

修士論文  
ロボット工学に現れる配位空間のトポロジーについて

江本 安佳里  
奈良女子大学大学院 人間文化研究科 数学専攻

2007年

## 目次

1	序文	2
2	配位空間	4
3	グラフの配位空間	6
4	簡約化された配位空間	11
5	完全グラフ・完全二部グラフの簡約化された配位空間	15
6	主結果	24

# 1 序文

工場のフロアなどで自動化されたロボットを使用することは、様々なコストを削減することにつながるはずである。ただし、そのロボット同士が作業中に衝突して転倒などしてしまえば意味が無い。自動化された複数のロボットを衝突させることなく自由に動かすためにはどうしたらいいだろうか。

考えられる一つの方法として、次のものがある。フロア内で考えられるロボットのすべての配置によって構成される空間を作り、そこから2台以上のロボットが同じ地点にいる配置を取り除くことで、ロボットの動きを安全にプログラム出来るような空間を得るという方法である。

本論文ではこれを、ロボットが動き回る場所を  $\mathbb{R}^2$  内の部分集合、ロボットをその部分集合を動く点(動点)とみなし、数学的な考察を行う。

$X$  を位相空間、 $N$  を自然数とし、一瞬一瞬の  $N$  台のロボットの安全な配置により生成される空間を配位空間と呼び、数学的に

$$C^N(X) = \underbrace{(X \times \cdots \times X)}_{N \text{ 個}} - \Delta$$

と定める。ただし  $\Delta = \{(x_1, x_2, \dots, x_N) \in X^N; i \neq j \text{ で, } x_i = x_j \text{ となる } i, j \text{ が存在する}\}$ 。

まず障害物も何もない平面上で動くロボットの場合を考え、次にフロア内に埋め込まれたレール上で動くロボットの場合についても考えることにする。この場合は、レールをグラフとみなすことで同様に議論することが可能である。

しかし、配位空間では複数のロボットが同じ地点にいるとき、つまり衝突するその瞬間のロボットの配置を除いただけであり、まだまだ安全性は不十分である。より安全な空間を得るためには、次に予想される動きによって衝突する可能性のある配置も取り除くべきである。

そこで、この取り除いた空間を簡約化された配位空間と呼び、数学的に

$$D^N(X) = \underbrace{(X \times \cdots \times X)}_{N \text{ 個}} - \tilde{\Delta}$$

と定める。ただし  $\tilde{\Delta}$  は  $X \times \cdots \times X$  中の  $\Delta$  を含むセル全体から成る集合である。

導き出された主結果を以下に述べる。

定理 1.

$K_n$  を  $n$  個の点からなる完全グラフとする。

$D^N(K_n)$  が閉曲面であるための必要十分条件は

$$\begin{cases} N = 2 \\ n = 5 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} N = 3 \\ n = 5 \end{cases}$$

である．更に  $D^2(K_5)$  は種数 6 の閉曲面， $D^3(K_5)$  は種数 16 の閉曲面に同相である．

定理 2 .

$K_{m,n}$  を 2 つの素な  $m$  個の点の集合と  $n$  個の点の集合からなる完全二部グラフとする． $D^N(K_{m,n})$  が閉曲面であるための必要十分条件は

$$\begin{cases} N = 2 \\ m = n = 3 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} N = 4 \\ m = n = 3 \end{cases}$$

である．更に  $D^2(K_{3,3})$  は種数 4 の閉曲面， $D^4(K_{3,3})$  は種数 37 の閉曲面に同相である．

本論文の構成は以下の通りである．

第 2 章では，配位空間を定義する．第 3 章では，位相空間が特にグラフのときの配位空間をみる．第 4 章では，簡約化された配位空間を定義し，前章で取り挙げたグラフそれぞれの簡約化された配位空間をみる．第 5 章では，グラフの中でも特に完全グラフや完全二部グラフの簡約化された配位空間の例をみる．第 6 章では，前章までにみた様々な例から完全グラフや完全二部グラフの簡約化された配位空間が閉曲面と同相になるのはいつか，またそのときの種数を調べている．

最後にこの論文を作成するにあたり，ご多忙にも関わらず丁寧にご指導いただきました片桐民陽先生，小林毅先生に深く御礼申し上げます．

## 2 配位空間

工場のフロアなどで、自動化された何台ものロボットを衝突させることなく自由に動かすためにはどうしたらいいだろうか。一つの方法として、フロア内で考えられるロボットのすべての配置によって構成される空間を考え、そこから2台以上のロボットが同じ点にいる配置を取り除き、ロボットが安全に動き回れるようプログラムが可能な空間を得る方法がある。

以下、フロアを  $\mathbf{R}^2$  内の部分集合、ロボットをその空間内を動く点(動点)とみなし、数学的な考察を行う。

### 定義 1. 配位空間の定義

$X$  を位相空間、 $N$  を自然数とし、

$$\Delta = \{(x_1, x_2, \dots, x_N) \in X^N ; i \neq j \text{ で } x_i = x_j \text{ となる } i, j \text{ が存在する}\}$$

とおく。

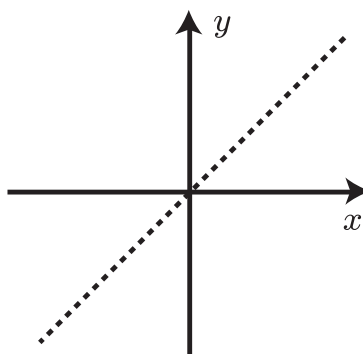
このとき

$$\mathcal{C}^N(X) = \underbrace{(X \times \dots \times X)}_{N \text{ 個}} - \Delta$$

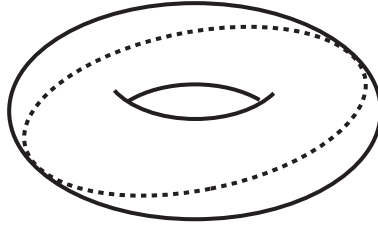
を配位空間 (*configuration space*) と呼ぶ。

注意)  $\mathcal{C}^1(X) = X$  である。

例 2.1.  $\mathcal{C}^2(\mathbf{R}) = (\mathbf{R} \times \mathbf{R}) - \Delta = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} ; x_1 \neq x_2\}$  は、 $\mathbf{R}^2$  平面上から直線を除いた空間と同相である。



例 2.2.  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 ; x^2 + y^2 = 1\}$  とする。  $\mathcal{C}^2(S^1)$  は、トーラスから円周を除いた空間と同相である。



例 2.3.  $\mathcal{C}^2(\mathbf{R}^2)$  は  $\mathbf{R}^2 \times (\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\})$  ,  $\mathbf{R}^3 \times S^1$  と同相である .

証明.  $f : \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^2) \rightarrow \mathbf{R}^2 \times (\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\})$  を  $f((x_1, x_2)) = (x_1, x_1 - x_2)$  と定めると  $\mathcal{C}^2(\mathbf{R}^2) \cong \mathbf{R}^2 \times (\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\})$  .

また  $g : \mathbf{R}^2 \times (\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}) \rightarrow \mathbf{R}^3 \times S^1$  を  $g(((\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2))) = (\alpha_1, \alpha_2, \log \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}, \tan^{-1} \frac{\beta_2}{\beta_1})$  と定めると  $\mathbf{R}^2 \times (\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}) \cong \mathbf{R}^3 \times S^1$  .

これより ,  $\mathcal{C}^2(\mathbf{R}^2) \cong \mathbf{R}^2 \times (\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}) \cong \mathbf{R}^3 \times S^1$  が示せた . □

### 3 グラフの配位空間

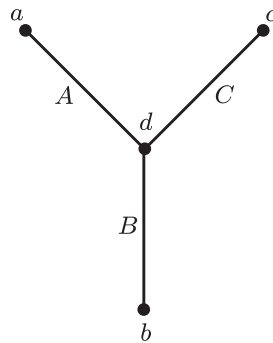
第2章では障害物も何も無いフロア上でのロボットの動きについて考えた。次はフロア内に、ロボットがその上を動くように敷かれたレール上でのロボットの動きを考えることにする。これはレールをグラフとみなすことで、先と同様に数学的な考察が可能である。以下に記号の説明をする。

$n$  セルとは、 $B^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n; x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\}$  と同相な位相空間である。ただし、0セルは1点と同相な位相空間である。

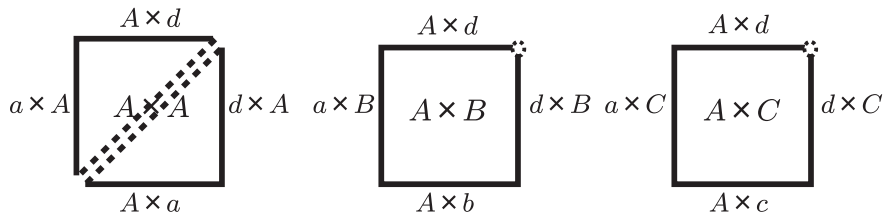
$\Gamma$  をグラフ、 $z_1, \dots, z_N$  を  $\Gamma$  の0セルまたは1セルとする。 $z_1 \times \dots \times z_N$  で  $\Gamma$  上を移動する  $N$  台のロボットのうち、すべての  $k \in \{1, \dots, N\}$  に対して  $k$  台目のロボットが  $z_k$  にいる配位全体を表すこととする。

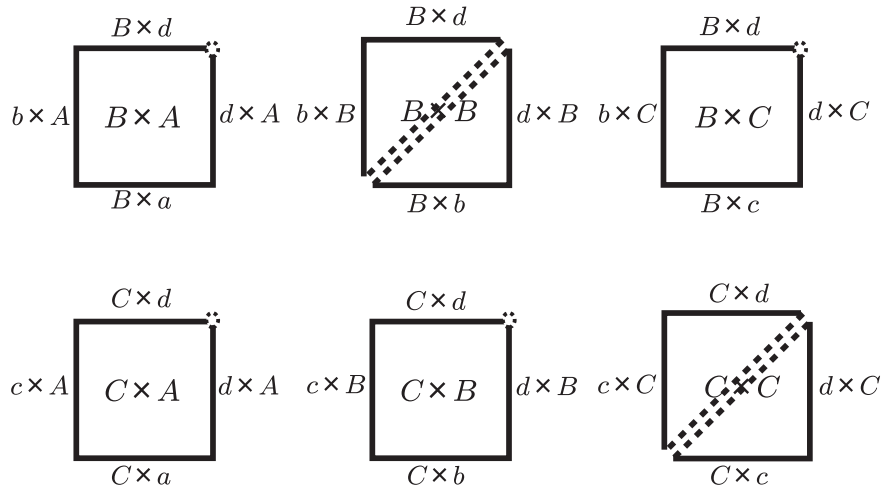
グラフ  $\Gamma$  の配位空間  $\mathcal{C}^N(\Gamma)$  の位相的な性質をみるためには、まず  $\mathcal{C}^N(\Gamma)$  を構成する  $N$  セル  $z_1 \times \dots \times z_N$  をすべて求める。そして、その各  $N$  セルの境界である  $N-1$  セルのラベルをみて、同じものを向きもこめて貼り合わせるという操作が必要となる。

例 3.1.  $\mathcal{C}^2(\Upsilon)$

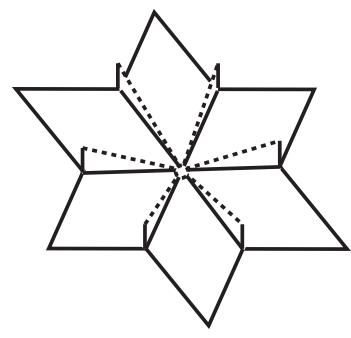


$\Upsilon$  は、0セル  $a \sim d$  と1セル  $A \sim C$  からなるグラフ。 $\mathcal{C}^2(\Upsilon)$  を構成する2セルは以下の通りである。

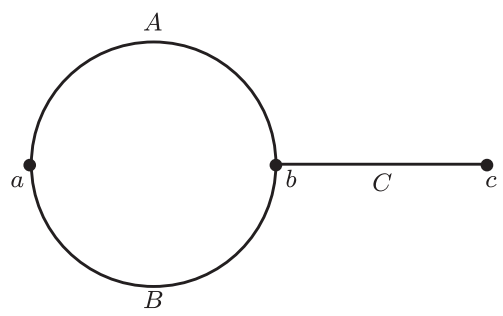




これらを同じレベルの1セル同士で向きを保ったまま張り合わせていくと、下のような配位空間となる。

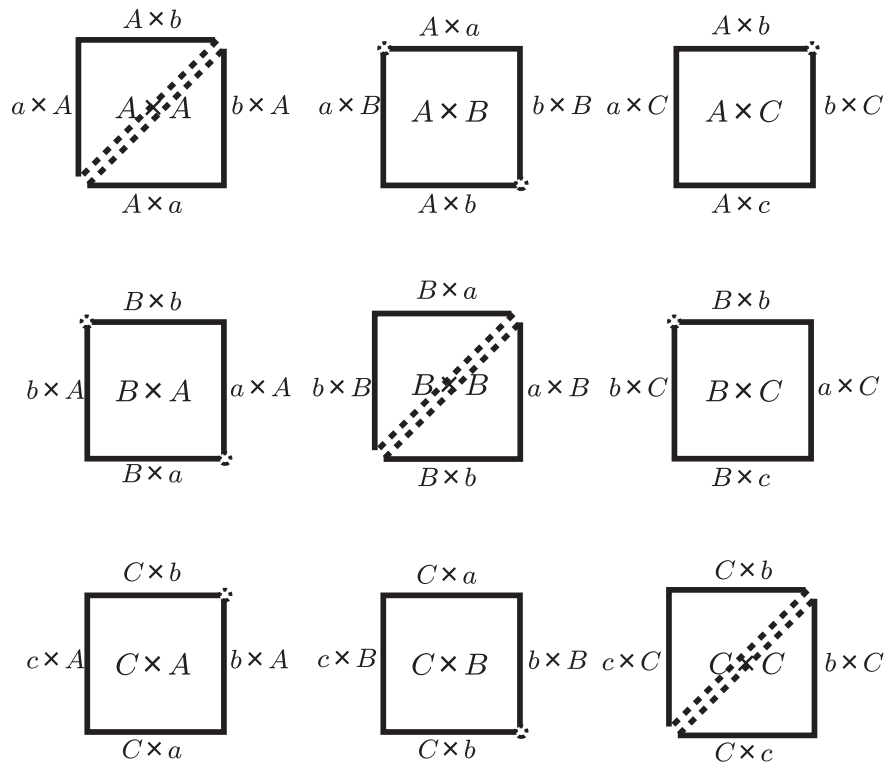


例 3.2.  $\mathcal{C}^2(\circ-)$

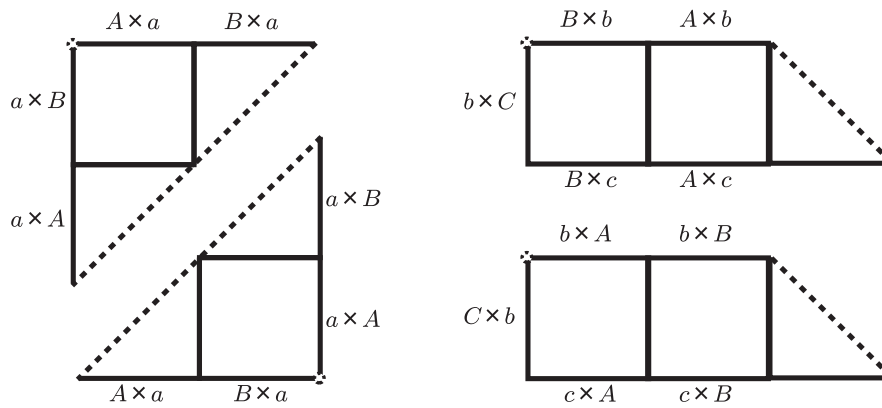


$\circ-$  は、0セル  $a \sim c$  と1セル  $A \sim C$  からなるグラフ。 $\mathcal{C}^2(\circ-)$  を構成する2セルは以下の通りである。

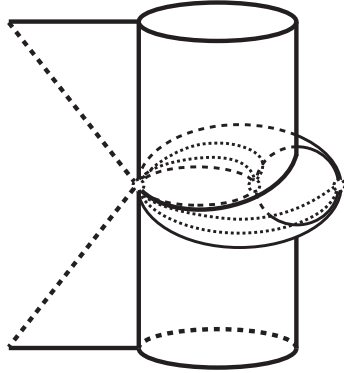




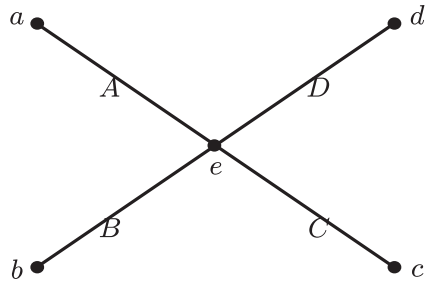
これらを同じラベルの1セル同士で向きを保ったまま張り合わせていくと、次のパーツが出来上がる。



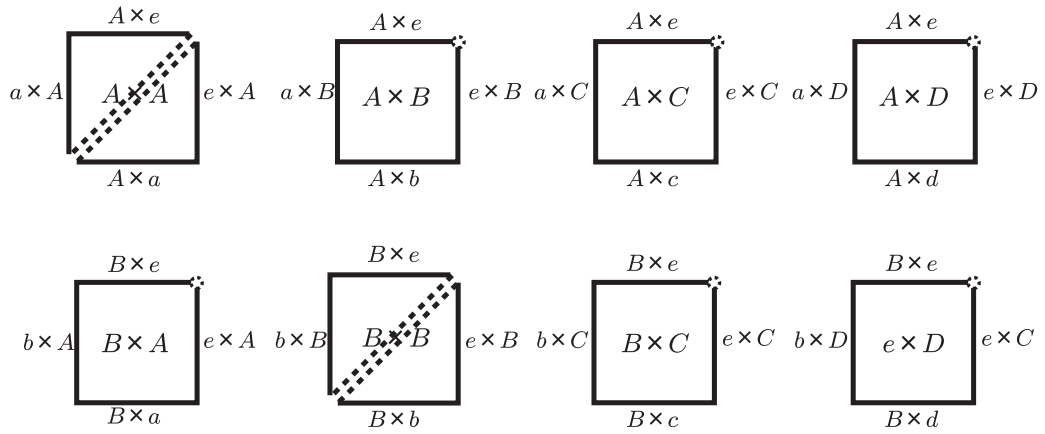
これらを更に貼り合わせていくと、下のような配位空間となる。

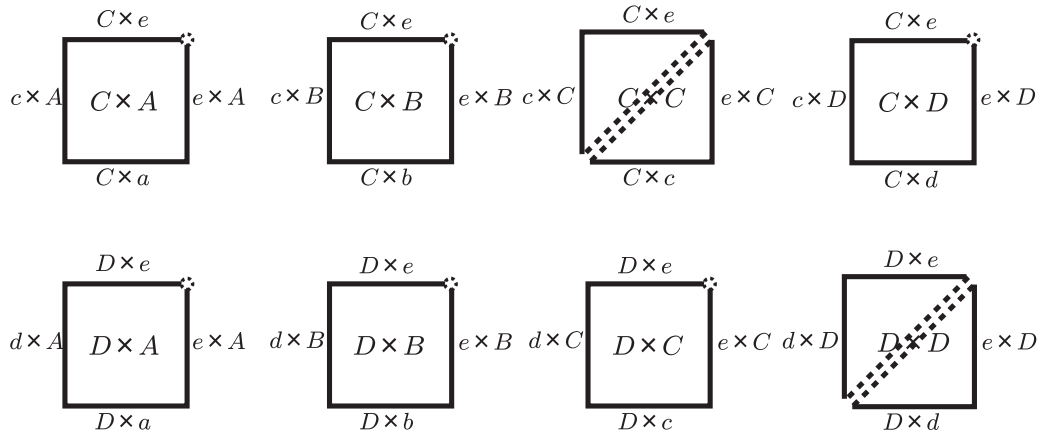


例 3.3.  $\mathcal{C}^2(\times)$

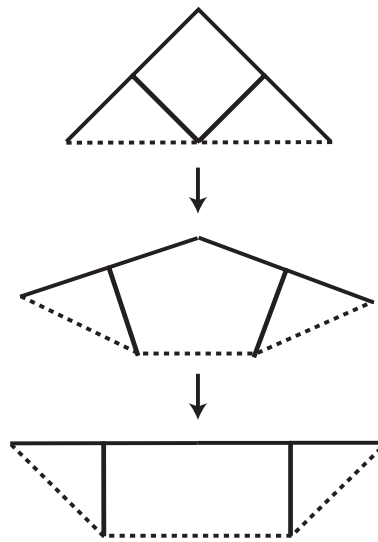


$\times$  は, 0セル  $a \sim e$  と 1セル  $A \sim D$  からなるグラフ.  $\mathcal{C}^2(\times)$  を構成する 2セルは以下の通りである.

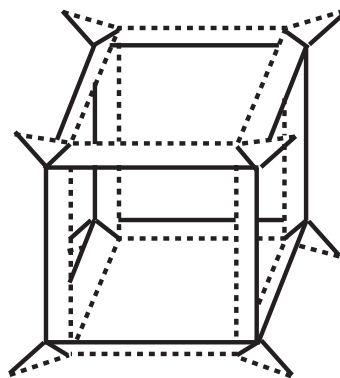




これらを同じレベルの1セル同士で向きを保ったまま張り合わせていくと、以下のようなパーツが出来上がるので、それを更に変形させる。



これらを更に貼り合わせていくと、下のような配位空間となる。



## 4 簡約化された配位空間

配位空間で取り除いた  $\Delta$  は、ロボット同士がまさに衝突する瞬間を表すものであった。より安全にロボットを動かすためには、ロボットが衝突する直前の配置を表すセルも取り除く必要がある。

定義 2. 簡約化された配位空間

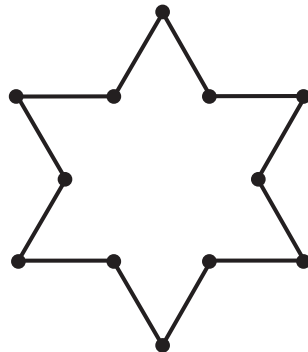
$\tilde{\Delta}$  を  $X \times \dots \times X$  中の  $\Delta$  に接するセル全体から成る集合とする。

$$D^N(X) = \underbrace{(X \times \dots \times X)}_{N \text{ 個}} - \tilde{\Delta}$$

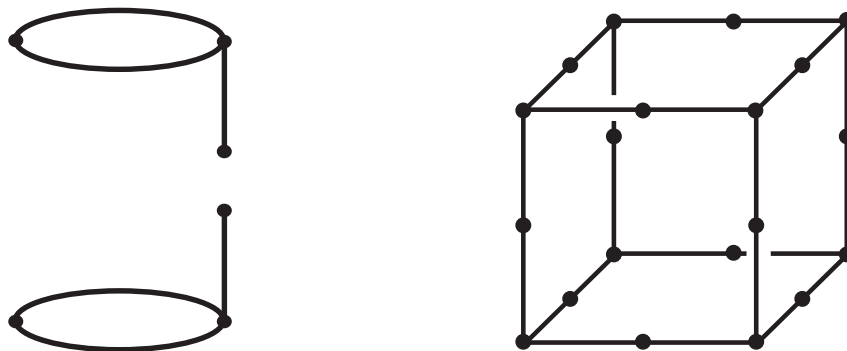
を簡約化された配位空間 (*discretized configurationspace*) と呼ぶ。

注意) 位相空間  $X$  がグラフでないとき  $D^N(X)$  は常に空集合である。よってこの後の議論では  $X$  がグラフのときについて考えていく。ただし  $N = 1$  のとき、 $D^1(\Gamma) = C^1(\Gamma) = \Gamma$  である。

定義に従って考えてみると、 $D^2(\Upsilon)$  は、例 3.1 の  $C^2(\Upsilon)$  から 2 セルをすべて取り除くことで得られる。つまり  $D^2(\Upsilon)$  は次のような空間となる。



同様に  $D^2(\cup)$ ,  $D^2(\times)$  を考えると、次のような空間となる。



ここで、命題を一つ述べる。

命題 1.  $\mathcal{E}^N(\Gamma)$  を、 $\Gamma$  上の任意の動点 2 個とそれらをつなぐ任意の道が少なくとも 1 本の完全な 1 セルを含む配位全体の集合とする。

このとき  $\mathcal{D}^N(\Gamma) = \mathcal{E}^N(\Gamma)$  が成り立つ。

証明.  $(\Gamma \times \cdots \times \Gamma) - \mathcal{E}^N(\Gamma) = \tilde{\Delta}$  を示せばよい。

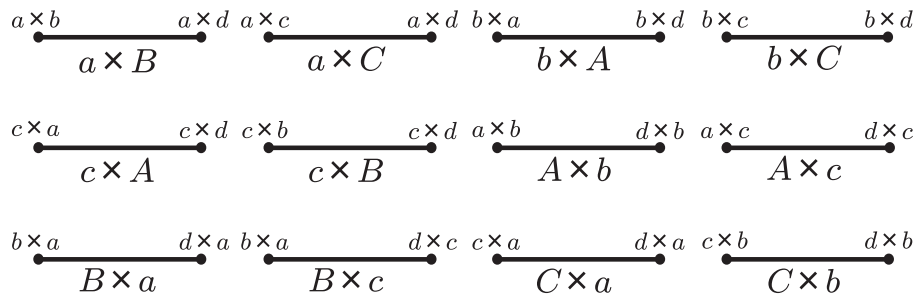
$(\Gamma \times \cdots \times \Gamma) - \mathcal{E}^N(\Gamma)$  は、 $\Gamma$  上のある 2 個の動点をつなぐ道が 1 本の完全な 1 セルを含まない配位全体の集合なので、これは  $\tilde{\Delta}$  に等しい。□

この命題より、グラフ上の動点の配置から直接  $\mathcal{D}^2(\Gamma)$  を構成するセルを数え上げることも可能である。

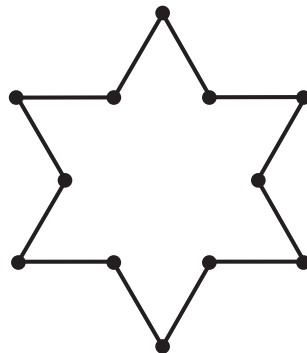
以下この方法で、各グラフの簡約化された配位空間が先に見た図と一致するかを確かめる。

例 4.1.  $\mathcal{D}^2(\Upsilon)$

$\Upsilon$  は、0 セル  $a \sim d$  と 1 セル  $A \sim C$  からなるグラフ。 $\mathcal{D}^2(\Upsilon)$  を構成する 1 セルは以下の通りである。

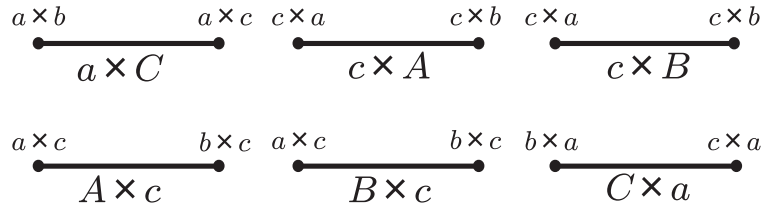


これらを同じラベルの 0 セル同士で張り合わせていくと、下のような簡約化された配位空間となる。

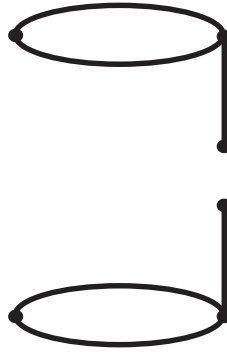


例 4.2.  $D^2(\circ-)$

$\circ-$  は, 0セル  $a \sim c$  と 1セル  $A \sim C$  からなるグラフ.  $D^2(\circ-)$  を構成する 1セルは以下の通りである.

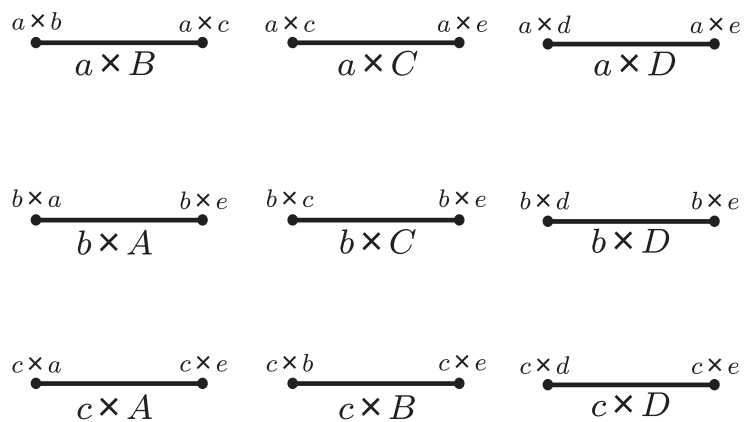


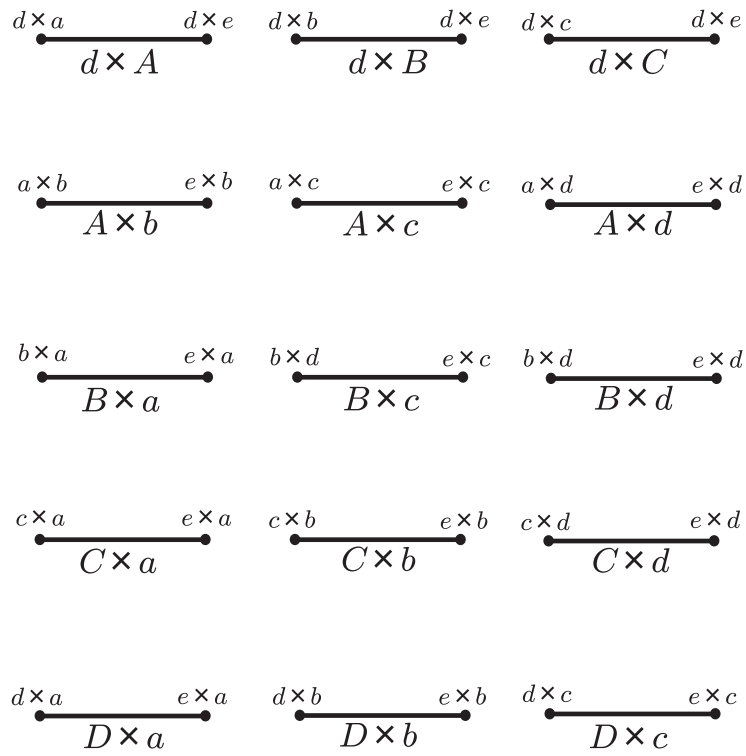
これらを同じラベルの 0セル同士で張り合わせていくと, 下のような簡約化された配位空間となる.



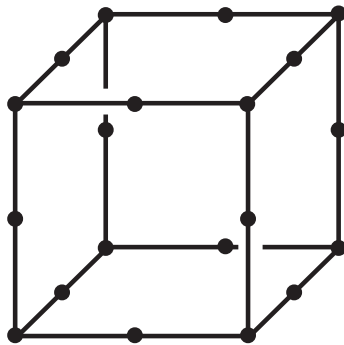
例 4.3.  $D^2(\times)$

$\times$  は, 0セル  $a \sim e$  と 1セル  $A \sim D$  からなるグラフ.  $D^2(\times)$  を構成する 1セルは以下の通りである.





これらを同じラベルの0セル同士で張り合わせていくと、下のような簡約化された配位空間となる。



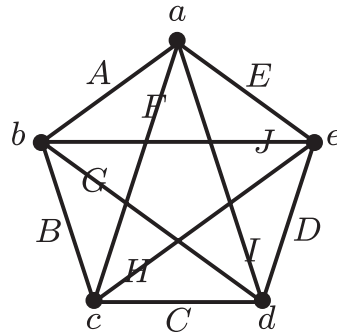
## 5 完全グラフ・完全二部グラフの簡約化された配位空間

グラフの中でも、相異なる2つの点がすべて隣接している単純グラフを完全グラフと呼び、 $n$ 個の点をもつ完全グラフを  $K_n$  と書く。

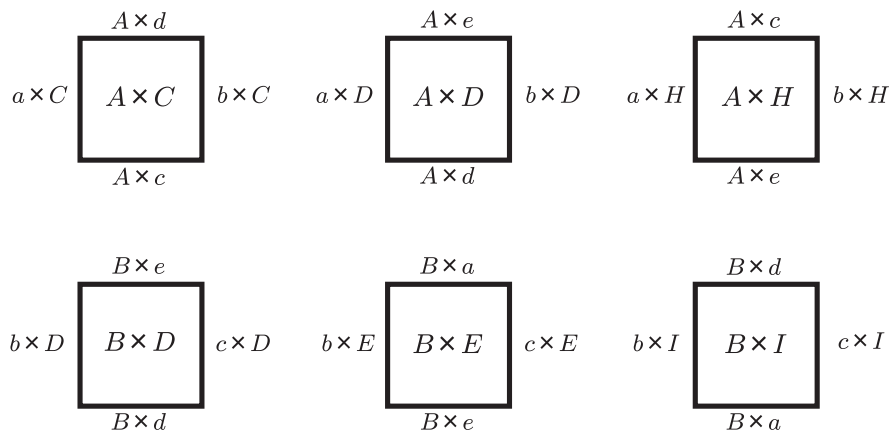
また、グラフの点集合が2つの素な集合  $A$  と  $B$  に分割でき、グラフのすべての辺が  $A$  の点と  $B$  の点を結ぶようにできているとき、このグラフを二部グラフと呼ぶ。更に中でも、 $A$  の各点が  $B$  の各点とちょうど一本の辺で結ばれている二部グラフを完全二部グラフと呼び、 $m$  個の点の集合と  $n$  個の点の集合からなる完全二部グラフを  $K_{m,n}$  と書く。

この章以降は、完全グラフ  $K_n$  や完全二部グラフ  $K_{m,n}$  の簡約化された配位空間についてみていくことにする。

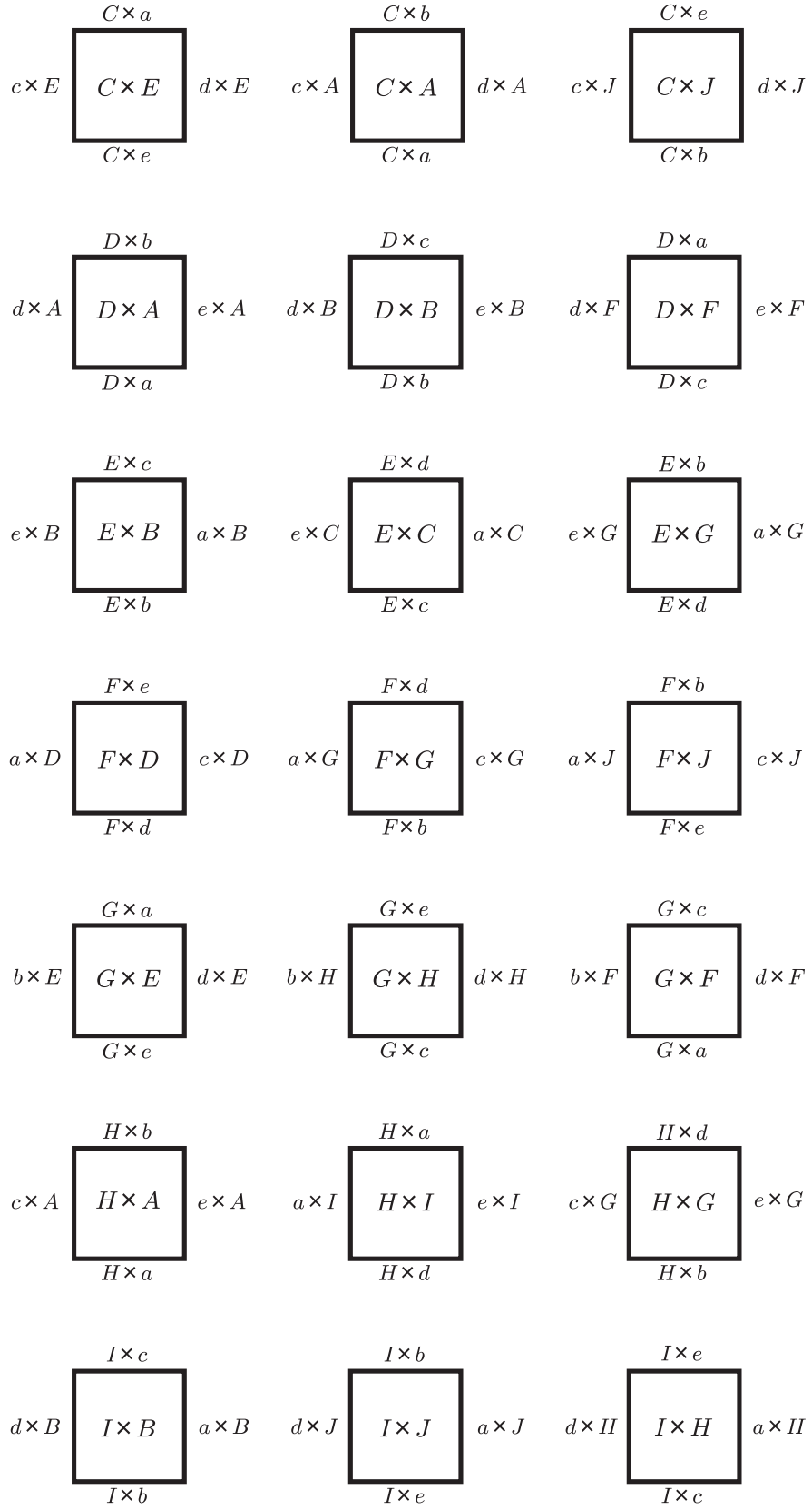
例 5.1.  $\mathcal{D}^2(K_5)$

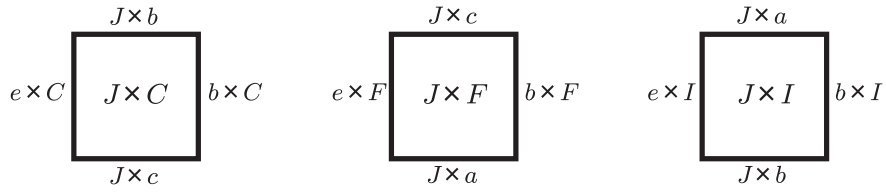


$K_5$  は、0セル  $a \sim e$  と1セル  $A \sim J$  からなる完全グラフ。 $\mathcal{D}^2(K_5)$  を構成する2セルは以下の通りである。

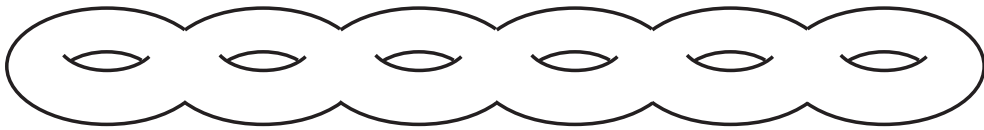








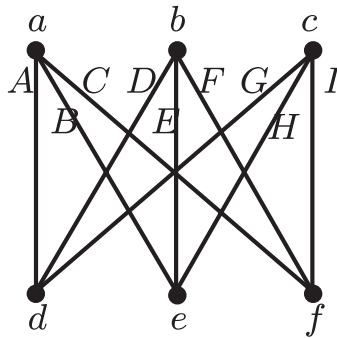
これらを貼り合わせ変形させると、 $D^2(K_5)$  は下のような位相空間と同相になる。



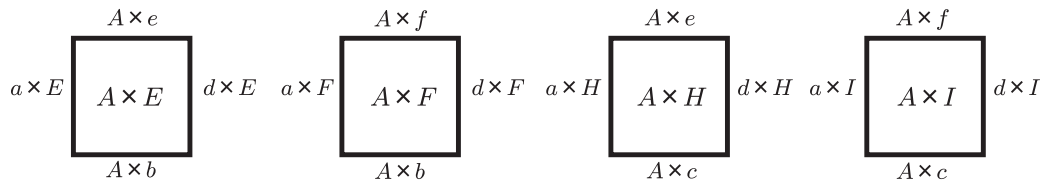
実際に  $D^2(K_5)$  を構成する各セルを数えると、0セルは 20 個、1セルは 60 個、2セルは 30 個である。

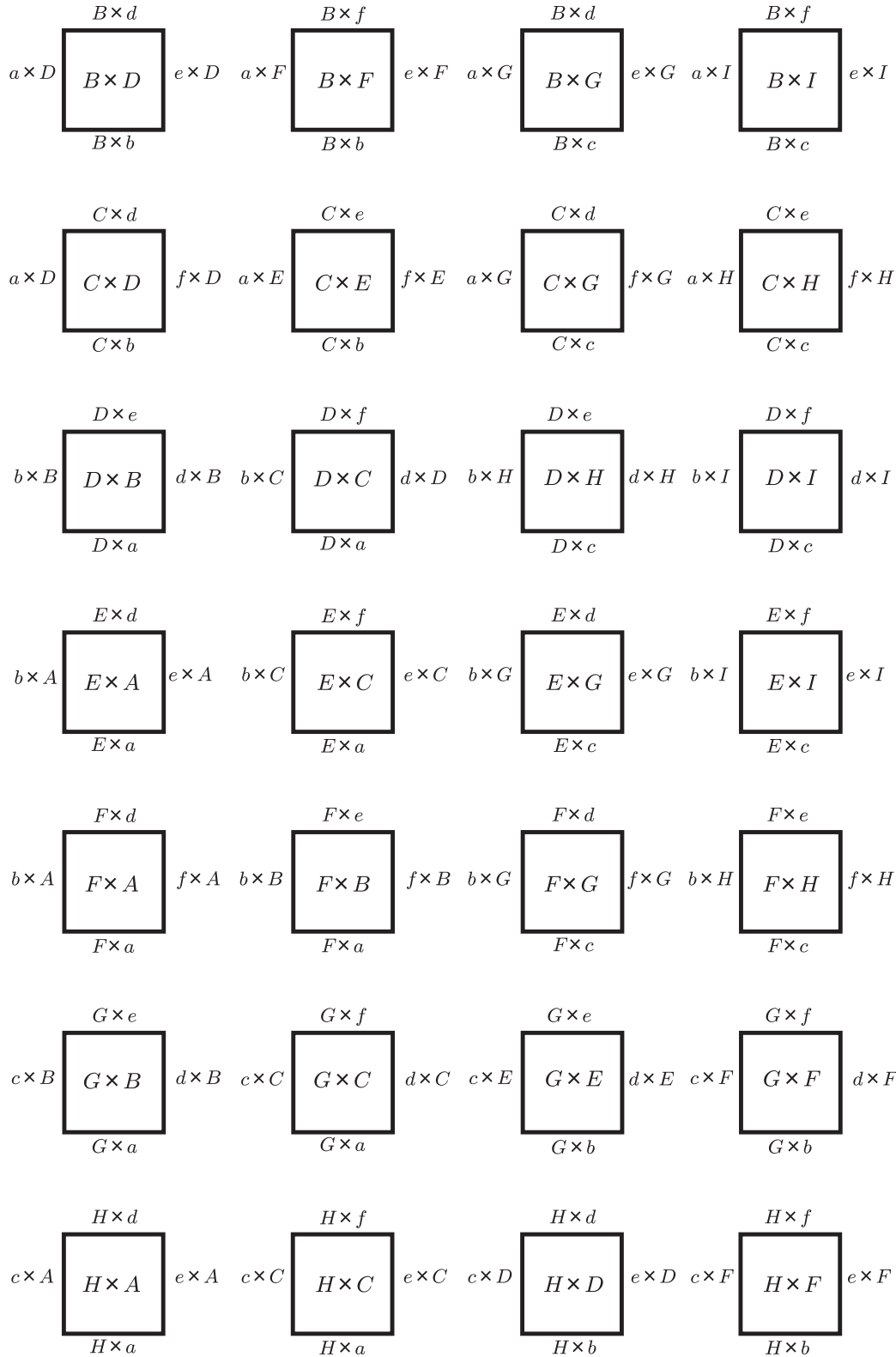
よってオイラー数は  $\chi(D^2(K_5)) = 30 - 60 + 20 = -10$  . 種数は  $g = 1 - \frac{1}{2} \times (-10) = 6$  .  
この結果からも、 $D^2(K_5)$  は上のような閉曲面であることが確かめられる。

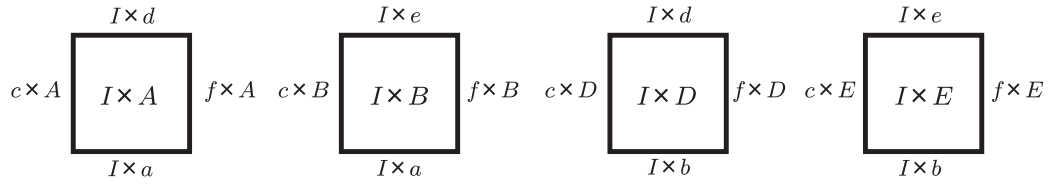
例 5.2.  $D^2(K_{3,3})$



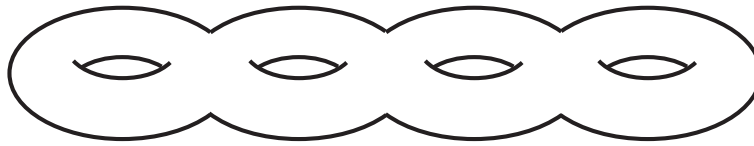
$K_{3,3}$  は、0セル  $a \sim f$  と 1セル  $A \sim I$  からなる完全グラフ。 $D^2(K_{3,3})$  を構成する 2セルは以下の通りである。







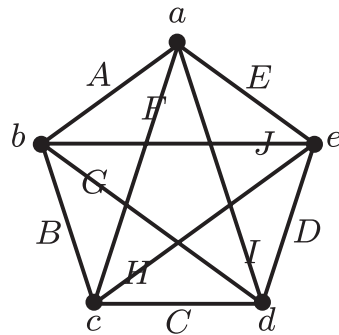
これらを貼り合わせ変形させると、 $D^2(K_{3,3})$  は下のような位相空間と同相になる。



実際に  $D^2(K_{3,3})$  を構成する各セルを数えると、0セルは 30 個、1セルは 72 個、2セルは 36 個である。

よってオイラー数は  $\chi(D^2(K_{3,3})) = 36 - 72 + 30 = -6$  . 種数は  $g = 1 - \frac{1}{2} \times (-6) = 4$  .  
この結果からも、 $D^2(K_{3,3})$  は上のような閉曲面であることが確かめられる。

例 5.3.  $D^3(K_5)$



まず、 $D^3(K_5)$  が閉曲面と同相になることを示す。

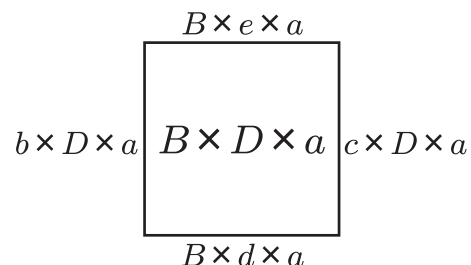
1 個の動点が点  $a$  上にあるとする。このとき 2 セルを作るための残り 2 個の動点の配置は

- (a) 辺  $B$  と辺  $D$
- (b) 辺  $C$  と辺  $J$
- (c) 辺  $G$  と辺  $H$

のいずれかである。

(a) の場合

この動点の配置によって作られるのは、次の2セルである。

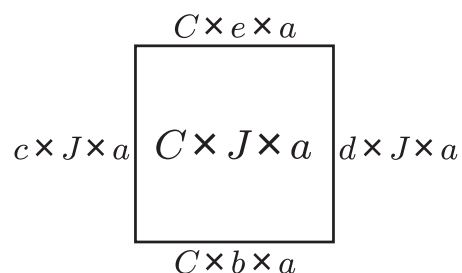


この境界の1セル  $B \times d \times a$  は  $B \times E \times d$  という2セルの境界でもある。更に、この1セルを境界として持つ2セルはこの二つのみである。

同様に、 $B \times e \times a$  を境界としてもつ2セルは  $B \times I \times e$ 、 $b \times D \times a$  を境界としてもつ2セルは  $D \times F \times b$ 、 $c \times D \times a$  を境界としてもつ2セルは  $D \times A \times c$  である。

(b) の場合

この動点の配置によって作られるのは、次の2セルである。

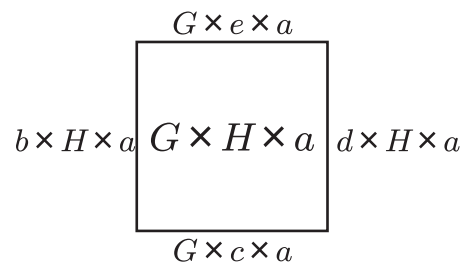


この境界の1セル  $C \times b \times a$  は  $C \times E \times b$  という2セルの境界でもある。更に、この1セルを境界として持つ2セルはこの二つのみである。

同様に、 $C \times e \times a$  を境界としてもつ2セルは  $C \times A \times e$ 、 $c \times J \times a$  を境界としてもつ2セルは  $I \times J \times c$ 、 $d \times J \times a$  を境界としてもつ2セルは  $F \times J \times d$  である。

(c) の場合

この動点の配置によって作られるのは、次の2セルである。



この境界の1セル  $G \times c \times a$  は  $G \times E \times c$  という2セルの境界でもある．更に，この1セルを境界として持つ2セルはこの二つのみである．

同様に， $G \times e \times a$  を境界としてもつ2セルは  $G \times F \times e$  ， $b \times H \times a$  を境界としてもつ2セルは  $I \times H \times b$  ， $d \times H \times a$  を境界としてもつ2セルは  $A \times H \times d$  である．

(a) ~ (c) よりどの2セルも必ず他の2セルと貼り合わせることができ， $K_5$  の対称性から， $\mathcal{D}^3(K_5)$  は閉曲面となることが示せた．

また，この空間を構成する各セルの数は以下の通りである．

(ア) 2セルの数

$$\left(10 \times 3 \times \frac{1}{2}\right) \times 3! = 90.$$

(イ) 1セルの数

$$(10 \times {}_3C_2) \times 3! = 180.$$

(ウ) 0セルの数

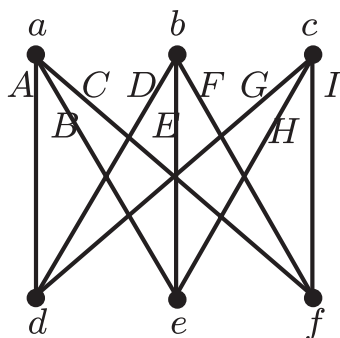
$${}_5P_3 = 60.$$

よって  $\mathcal{D}^3(K_5)$  のオイラー数は  $\chi(\mathcal{D}^3(K_5)) = 90 - 180 + 60 = -30$  .

種数は  $g = 1 - \frac{1}{2} \times (-30) = 16$  .

$\mathcal{D}^3(K_5)$  は種数 16 の閉曲面と同相となることがわかる．

例 5.4.  $\mathcal{D}^4(K_{3,3})$



まず， $\mathcal{D}^4(K_{3,3})$  が閉曲面と同相になることを示す．

2個の動点がそれぞれ点  $a$  と点  $d$  上にあるとする．このとき2セルを作るための残り2個の動点の配置は

(a) 辺  $E$  と辺  $I$

(b) 辺  $F$  と辺  $H$

のいずれかである .

(a) の場合

この動点の配置によって作られるのは , 次の 2 セルである .

$$\begin{array}{c}
 E \times f \times a \times d \\
 \square \\
 b \times I \times a \times d \quad E \times I \times a \times d \quad e \times I \times a \times d \\
 E \times c \times a \times d
 \end{array}$$

この境界の 1 セル  $E \times c \times a \times d$  は  $C \times E \times c \times d$  という 2 セルの境界でもある . 更に , この 1 セルを境界として持つ 2 セルはこの二つのみである .

同様に ,  $E \times f \times a \times d$  を境界としてもつ 2 セルは  $E \times G \times a \times f$  ,  $b \times I \times a \times d$  を境界としてもつ 2 セルは  $B \times I \times b \times d$  ,  $e \times I \times a \times d$  を境界としてもつ 2 セルは  $D \times I \times a \times e$  である .

(b) の場合

この動点の配置によって作られるのは , 次の 2 セルである .

$$\begin{array}{c}
 F \times e \times a \times d \\
 \square \\
 b \times H \times a \times d \quad F \times H \times a \times d \quad f \times H \times a \times d \\
 F \times c \times a \times d
 \end{array}$$

この境界の 1 セル  $F \times c \times a \times d$  は  $B \times F \times c \times d$  という 2 セルの境界でもある . 更に , この 1 セルを境界として持つ 2 セルはこの二つのみである .

同様に ,  $F \times e \times a \times d$  を境界としてもつ 2 セルは  $G \times F \times a \times e$  ,  $b \times H \times a \times d$  を境界としてもつ 2 セルは  $C \times H \times b \times d$  ,  $f \times H \times a \times d$  を境界としてもつ 2 セルは  $D \times H \times a \times f$  である .

(a), (b) よりどの 2 セルも必ず他の 2 セルと貼り合わせることができ ,  $K_{3,3}$  の対象性から ,  $D^4(K_{3,3})$  は閉曲面となることが示せた .

また , この空間を構成する各セルの数は以下の通りである .

(ア) 2 セルの数

$$\left( 9 \times 4 \times \frac{1}{2} \right) \times 4! = 432.$$

(イ) 1セルの数

$$(9 \times {}_4C_3) \times 4! = 864.$$

(ウ) 0セルの数

$${}_6P_4 = 360.$$

よって  $D^4(K_{3,3})$  のオイラー数は  $\chi(D^4(K_{3,3})) = 432 - 864 + 360 = -72$ .

種数は  $g = 1 - \frac{1}{2} \times (-72) = 37$ .

$D^4(K_{3,3})$  は種数 37 の閉曲面と同相となることがわかる.



## 6 主結果

第 5 章では, 完全グラフや完全二部グラフの簡約化された配位空間の例をいくつか見たが, それらは全て閉曲面と同相であった. ここで疑問となるのは, 例以外に閉曲面となる  $\mathcal{D}^N(K_n)$  や  $\mathcal{D}^N(K_{m,n})$  は存在するのかということである.

補題 1.  $\mathcal{D}^N(\Gamma)$  が閉曲面,  $\alpha_i$  を  $\mathcal{D}^N(\Gamma)$  の  $i$  セルの数とする. このとき  $2\alpha_2 = \alpha_1$  が成り立つ.

証明.  $4\alpha_2 = 2\alpha_1$  なので明らか. □

まずは  $N = 2$  のときに,  $\mathcal{D}^2(K_n)$  や  $\mathcal{D}^2(K_{m,n})$  が閉曲面となる  $K_n, K_{m,n}$  を調べる.

命題 2.  $\mathcal{D}^2(K_n)$  が閉曲面となるのは,  $n = 5$  のときのみである.

証明.  $\mathcal{D}^2(K_n)$  は  $n = 1$  のとき空集合,  $n = 2$  のとき単なる点なので, 閉曲面とはならない. 従って  $n \geq 3$  としてよい.

$\mathcal{D}^2(K_n)$  を構成する各セル数を数えると, 0 セルの数は  $n(n-1)$  個, 1 セルの数は  $n(n-1)(n-2)$  個, 2 セルの数は  $\frac{1}{4}n(n-1)(n-2)(n-3)$  個である.

これより  $\mathcal{D}^2(K_n)$  のオイラー数は

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{D}^2(K_n)) &= \frac{1}{4}n(n-1)(n-2)(n-3) - n(n-1)(n-2) + n(n-1) \\ &= \frac{1}{4}n(n-1)(n^2 - 5n + 6 - 4n + 8 + 4) \\ &= \frac{1}{4}n(n-1)(n-3)(n-6) \end{aligned}$$

となる.

補題より,  $\mathcal{D}^2(K_n)$  が閉曲面となるのは  $2 \times \frac{1}{4}n(n-1)(n-2)(n-3) = n(n-1)(n-2)$  が成り立つときである.

これを解くと,  $n \geq 3$  より  $n = 5$  が得られる. □

命題 3.  $\mathcal{D}^2(K_{m,n})$  が閉曲面となるのは,  $(m, n) = (3, 3)$  のときのみである.

証明.  $m \geq n$  としても一般性を失わないので,  $m \geq n$  と仮定する.  $\mathcal{D}^2(K_{m,n})$  は  $n = 1$  のとき  $\frac{1}{2}m(m+1)$  個の点からなる集合なので, 閉曲面とはならない. 従って  $n \geq 2$  としてよい.

$\mathcal{D}^2(K_{m,n})$  を構成する各セル数を数えると, 0 セルの数は  $(m+n)(m+n-1)$  個, 1 セルの数は  $2mn(m+n-2)$  個, 2 セルの数は  $mn(m-1)(n-1)$  個である.

これより  $\mathcal{D}^2(K_{m,n})$  のオイラー数は

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{D}^2(K_{m,n})) &= mn(m-1)(n-1) - 2mn(m+n-2) + mn(mn-1) \\ &= mn(mn - n - m + 1 - 2m - 2n + 4 + mn - 1) \\ &= mn(2mn - 3m - 3n + 4) \end{aligned}$$

となる .

補題より ,  $D^2(K_{m,n})$  が閉曲面となるのは  $2 \times mn(m-1)(n-1) = 2mn(m+n-2)$  が成り立つときである .

これを解くと ,  $n \geq 2$  より  $(m, n) = (3, 3)$  が得られる . □

次に  $N \geq 3$  で ,  $D^N(K_n)$  や  $D^N(K_{m,n})$  が閉曲面となるときの  $N$  と  $n$  ,  $N$  と  $m, n$  の関係を調べる .

命題 4.  $N \geq 3$  とする .  $D^N(K_n)$  が閉曲面ならば  $N = n - 2$  である .

証明.  $n = 1, 2$  のときは明らかに閉曲面とはならない . 従って ,  $n \geq 3$  としてよい .

$D^N(K_n)$  が閉曲面となるためには , その構成に少なくとも 2 セルをもたなければならない . つまり  $N$  個のうち 2 個の動点はそれぞれ 1 セル上にある必要がある . まず 1 個の動点をおく 1 セルを選ぶ . そして  $K_n$  からその 1 セルとそれに隣接する 1 セルを取り除く . この操作により , 残ったグラフは  $K_{n-2}$  . 同様に  $K_{n-2}$  からもう 1 個の動点をおく 1 セルを選び , それとそれに隣接する 1 セルを取り除くと , 残ったグラフは  $K_{n-4}$  . このグラフの 0 セル上における動点の数は , 高々  $n - 4$  個である .

よって

$$N - 2 \leq n - 4.$$

ただし ,  $N < n - 2$  のとき  $D^N(K_n)$  はその構成に 3 セルを含むので , 閉曲面とはならない .

よって

$$N = n - 2$$

が成り立つ . □

命題 5.  $N \geq 3$  とする .  $D^N(K_{m,n})$  が閉曲面ならば  $N = m + n - 2$  である .

証明.  $m \geq n$  としても一般性を失わないので ,  $m \geq n$  と仮定する .  $n = 1$  のときは明らかに閉曲面とはならない . 従って  $n \geq 2$  としてよい .

$D^N(K_{m,n})$  が閉曲面となるためには , その構成に少なくとも 2 セルをもたなければならない . つまり  $N$  個のうち 2 個の動点はそれぞれ 1 セル上にある必要がある . まず 1 個の動点をおく 1 セルを選ぶ . そして  $K_{m,n}$  からその 1 セルとそれに隣接する 1 セルを取り除く . この操作により , 残ったグラフは  $K_{m-1,n-1}$  . 同様に  $K_{m-1,n-1}$  からもう 1 個の動点をおく 1 セルを選び , それとそれに隣接する 1 セルを取り除くと , 残ったグラフは  $K_{m-2,n-2}$  . このグラフの 0 セル上における動点の数は , 高々  $(m - 2) + (n - 2)$  である .

よって

$$N - 2 \leq (m - 2) + (n - 2).$$

ただし ,  $N < m + n - 2$  のとき  $D^N(K_{m,n})$  はその構成に 3 セルを含むので , 閉曲面とはならない .

よって

$$N = m + n - 2$$

が成り立つ . □

定理 1.  $D^N(K_n)$  が閉曲面であるための必要十分条件は

$$\begin{cases} N = 2 \\ n = 5 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} N = 3 \\ n = 5 \end{cases}$$

である．更に  $D^2(K_5)$  は種数 6 の閉曲面， $D^3(K_5)$  は種数 16 の閉曲面に同相である．

証明. (ア) 十分条件について調べる．

(a)  $N = 1$  のとき

$D^1(K_n) = K_n$  で，構成に 2 セルをもたないので不適．

(b)  $N = 2$  のとき

命題 2 より  $n = 5$  のときのみとなる．

(c)  $N \geq 3$  のとき

今  $D^N(K_n)$  を閉曲面と仮定しているので， $N = n - 2$  である．

$D^{n-2}(K_n)$  を構成する 2 セルの数は，

$$\binom{n}{2} C_2 \times \binom{n-2}{2} C_2 \times \frac{1}{2} \times (n-2)! = \frac{1}{8} n!(n-2)(n-3). \quad (1)$$

$D^{n-2}(K_n)$  を構成する 1 セルの数は，

$$\binom{n}{2} C_2 \times \binom{n-2}{1} C_1 \times (n-2)! = \frac{1}{2} n!(n-2). \quad (2)$$

(1), (2) より

$$2 \times \frac{1}{8} n!(n-2)(n-3) = \frac{1}{2} n!(n-2).$$

これを解くと  $n = 5$  となる．

つまりこのとき  $N = 5 - 2 = 3$  が成り立つ．

(イ) 必要条件について調べる．

これは，例 5.1 と例 5.3 で確かめられた．

(ア), (イ) より定理は証明された．

□

定理 2.  $D^N(K_{m,n})$  が閉曲面であるための必要十分条件は

$$\begin{cases} N = 2 \\ m = n = 3 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} N = 4 \\ m = n = 3 \end{cases}$$

である．更に  $D^2(K_{3,3})$  は種数 4 の閉曲面， $D^4(K_{3,3})$  は種数 37 の閉曲面に同相である．

証明. (ア) 十分条件について調べる．

(a)  $N = 1$  のとき

$\mathcal{D}^1(K_{m,n}) = K_{m,n}$  で，構成に 2 セルをもたないので不適．

(b)  $N = 2$  のとき

命題 3 より  $(m, n) = (3, 3)$  のときのみとなる．

(c)  $N \geq 3$  のとき

今  $\mathcal{D}^N(K_{m,n})$  を閉曲面と仮定しているので， $N = m + n - 2$  である．

$\mathcal{D}^{m+n-2}(K_{m,n})$  を構成する 2 セルの数は，

$$\left( mn C_1 \times {}_{(m-1)(n-1)} C_1 \times \frac{1}{2} \right) \times (m+n-2)! = \frac{1}{2} mn(m-1)(n-1)(m+n-2)! \quad (3)$$

$\mathcal{D}^{m+n-2}(K_{m,n})$  を構成する 1 セルの数は，

$$({}_{mn} C_1 \times {}_{m+n-2} C_1) \times (m+n-2)! = mn(m+n-2)(m+n-2)! \quad (4)$$

(3) , (4) より

$$2 \times \frac{1}{2} mn(m-1)(n-1)(m+n-2)! = mn(m+n-2)(m+n-2)!.$$

これを解くと  $(m, n) = (3, 3)$  となる．

つまりこのとき  $N = 3 + 3 - 2 = 4$  が成り立つ．

(イ) 必要条件について調べる．

これは，例 5.2 と例 5.4 で確かめられた．

(ア) , (イ) より定理は証明された．

□

## 参考文献

- [1] A.Abrams and R.Ghrist ; *FINDING TOPOLOGY IN A FACTORY : CONFIGURATION SPACES* , preprint
- [2] R.J. ウィルソン , 西関隆夫・西関裕子 共訳 ; グラフ理論入門 , 原書第 4 版