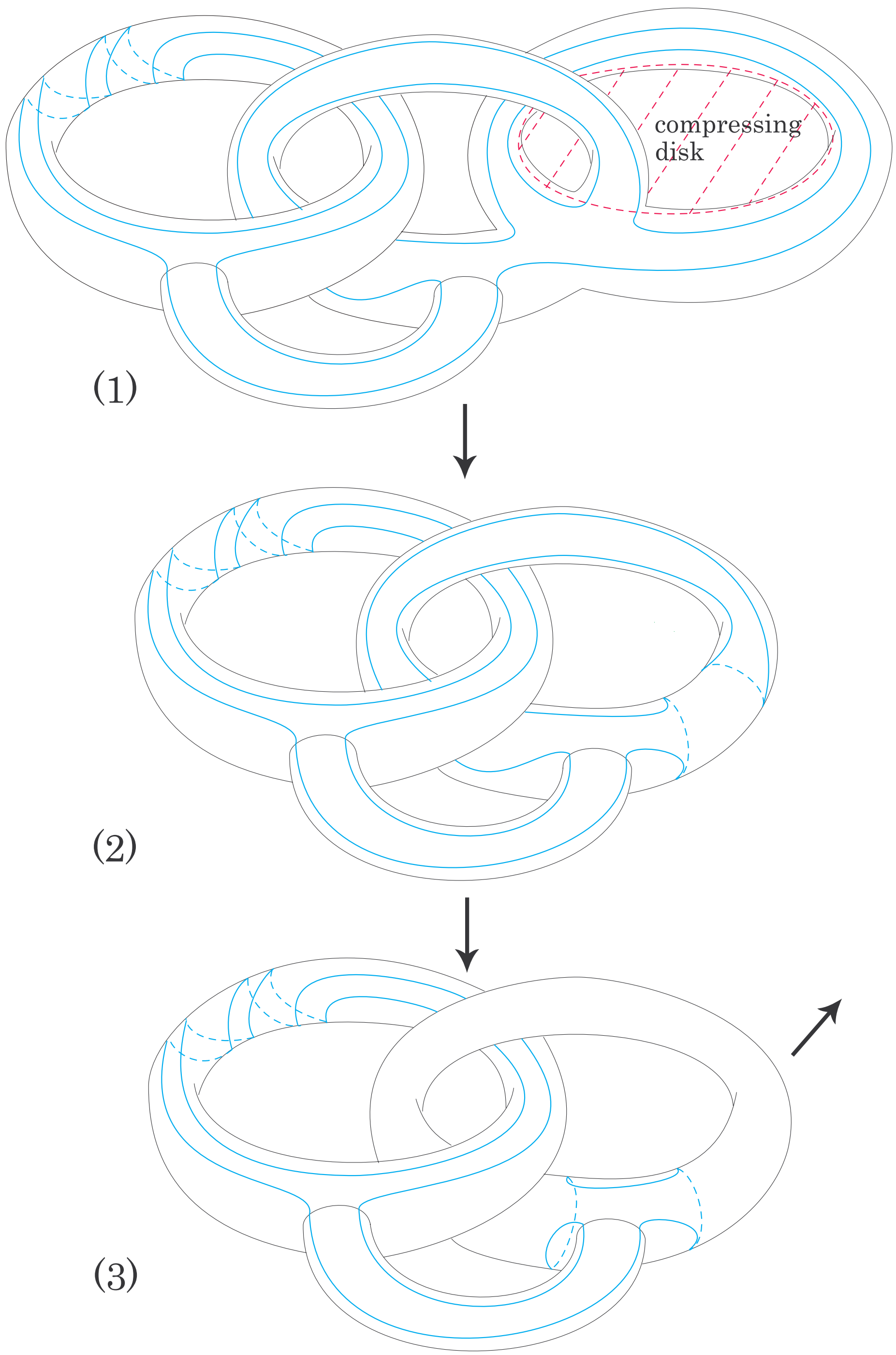


図 6.90:

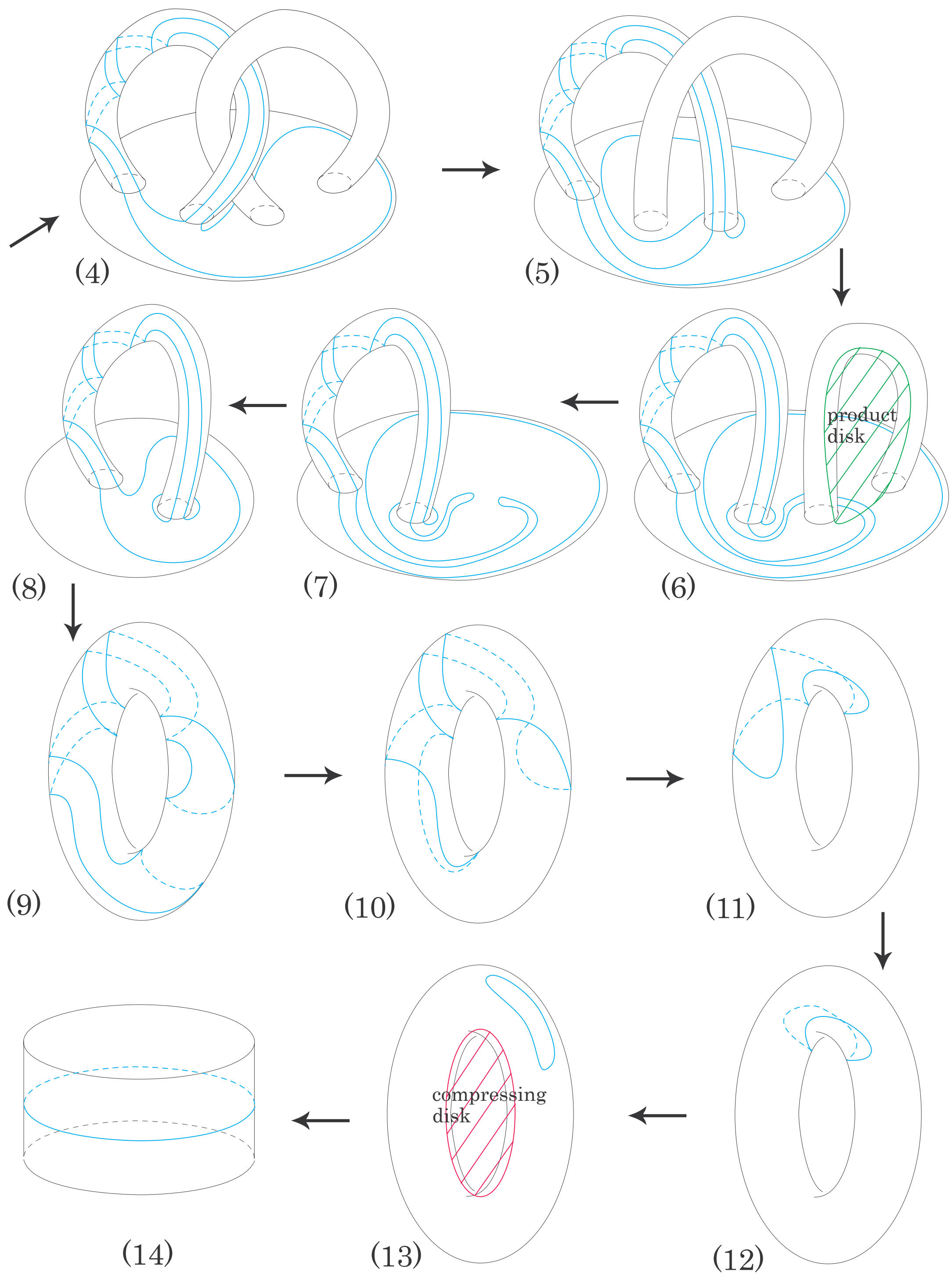


図 6.91: